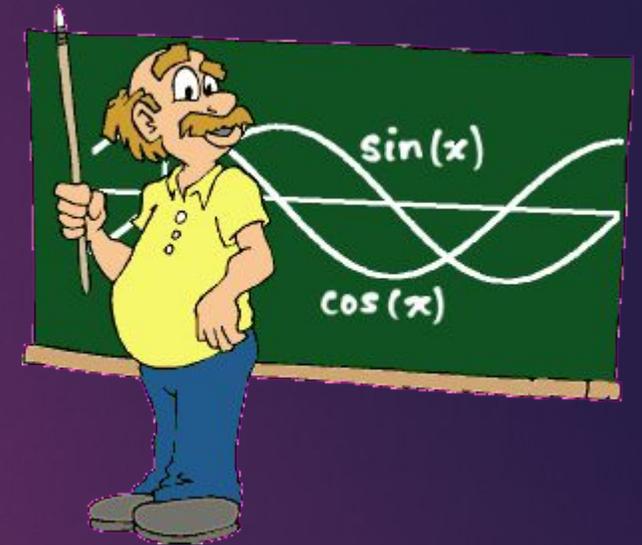


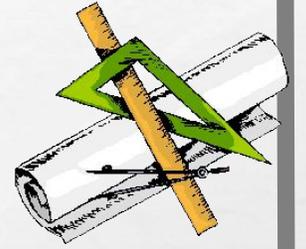
Методы и приемы решений тригонометрических уравнений



Учитель математики: Бекмурзова С. Т.

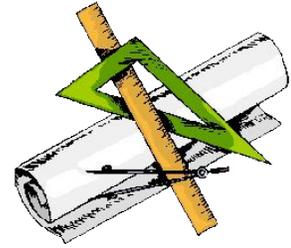
10 класс

СОДЕРЖАНИЕ.



- 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ КАК НАУКИ.**
- 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ ВВЕДЕНИЯ В РАЗДЕЛ.**
- 3. ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**
- 4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ**

ЦЕЛЬ:



□ Повторить решение тригонометрических уравнений.

1. Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.
2. Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений.
3. Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.

□ Выделение основных проблем при решении этих уравнений:

Потеря корней.

Посторонние корни.

Отбор корней.

Тригономётрия (от греч. *τρίγωνο* (треугольник)
и греч. *μετρέιν* (измерять),



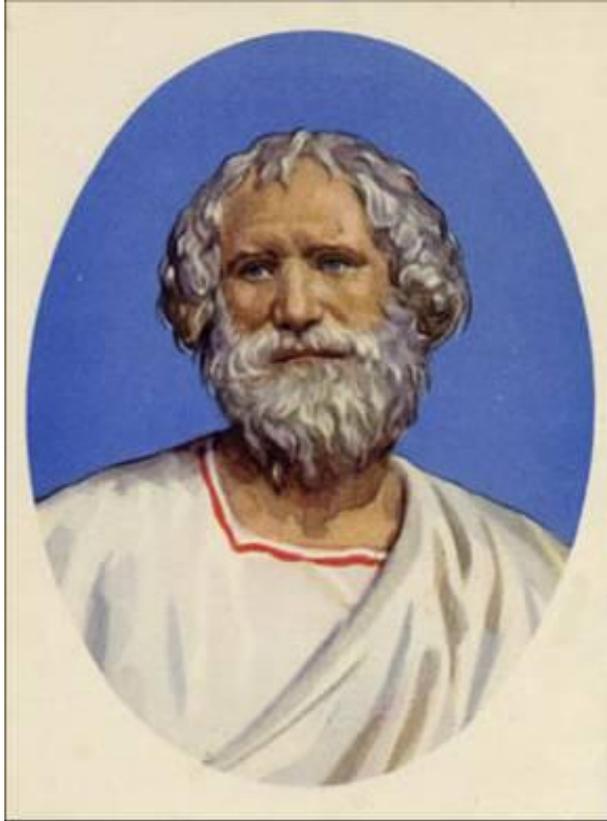
то есть измерение треугольников) — раздел
математики,

в котором изучаются тригонометрические
функции и их приложения к геометрии.

