



Решение уравнений.

Разбор заданий №7 ЕГЭ по математике (базовый уровень)

Попкова В.Ю.

учитель математики

МБОУ СОШ №26

Квадратные уравнения


Квадратным уравнением называется

уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где **a**, **b**, **c** – числа (коэффициенты), **a** ≠ 0,

x – переменная.



1) Найдите корень уравнения $x^2 + 12 = 7x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Решение:

$$x^2 + 12 = 7x$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

По т. Виета

$$x_1 \cdot x_2 = 12$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4.$$

Ответ: $x=3$.

2) Решите уравнение $x^2 - 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите **БОЛЬШИЙ** из них.

□ Решение:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ или } x + 2 = 0$$

$$x = 2 \qquad x = -2$$

Ответ: 2.

3) Решите уравнение $12x^2 + 17x - 14 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

▣ Решение:

$$\rightarrow 12x^2 + 17x - 14 = 0$$

$$\rightarrow D = b^2 - 4ac = 17^2 - 4 \times 12 \times (-14) = 961 = 31^2$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$


$$\rightarrow x_1 = \frac{-17 + 31}{2 \times 12} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-17 - 31}{2 \times 12} = -\frac{48}{24} = -2$$

▣ Ответ: -2.



Иррациональные уравнения

- Уравнение, в котором переменная содержится под знаком квадратного корня называется **иррациональным уравнением**.
 - **Метод возведения в квадрат** обеих частей уравнения – основной метод решения иррациональных уравнений.
- 

4) Найдите корень уравнения $\sqrt{32 - 7x} = 5$.

▣ Решение:

▣ $\sqrt{32 - 7x} = 5$

▣ Возведем обе части уравнения в квадрат

▣ $32 - 7x = 25$

▣ $-7x = 25 - 32$

▣ $-7x = -7$

▣ $x = 1$

Ответ: 1.

5) Найдите корень уравнения $\sqrt{8 - 7x} = x$.

Решение:

$$\sqrt{8 - 7x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 7x = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x - 8 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

По теореме Виета:

$$x_1 \cdot x_2 = -8$$

$$x_1 + x_2 = -7$$

$$x_1 = -8, x_2 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 = -8, x_2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

6) Найдите корень уравнения $\sqrt{-72 - 17x} = -x$.
Если уравнение имеет более одного корня,
укажите меньший из них.

▣ Решение: возведем в квадрат

$$\sqrt{-72 - 17x} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -72 - 17x = x^2 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 17x + 72 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$


$$x^2 + 17x + 72 = 0$$

По теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = 72$$

$$x_1 + x_2 = -17$$

$$x_1 = -8, x_2 = -9$$


$$\begin{cases} x_1 = -8, x_2 = -9 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Ответ: -9.



Показательные уравнения

- Показательными уравнениями называют уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.
- Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

7) Найдите корень уравнения $3^{x-3} = 81$

□ **Решение:**

□ $3^{x-3} = 81$

□ $3^{x-3} = 3^4$

□ $x - 3 = 4$

□ $x = 7$

Ответ: 7.

8) Найдите корень уравнения $5^{x-7} = \frac{1}{125}$.

▣ Решение:

▣ $5^{x-7} = \frac{1}{125}$

▣ $5^{x-7} = 5^{-3}$

▣ $x - 7 = -3$

▣ $x = 7 - 3$

▣ $x = 4$

Ответ: 4.

9) Решите уравнение $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$

▣ **Решение:**

▣ $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$

▣ $\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = 0,4$

▣ $\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \left(\frac{2}{5}\right)^1$

▣ $3 + x = 1$

▣ $x = 1 - 3$

▣ $x = -2$

Ответ: -2.

