Комплексные числа

Студенты группы АС-21 КАТ
Руководитель Шамина Л.Б.

Основные понятия

Комплексным числом z называют выражение:

$$z = a + i \cdot b,$$

где a и b – действительные числа, ***i*** – ***мнимая единица***, определяемая равенством:

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

a называется ***действительной частью*** числа z,

b – ***мнимой частью***.

Если $a = 0$, то число $i\,b$ называется ***чисто мнимым***.

Если $b = 0$, то получается действительное число a.

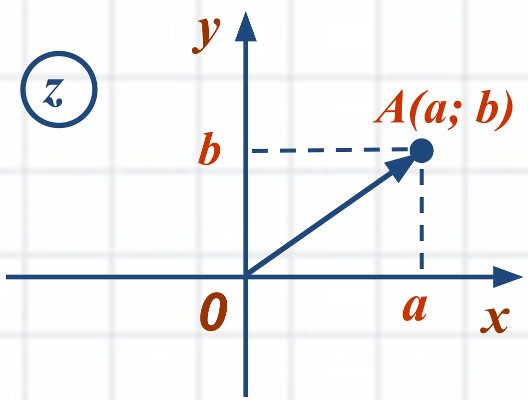
Два комплексных числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются ***сопряженными***:

$$z = a + i \cdot b, \qquad \bar{z} = a - i \cdot b,$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости XOY в виде точки $A(a;\, b)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют ***плоскостью комплексной переменной***.



Точкам, лежащим на оси OX, соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось OX называют ***действительной осью***.

Точкам, лежащим на оси OY , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось OY называют ***мнимой осью***.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z вектор $\overline{OA}$

Действия над комплексными числами

1 <u>*Действия над мнимой единицей*</u>.

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = -i \cdot i = 1; \quad i^5 = i$$

При любом целом *k*:

$$i^{4k} = 1;$$

$$i^{4k+1} = i;$$

$$i^{4k+2} = -1;$$

$$i^{4k+3} = -i$$

Действия над комплексными числами

2 <u>*Равенство комплексных чисел*</u>.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называются ***равными*** : $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$

Комплексное число $z = a + i \cdot b$ ***равно нулю*** , тогда и только тогда, когда $a = 0, \quad b = 0$

3 <u>*Сложение и вычитание комплексных чисел*</u>.

Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

$$\left(z_1 - z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2) \right)$$

Действия над комплексными числами

4 Умножение комплексных чисел.

Умножением комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется число, получаемое при умножении этих чисел по правилам алгебры как двучлены

На основании этого правила получим:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 + i \cdot b_2 \cdot a_1 + i^2 \cdot b_1 \cdot b_2$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1)}$$

Произведение сопряженных комплексных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2}$$

Действия над комплексными числами

5 *Деление комплексных чисел*.

Чтобы разделить $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ на $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$

необходимо умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)}{(a_2 + i \cdot b_2) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \boxed{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

Действия над комплексными числами

Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 1-4i$$

= -1

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(1-4i) = 2+3i-8i-12i^2 =$$

$$= 2+3i-8i+12 = 14-5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)\cdot(1+4i)}{(1-4i)\cdot(1+4i)} = \frac{2+3i+8i+12i^2}{1^2+4^2} =$$

$$\frac{2+3i+8i-12}{17} = \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$$

Пример: $z_1=3+2i$; $z_2=5-i$

Найти: 1. z_1+z_2

2. z_1-z_2

3. z_1z_2

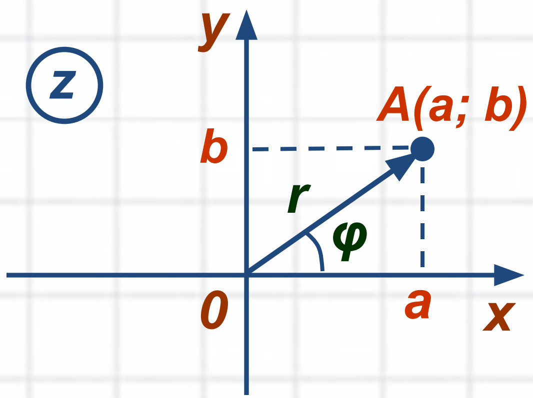
4. $\overline{z_1}z_1$

5. $(z_1)^2$

6. $\frac{z_1}{z_2}$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Обозначим через r модуль вектора $\overline{OA}$, через φ угол между вектором $\overline{OA}$ и положительным направлением оси OX.



Тогда имеют место равенства:

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi$$

Следовательно, комплексное число z можно представить в виде:

$$a + i\cdot b = r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi$$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Модуль комплексного числа

Аргумент комплексного числа

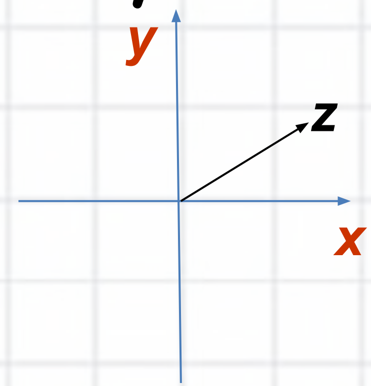
Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arg z = arctg\,\frac{b}{a}$$

Аргумент комплексного числа z считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси OX против часовой стрелки. Очевидно, что φ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k \quad k \in Z.$

Переход из алгебраической формы в тригонометрическую



1. $z = a + i \cdot b, \Rightarrow a; b$
2. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
3. $cos\varphi = \frac{a}{r}$ или $sin\varphi = \frac{b}{r} \Rightarrow \varphi$
4. $/z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1 Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

тогда произведение находится по формуле:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

2 *Деление комплексных чисел в тригонометрической форме*.

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

то деление находится по формуле:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

3 <u>*Возведение в степень комплексного числа*</u>.

При возведении комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (формула Муавра)

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

4 <u>*Извлечение корня из комплексного числа*</u>.

Корень *n* – ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ находится по формуле:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}$$

Арифметическое значение корня из положительного числа r

Действия над комплексными числами

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных значений корня.

Итак, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Действия над комплексными числами

Найти все значения кубического корня из единицы

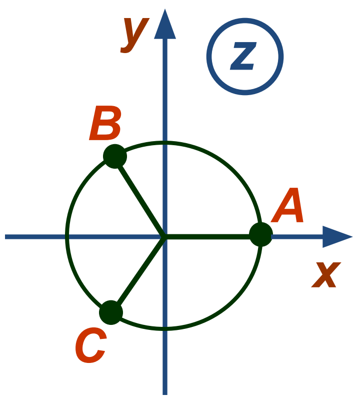
$$1 = \cos 0 + i\sin 0 \qquad (r = 1; \quad \varphi = 0)$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3} \qquad = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad \sqrt[3]{1} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$k = 1 \quad \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \quad \sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \quad = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Показательная форма комплексного числа

Представим комплексное число z в тригонометрической форме::

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Всякое комплексное число можно представить в ***показательной форме***:

$$\boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}}$$

Действия над комплексными числами в показательной форме:

Пусть имеем: $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$; $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$. Тогда:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}.$$

Выполните действия, результат запишите в показательной, тригонометрической, алгебраической формах:

1. $e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{12}}$

2. $\dfrac{4e^{i\frac{7\pi}{9}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{9}}}$

3. $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)5\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

4. $\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

5. $\dfrac{(\cos 150+i\sin 150)}{(\cos 120-i\sin 120)}$

6. $\left(2e^{i\frac{7\pi}{9}}\right)^3$