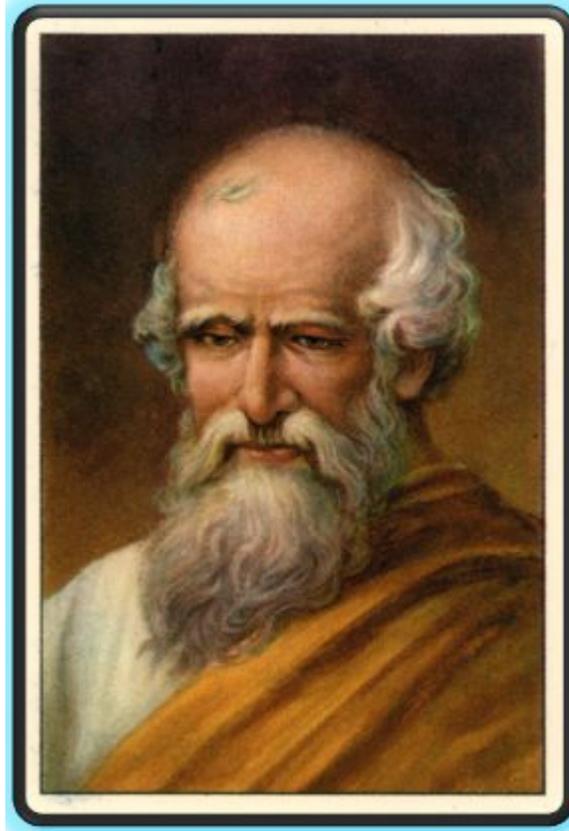
Данный термин впервые появился в 1595 г. как
название книги немецкого математика
Бартоломеуса Питискуса (*Bartholomäus Pitiscus*,
1561—1613),

а сама наука ещё в глубокой древности
использовалась для расчётов в астрономии,
геодезии и архитектуре.

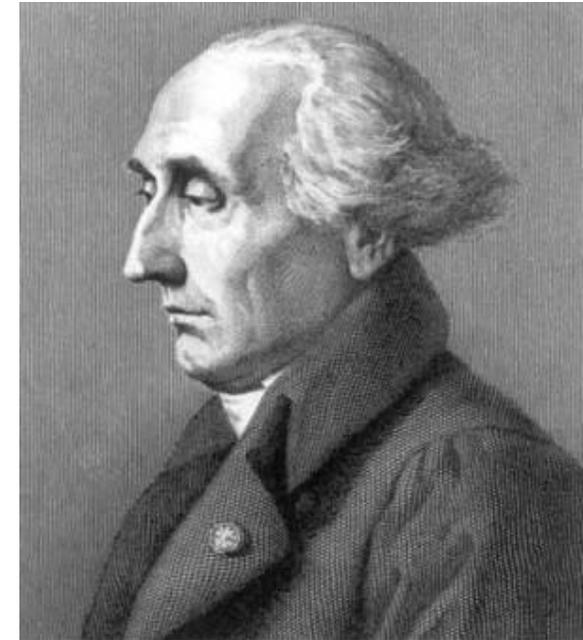
Развитие тригонометрии началось с этих великих ученых!



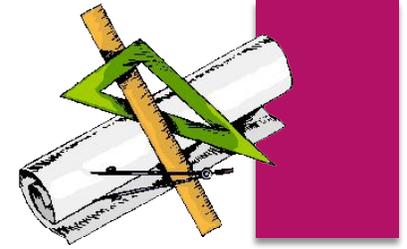
**Фал
ес**



**Архиме
д**



**Жозеф
Луи
Лагранж**

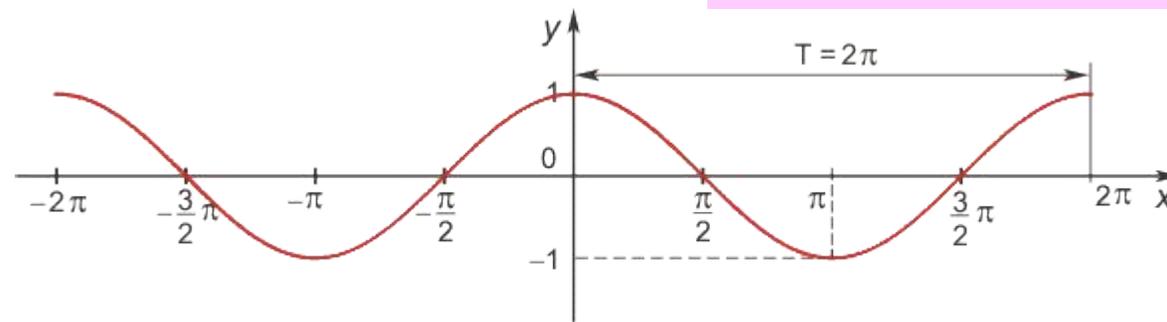


В *XVIII* веке Леонард Эйлер дал современные, более общие определения, расширив область определения α на всю числ