10) Решите уравнение $3^{x^2-4,5} \times \sqrt{3} = \frac{1}{27}$

▣ Решение:

▣ $3^{x^2-4,5} \times \sqrt{3} = \frac{1}{27}$

▣ $3^{x^2-4,5} \times 3^{\frac{1}{2}} = (3)^{-3}$

▣ $x^2 - 4,5 + \frac{1}{2} = -3$

▣ $x^2 - 4 = -3$

▣ $x^2 = 1$

▣ $x = \pm 1.$

Ответ: $\pm 1.$

Логарифмические уравнения

- ▶ Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.
- ▶ Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$

11) Найдите корень уравнения $\log_2(x - 3) = 6$

▣ Решение:

▣ $\log_2(x - 3) = 6$

▣ ОДЗ: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

▣ $x - 3 = 2^6$

▣ $x - 3 = 64$

▣ $x = 67.$

Ответ: 67.

12) Решите уравнение $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$

Решение:

$$\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$x^2-3x-5 = 7-2x$$

$$x^2 - 3x - 5 - 7 + 2x = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

По теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = -12$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3$$

Проверка:

проверим найденные корни

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

1) $x = 4$

2) $\begin{cases} 4^2 - 3 \times 4 - 5 > 0 \\ 7 - 2 \times 4 > 0 \end{cases}$ получили: $-1 > 0$ – неверно $\Rightarrow x = 4$ – посторонний корень

2) $x = -3$ удовлетворяет данной системе неравенств.

Ответ: - 3.

13) Решите уравнение $\log_x(2x^2 + x - 2) = 3$.

Решение:

$$\log_x(2x^2 + x - 2) = 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 2x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$


$$x^3 = 2x^2 + x - 2$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$(x^3 - 2x^2) - (x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 2, x = \pm 1$$



1) $x = \pm 1$ не удовлетворяет условиям ОДЗ

2) проверим $x = 2$

$2 \times 2^2 + 2 - 2 > 0$ – верно

Ответ: $x = 2$.

14) Решите уравнение $\log_2(x + 4) + \log_2(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$

Решение:


$$\log_2(x + 4) + \log_2(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0,5 < x < 1,5$$

$$\log_2(x + 4) + \log_2(2x + 3) = \log_2(x + 4)(2x + 3)$$

$$\log_2(x + 4)(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$$



▣ $2x^2 + 3x + 8x + 12 - 1 + 2x = 0$

▣ $2x^2 + 13x + 11 = 0$

▣ $D = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \times 2 \times 11 = 169 - 88 = 81 = 9^2$

▣ $x = \frac{-13 \pm 9}{4} = -1; -5,5$

▣ $x = -1$ удовлетворяет условию ОДЗ : $1,5 < x < 0,5$

▣ $x = -5,5$ не удовлетворяет условию ОДЗ $\Rightarrow -5,5$ – посторонний корень.

Ответ: -1.

15) Решите уравнение $2 \times 4^x - 5 \times 2^x + 2 = 0$

▣ Решение:

▣ $2 \times 4^x - 5 \times 2^x + 2 = 0$

▣ $2 \times 2^{2x} - 5 \times 2^x + 2 = 0$


▣ Введем новую переменную $y = 2^x$

▣ $2y^2 - 5y + 2 = 0$

▣ $D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 2 \times 2 = 9$

▣ $y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2; \frac{1}{2}$

▣ $y = 2^x$



1) $2^x = 2$

$2^x = 2$

$x = 1$

2) $2^x = \frac{1}{2}$

$2^x = 2^{-1}$

$x = -1$

ОТВЕТ: ± 1

16) Решите уравнение $(a^2 - 5)^2 - (2a + 3)^2 = 0$

▣ Решение:

▣ $(a^2 - 5)^2 - (2a + 3)^2 = 0$

▣ Воспользуемся формулой $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

▣ $((a^2 - 5) - (2a + 3))((a^2 - 5) + (2a + 3)) = 0$


▣ $(a^2 + 2a - 8)(a^2 + 2a - 2) = 0$

▣ 1) $a^2 + 2a - 8 = 0$

▣ По теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = -8$$

$$x_1 + x_2 = -2$$



$$x_1 = -4, x_2 = 2$$

$$2) (a^2 + 2a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

ОТВЕТ: $-1 \pm \sqrt{3}; -4; 2$.





СПАСИБО ЗА

ВНИМАНИЕ!!!