

Тригонометрические формулы

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2. $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$

3. $\operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$

4. $\operatorname{tg}\alpha * \operatorname{ctg}\alpha = 1$

5. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 / \cos^2\alpha$

6. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 / \sin^2\alpha$

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

2. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

3. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

4. $\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha$

5. $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha$

6. $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha$

7. $\operatorname{arcctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arcctg}\alpha$

-
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$
 - $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$
 - $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha * \cos\alpha$
 - $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
-

Формулы приведения

	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
tg	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$
ctg	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$

В1. Преобразования тригонометрических выражений

$$\cos \alpha = ?$$

$$\sin \alpha = 4/5, \alpha \in (0; \pi / 2)$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - (4/5)^2} = 0,6$$

$$\alpha \in 1\text{й четверти} \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

Ответ: 0,6.

В4. Решение уравнений с помощью замены переменной

$$\cos y = ?$$

$$\begin{cases} x + y = 2,5 \pi, \\ 9 \sin x - 3 \cos y = -0,6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2,5 \pi - y, \\ 9 \sin(2,5 \pi - y) - 3 \cos y = -0,6 \end{cases}$$

$$9 \sin(\pi / 2 - y) - 3 \cos y = -0,6;$$

$$9 \cos y - 3 \cos y = -0,6;$$

$$\cos y = -0,1$$

Ответ: -0,1.

Простейшие уравнения

1. $\sin x = a$

$$\begin{cases} x = \emptyset, |a| > 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1 \end{cases}$$

2. $\cos x = a$

$$\begin{cases} x = \emptyset, |a| > 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1 \end{cases}$$

3. $\operatorname{tg} x = a$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

4. $\operatorname{ctg} x = a$

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

5. $\arcsin a = x$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-\pi/2; \pi/2], \\ \sin x = a \end{array} \right.$$

6. $\arccos a = x$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [0; \pi], \\ \cos x = a \end{array} \right.$$

7. $\operatorname{arctg} a = x$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\pi/2; \pi/2), \\ \operatorname{tg} x = a \end{array} \right.$$

8. $\operatorname{arcctg} a = x$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (0; \pi), \\ \operatorname{ctg} x = a \end{array} \right.$$

А9. Простейшие тригонометрические уравнения

$$\cos x - (\sqrt{2})/2 = 0;$$

$$\cos x = (\sqrt{2})/2;$$

$$x = \pm \pi / 4 + 2 \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \pm \pi / 4 + 2 \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Способы решения уравнений

1. Разложение на множители.

$$\sin 2x = \cos x;$$

$$2\sin x \cdot \cos x = \cos x;$$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

2. Сведение к квадратному или уравнениям более высоких степеней.

$$2\sin^2x - \cos x - 1 = 0;$$

$$2(1 - \cos^2x) - \cos x - 1 = 0;$$

$$2 - 2\cos^2x - \cos x - 1 = 0;$$

$$2\cos^2x + \cos x - 1 = 0 \dots$$

3. Применение универсальной тригонометрической подстановки.

$$\sin x = 2\operatorname{tg}(x/2) : (1 + \operatorname{tg}^2(x/2)) ;$$

$$\cos x = (1 - \operatorname{tg}^2(x/2)) : (1 + \operatorname{tg}^2(x/2)); \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(x/2) = t \dots$$

$$\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg}(x/2) : (1 - \operatorname{tg}^2(x/2));$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

4. Преобразование суммы в произведение и наоборот.

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) * \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right);$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) * \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right);$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) * \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right);$$

$$\sin \alpha * \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\sin \alpha * \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2};$$

$$\cos \alpha * \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

5. Применение формул понижения степени.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

6. Однородные уравнения 1й степени

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

Способ решения: деление на $\cos x \neq 0$.

Однородные уравнения 2й степени

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Способ решения: деление на $\cos^2 x \neq 0$.

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x + d = 0$$

Способ решения: $d = d \cdot 1 = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$



сведение ко второму виду.

7. Лине́йные уравнения.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

1й способ

$$a \cdot 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) + b(\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)) = c(\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)) \quad \text{делим на } \cos^2(x/2) \neq 0 \quad \Rightarrow$$

решаем кв. ур-е относительно $\operatorname{tg}(x/2)$

2й способ

делим обе части ур-я на $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\sin x \cdot a / \sqrt{a^2 + b^2} + \cos x \cdot b / \sqrt{a^2 + b^2} = c / \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$a / \sqrt{a^2 + b^2} = \cos \varphi, \quad b / \sqrt{a^2 + b^2} = \sin \varphi;$$

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = c / \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\sin(x + \varphi) = c / \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin(c / \sqrt{a^2 + b^2}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

C2. Решение сложных уравнений в несколько приемов

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$$

Решение:

$$\frac{\sin 2x - \sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} + \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

$$\frac{2 \sin x \cos x + \sqrt{2} \cos x}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2 \sin x + \sqrt{2}) \cos x}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2 \sin x + \sqrt{2}) \cos x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$