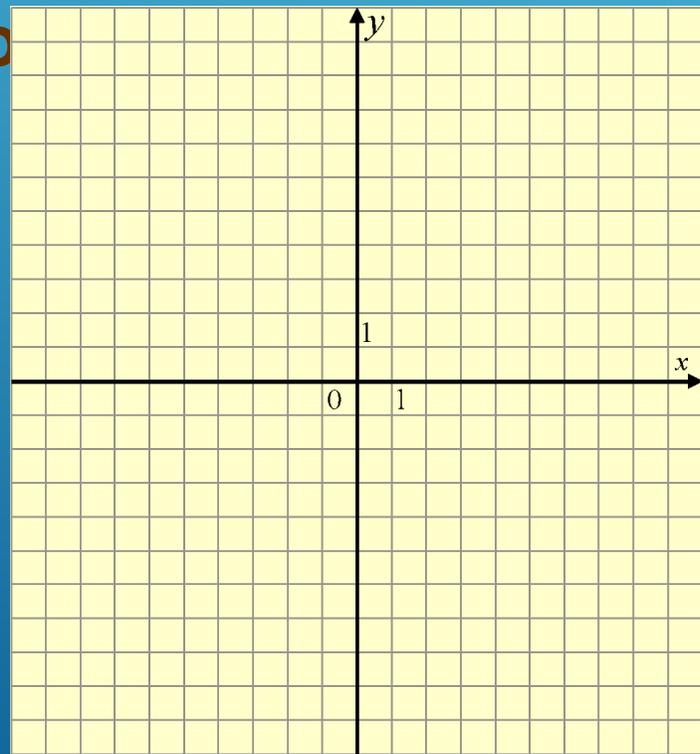
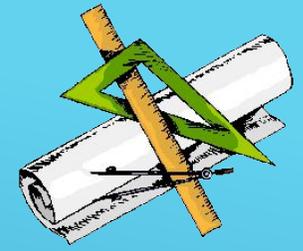
α – угол поворота

$$-\infty < \alpha < +\infty$$

$$\alpha \in R$$



Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенной стороны с осью x обозначим P .

