Тригонометрические формулы

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
2. $tg\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha$
3. $ctg\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha$
4. $tg\alpha*ctg\alpha=1$
5. $1+tg^2\alpha=1/\cos^2\alpha$
6. $1+ctg^2\alpha=1/\sin^2\alpha$

1. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
2. $tg(-\alpha)=-tg\alpha$
3. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
4. $\arcsin(-\alpha)=-\arcsin\alpha$
5. $\arccos(-\alpha)=\pi-\arccos\alpha$
6. $arctg(-\alpha)=-arctg\alpha$
7. $arcctg(-\alpha)=\pi-arcctg\alpha$

- $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
- $\sin2\alpha=2\sin\alpha*\cos\alpha$
- $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

Формулы приведения

	90°±α	180°±α	270°±α
sin	cosα	∓sinα	-cosα
cos	∓sinα	-cosα	±sinα
tg	∓ctgα	±tgα	∓ctgα
ctg	∓tgα	±ctgα	∓tgα

B1.Преобразования тригонометрических выражений

$\cos\alpha = ?$

$\sin\alpha = 4/5,\ \alpha \in (0; \pi/2)$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin^2\alpha)} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{(1-(4/5)^2} = 0{,}6$

$\alpha \in$ 1й четверти $\Rightarrow \cos\alpha > 0$

Ответ:0,6.

B4.Решение уравнений с помощью замены переменной

cosy=?

$$\begin{cases} x+y=2{,}5\pi, \\ 9\sin x-3\cos y=-0{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2{,}5\pi-y, \\ 9\sin(2{,}5\pi-y)-3\cos y=-0{,}6 \end{cases}$$

$9\sin(\pi/2-y)-3\cos y=-0{,}6;$

$9\cos y-3\cos y=-0{,}6;$

$\cos y=-0{,}1$

Ответ: -0,1.

Простейшие уравнения

1. sin x =a

$$\left[\begin{array}{l} x=\varnothing, |a|>1, \\ x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in Z, |a|\le 1 \end{array}\right.$$

2. cos x =a

$$\left[\begin{array}{l} x=\varnothing, |a|>1, \\ x=\pm \arccos a+2\pi n,\ n\in Z,\ |a|\le 1 \end{array}\right.$$

3. tg x =a

$$x=\mathrm{arctg}\, a+\pi n,\ n\in Z$$

4. ctg x =a

$$x=\mathrm{arcctg}\, a+\pi n,\ n\in Z$$

5. arcsin a =x

$$\begin{cases} x \in [-\pi/2; \pi/2], \\ \sin x = a \end{cases}$$

6. arccos a =x

$$\begin{cases} x \in [0; \pi], \\ \cos x = a \end{cases}$$

7. arctg a =x

$$\begin{cases} x \in (-\pi/2; \pi/2), \\ \operatorname{tg} x = a \end{cases}$$

8. arcctg a =x

$$\begin{cases} x \in (0; \pi), \\ \operatorname{ctg} x = a \end{cases}$$

А9.Простейшие тригонометрические уравнения

$\cos x-(\sqrt{2})/2=0;$

$\cos x= (\sqrt{2})/2;$

$x=\pm \pi /4+2 \pi k, k\in Z$

Ответ: $=\pm \pi /4+2 \pi k, k\in Z.$

Способы решения уравнений

1.Разложение на множители.

$\sin 2x = \cos x;$

$2\sin x * \cos x = \cos x;$

$\cos x(2\sin x - 1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + \pi k, k \in Z, \\ x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

2.Сведение к квадратному или ур-ям более высоких степеней.

$2\sin^2x-\cos x-1=0;$

$2(1-\cos^2x)-\cos x-1=0;$

$2-2\cos^2x-\cos x-1=0;$

$2\cos^2x+\cos x-1=0\ldots$

3.Применение универсальной тригонометрической подстановки.

$\sin x=2tg(x/2):(1+tg^2(x/2))$;

$\cos x=(1-tg^2(x/2)):(1+tg^2(x/2));$ $\Rightarrow$ $tg(x/2)=t\ldots$

$tgx=2tg(x/2):(1-tg^2(x/2));$

$\sin^2 x = tg^2 x/(1+tg^2 x)$;

$\cos^2 x = 1/(1+tg^2 x)$

4.Преобразование суммы в произведение и наоборот.

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin((\alpha\pm\beta)/2)*\cos((\alpha\mp\beta)/2)$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos((\alpha+\beta)/2)*\cos((\alpha-\beta)/2)$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin((\alpha+\beta)/2)*\sin((\alpha-\beta)/2)$;

$\sin\alpha*\cos\beta = (\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))/2$;

$\sin\alpha*\sin\beta = (\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))/2$;

$\cos\alpha*\cos\beta = (\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))/2$

5.Применение формул понижения степени.

$\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$;

$\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$;

$tg^2 x = (1-\cos 2x)/(1+\cos 2x)$

6.Однородные уравнения 1й степени

$a*\sin x+b*\cos x=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0$

Способ решения: деление на $\cos x\neq 0$.

Однородные уравнения 2й степени

$a*\sin^2 x+b*\sin x*\cos x+c*\cos^2 x=0$

Способ решения: деление на $\cos^2 x\neq 0$.

$a*\sin^2 x+b*\sin x*\cos x+c*\cos^2 x+d=0$

Способ решения: $d=d*1=d(\sin^2 x+\cos^2 x)$ ⇨

сведение ко второму виду.

7.Линейные уравнения.

$a*\sin x+b*\cos x=c$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$

<u>1й способ</u>

$a*2*\sin(x/2)*\cos(x/2)+b(\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2))= c(\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2))$ $\Rightarrow$ делим на $\cos^2(x/2)\neq 0$ $\Rightarrow$

решаем кв. ур-е относительно $tg(x/2)$

<u>2й способ</u>

делим обе части ур-я на $\sqrt{(a^2+b^2)}$

$\sin x*a/\sqrt{(a^2+b^2)}+\cos x*b/\sqrt{(a^2+b^2)}=c/\sqrt{(a^2+b^2)}$;

$a/\sqrt{(a^2+b^2)}=\cos\varphi$, $b/\sqrt{(a^2+b^2)}=\sin\varphi$;

$\cos\varphi*\sin x+\sin\varphi*\cos x=c/\sqrt{(a^2+b^2)}$;

$\sin(x+\varphi)=c/\sqrt{(a^2+b^2)}$;

$x+\varphi=(-1)^n\arcsin(c/\sqrt{(a^2+b^2)})+\pi n, n\in Z$

С2.Решение сложных уравнений в несколько приемов

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$$

Решение:

$$\frac{\sin 2x - \sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2} + \sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

$$\frac{2\sin x\cos x + \sqrt{2}\cos x}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(2\sin x + \sqrt{2}\right)\cos x}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(2\sin x + \sqrt{2}\right)\cos x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x + \sqrt{2} = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$