

* МБУ «Нижнедевицкая гимназия»

* учитель математики

* Быканова Людмила Ивановна

* Обратная функция

* Повторим

Если каждому значению x из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определенному правилу f число y , то, говорят, что на этом множестве **задана функция**.

$D(f)$ - область определения функции;

x - независимая переменная или аргумент;

y - зависимая переменная;

множество всех значений $y=f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Прямая Задача

Пусть дана функция $y=f(x)$

Найти значение функции в точке

$$x=x_0$$

Например:

Найти значение функции $y=5x+7$ в точке $x=7=35+7=42$

$$y(7)=5 \cdot 7+7$$

Ответ: $y(7)=42$

Обратная Задача

Пусть дана функция $y=f(x)$

Найти значение аргумента в точке

$$y=y_0$$

Например:

Дана функция $y=5x+7$. Найти значение аргумента при котором $y=22$.

$$22=5x+7$$

$$5x=22-7$$

$$5x=15$$

$$x=15:5$$

$$x=3$$

Ответ: $y(3)=22$

Пусть дан закон изменения скорости движения
от времени

Найти закон изменения времени от скорости.

Решение:

$$v_0 - gt = v$$

$$gt = v_0 - v$$

$$t = \frac{v_0 - v}{g}$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

Обратимая
функция

$$t(v) = \frac{v_0 - v}{g}$$

Обратная функция к $v(t)$

* **Задача**

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение y только при одном значении x , то эту функцию называют **обратимой**.

$$y = 5x - 7$$

$$y = \frac{2}{x}$$

$$y = x^7$$

$$y = x^2$$


$$x = \sqrt{y}$$

$$x = -\sqrt{y}$$

Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y , которую обозначим $x = g(y)$. Поменяем местами x и y : $y = g(x)$. Функцию $y = g(x)$ называют **обратной** к функции $y = f(x)$. Обозначают $f^{-1}(x)$.

* Пример

* Найти функцию, обратную функции $y = \frac{1}{x-5}$.

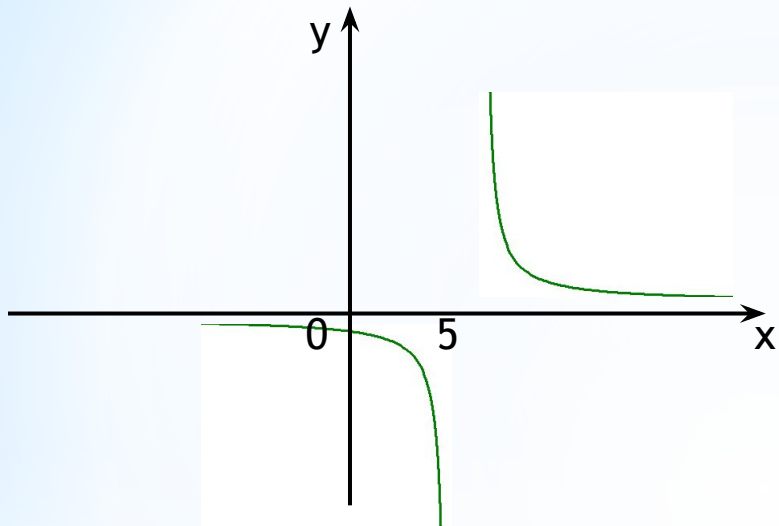
Решение:

$$\frac{1}{x-5} = y$$

$$x-5 = \frac{1}{y}$$

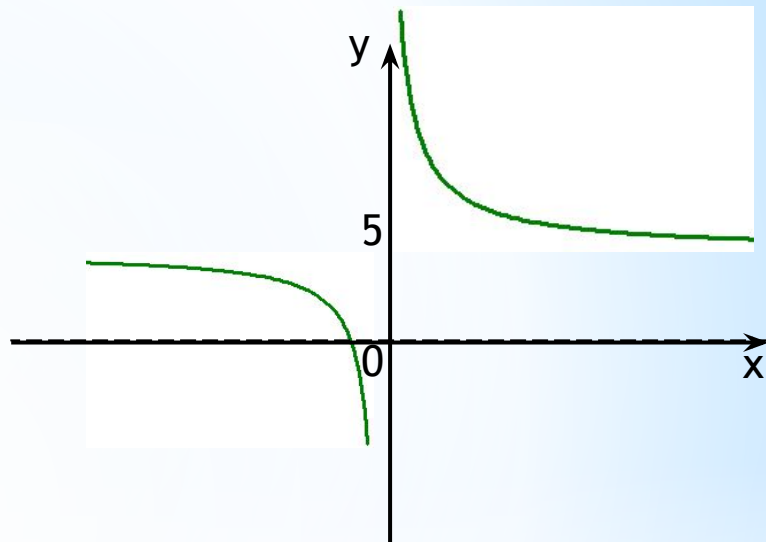
$$x = \frac{1}{y} + 5 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{x} + 5$$

Ответ: $f^{-1}(x) = 5 + \frac{1}{x}$



1. $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$

2. $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



1. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. $E(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$

1. Область определения обратной функции f^{-1} совпадает с множеством значений исходной функции f , а множество значений обратной функции f^{-1} совпадает с областью определения исходной функции f :

$$D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f)$$

2. Монотонная функция является обратимой:

а) если функция f возрастает, то обратная к ней функция f^{-1} также возрастает;

б) если функция f убывает, то обратная к ней функция f^{-1} также убывает.

* Свойства обратных функций:

*Пример

Показать, что для функции $y = 5x - 3$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение:

$$D(y) = R$$

$$E(y) = R$$

Функция возрастает на R .

Значит, обратная функция существует на R .

Решим уравнение $y = 5x - 3$ относительно x . Получим,

$$x = \frac{y+3}{5}.$$

Поменяв местами буквы x и y , получим:

$$y = \frac{x+3}{5}.$$

Это и есть искомая обратная функция.

*Пример

*Дана функция $y = x^2, x \in [0; +\infty)$.

Доказать, что для нее существует обратная функция, записать аналитическое выражение обратной функции в виде $y = f^{-1}(x)$ и построить график обратной функции.

*Решение:

Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, она имеет обратную функцию.

Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. Промежутку $[0; +\infty)$ принадлежат лишь значения функции $x = \sqrt{y}$.

* Поменяв местами x и y , получим $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$.

График этой функции получается из графика функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$.