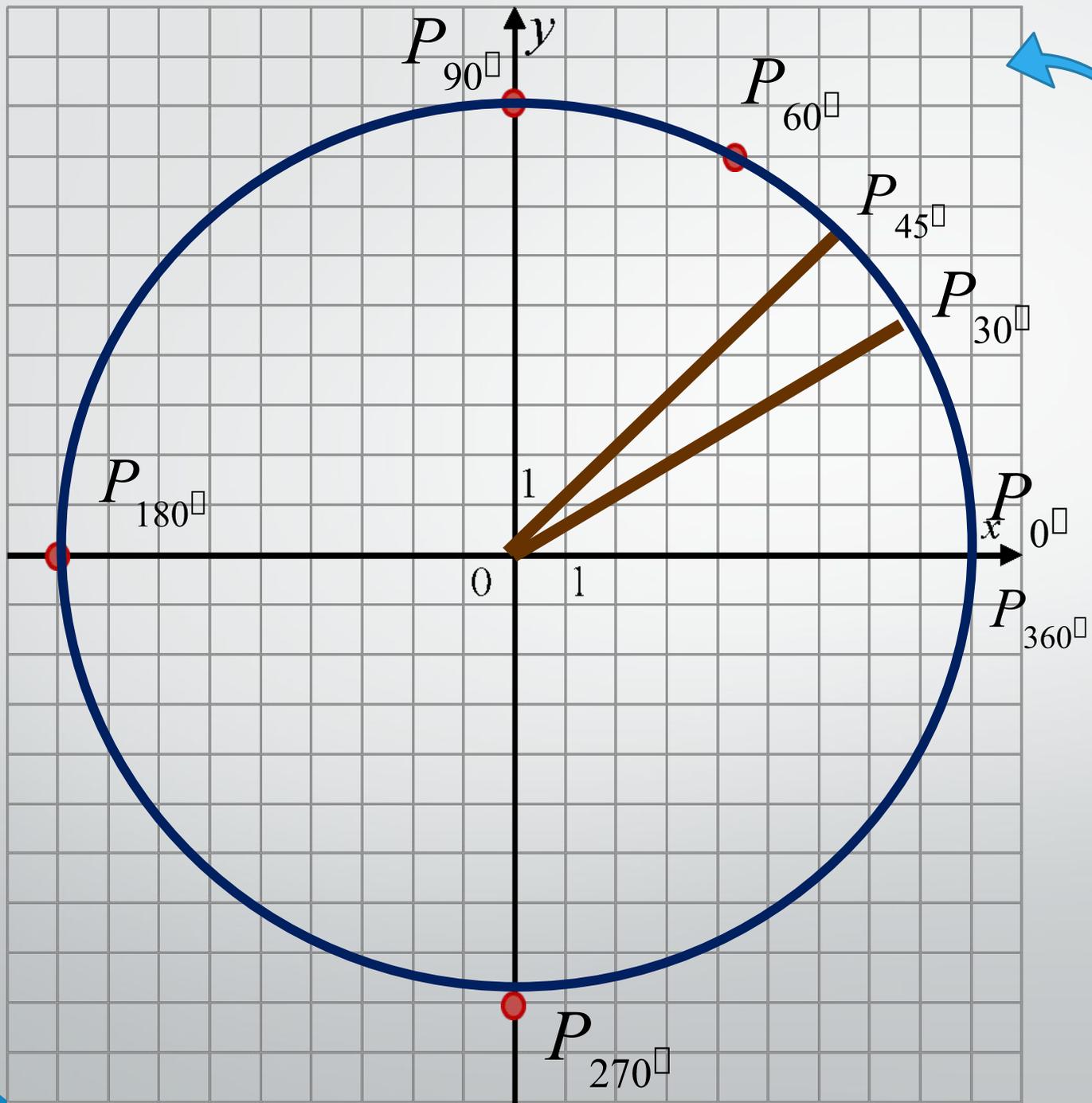


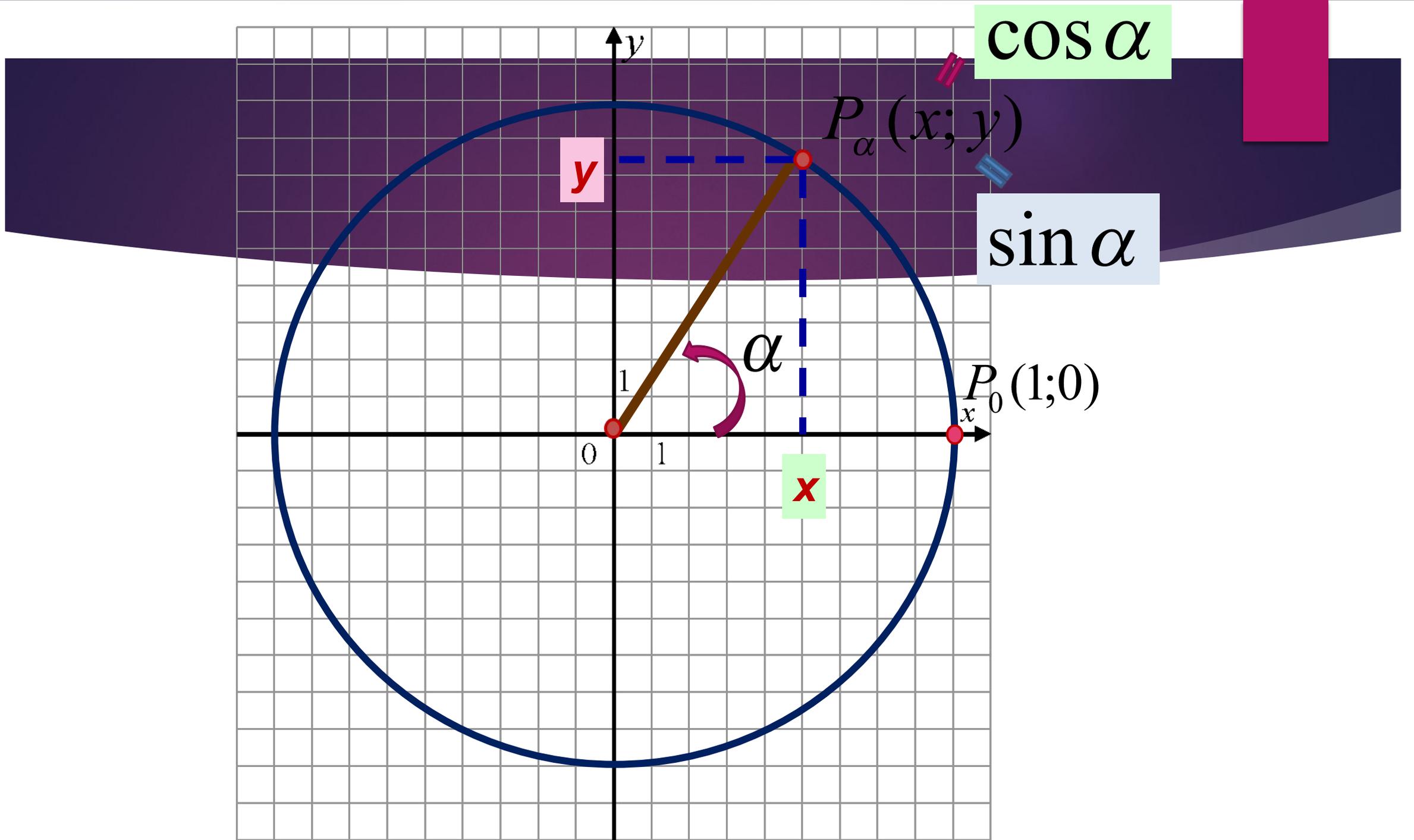
сторону $\alpha > 0$



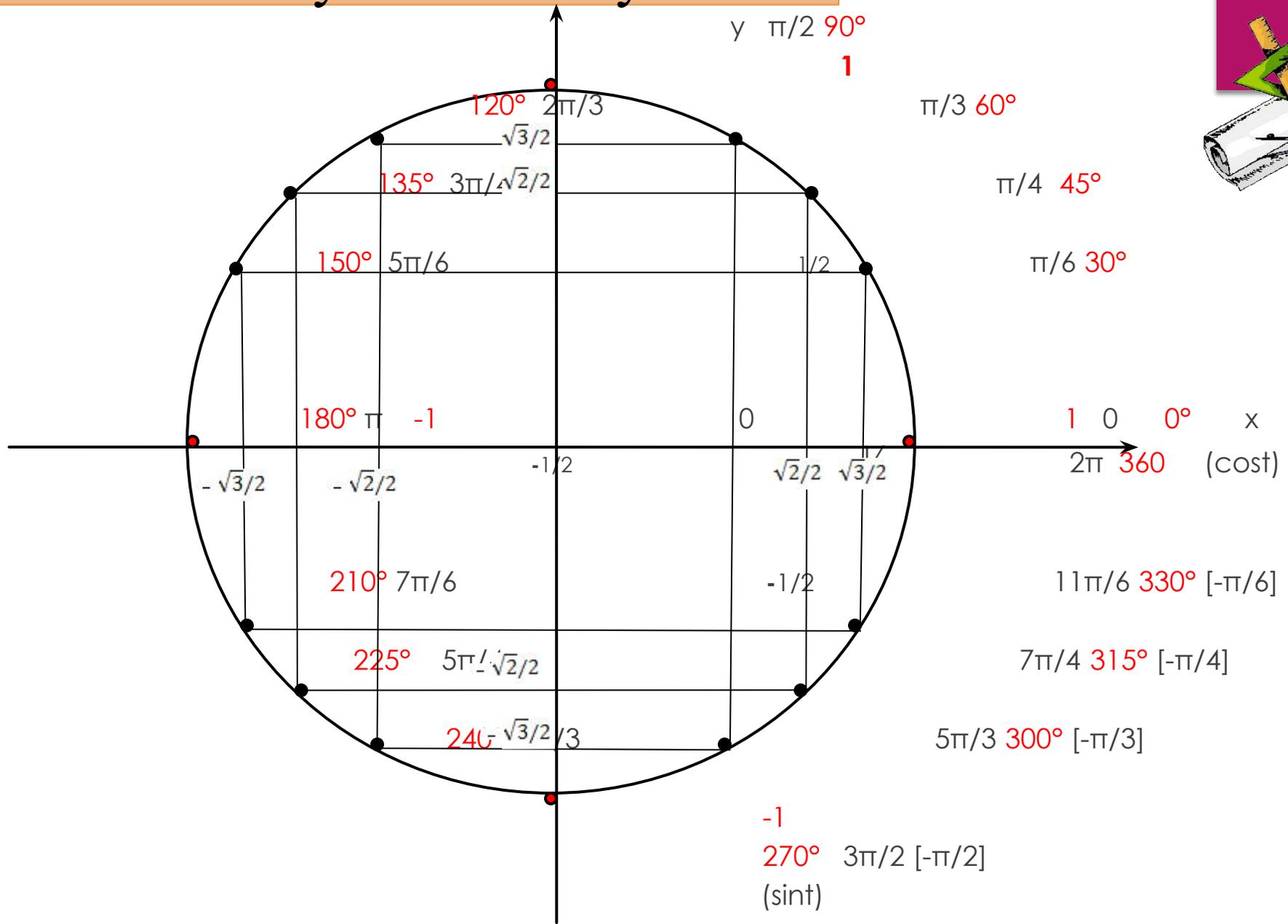
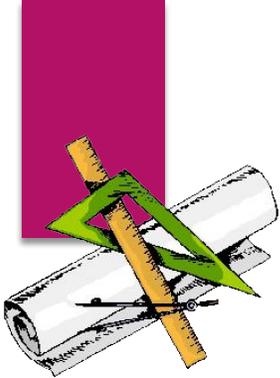
$\alpha < 0$



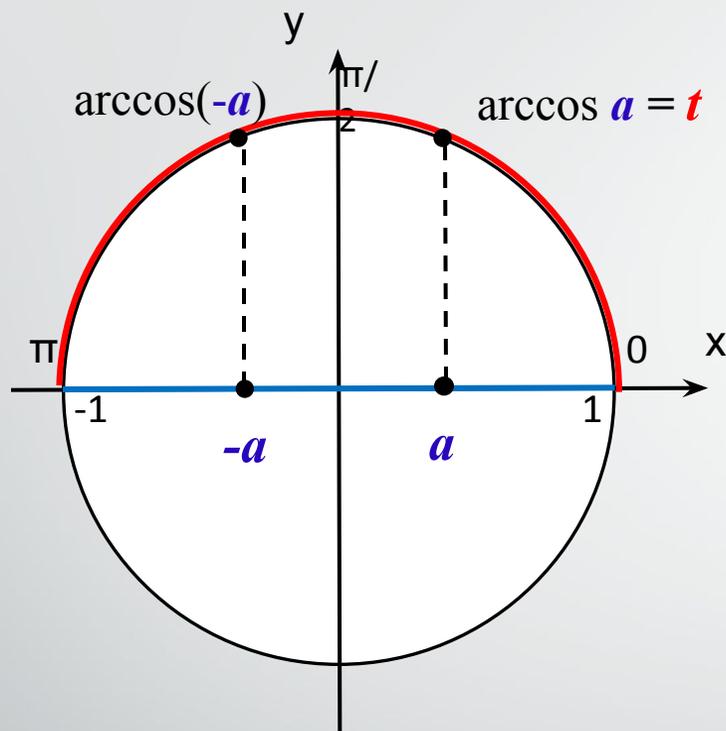
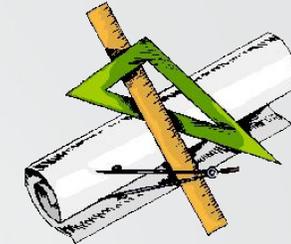




Повторим значения синуса и косинуса



Арккосинус



Арккосинусом числа a называется такое число (угол) t из $[0; \pi]$, что $\cos t = a$.

Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Примеры:

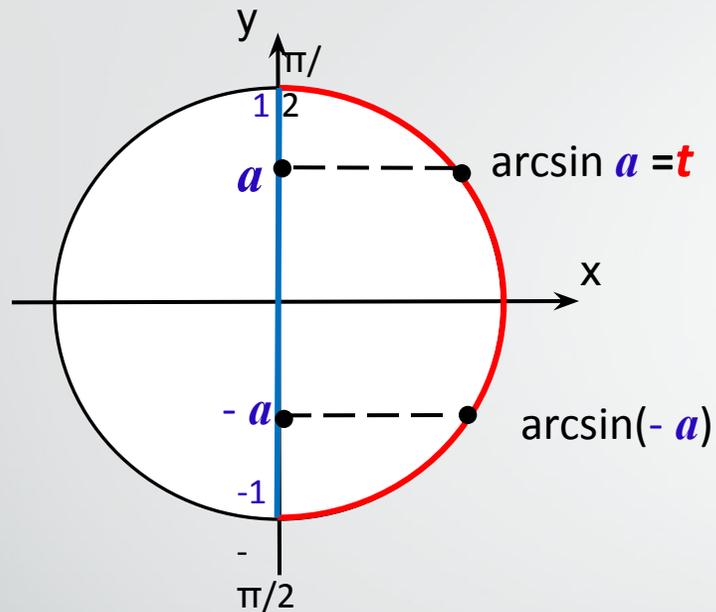
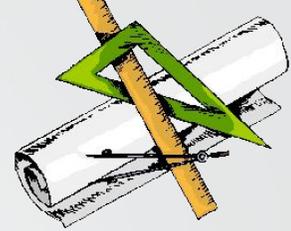
$$1) \arccos(-1)$$

$$= \pi$$

$$2) \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Арксинус



Арксинусом числа a называется такое число (угол) t из $[-\pi/2; \pi/2]$, что $\sin t = a$.
Причём, $|a| \leq 1$.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

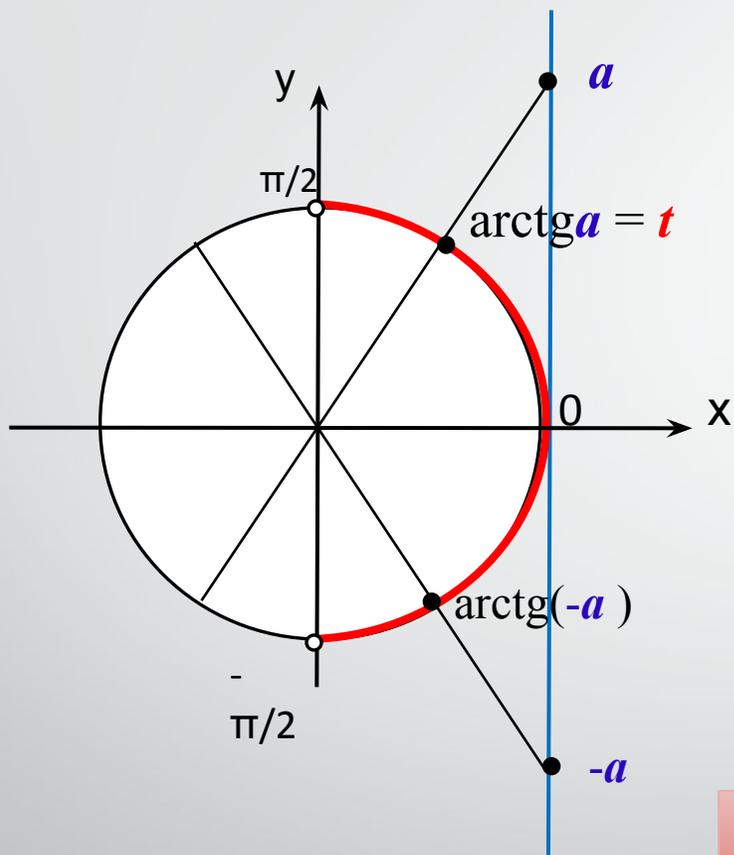
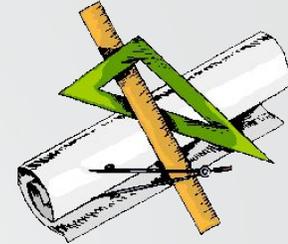
$$1) \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3) \arcsin 0 = 0$$

$$2) \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

Примеры:

Арктангенс



Примеры:

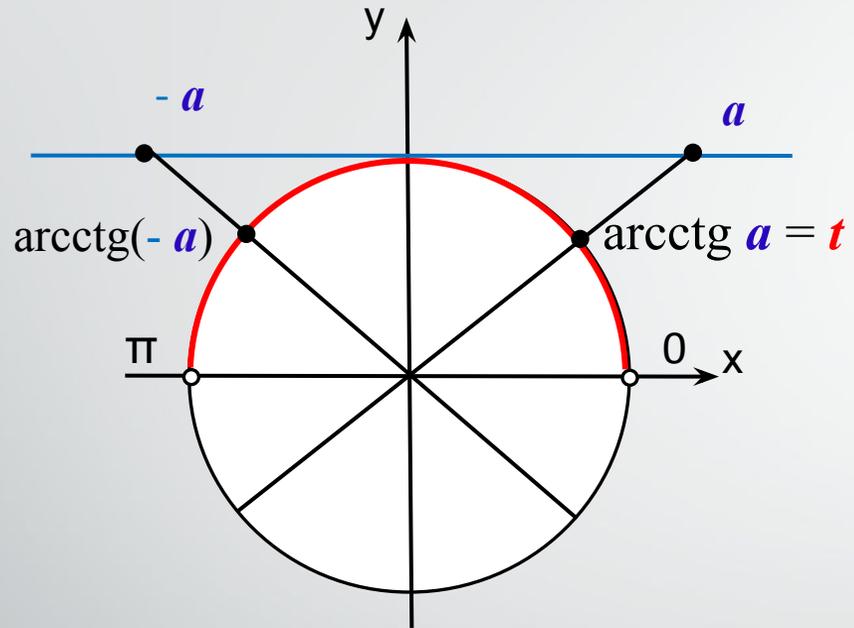
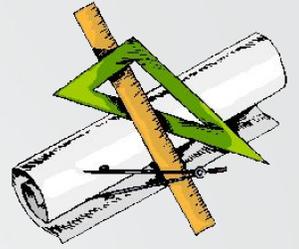
Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(-\pi/2; \pi/2)$, что $tg t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

$$\arctg(-a) = -\arctg a$$

$$1) \arctg \sqrt{3}/3 = \pi/6$$

$$2) \arctg(-1) = -\pi/4$$

Арккотангенс



Арккотангенсом числа a называется такое число (угол) t из $(0; \pi)$, что $\text{ctg } t = a$.
Причём, $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg } a$$

Примеры:

$$1) \text{arcctg}(-1) = 3\pi/4$$

$$2) \text{arcctg}\sqrt{3} = \pi/6$$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений



$$1. \cos t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$1) \underline{\cos t = 0}$$

$$t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \underline{\cos t = 1}$$

$$t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \underline{\cos t = -1}$$

$$t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений



2. $\sin t = a$, где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

ИЛИ

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) $\sin t = 0$
 $t = \pi k, k \in Z$

2) $\sin t = 1$
 $t = \pi/2 + 2\pi k, k \in Z$

3) $\sin t = -1$
 $t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in Z$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений



$$3. \operatorname{tg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4. \operatorname{ctg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

При каких значениях x имеет смысл выражение:



1. $\arcsin(2x+1)$

$$\begin{aligned} 1) \quad & -1 \leq 2x+1 \leq 1 \\ & -2 \leq 2x \leq 0 \\ & -1 \leq x \leq 0 \end{aligned}$$

Ответ: $[-1; 0]$

2. $\arccos(5-2x)$

$$\begin{aligned} 2) \quad & -1 \leq 5-2x \leq 1 \\ & -6 \leq -2x \leq -4 \\ & 2 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Ответ: $[2; 3]$

3. $\arccos(x^2-1)$

$$\begin{aligned} -1 \leq x^2-1 \leq 1 \\ 0 \leq x^2 \leq 2 \end{aligned}$$

Ответ:

$$\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

4. $\arcsin(4x^2-3x)$

$$\begin{aligned} -1 \leq 4x^2-3x \leq 1 \\ \begin{cases} 4x^2-3x \geq -1 \\ 4x^2-3x \leq 1 \end{cases} \\ 4x^2-3x-1 \leq 0 \end{aligned}$$

Ответ:

$$\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



1.Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

Пример. Решить уравнение: $2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \cos(x + \pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x + \pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

$$1). \cos(x + \pi/6) = 1, \quad 2). \cos(x + \pi/6) = 1/2,$$

$$x + \pi/6 = 2\pi k, \quad x + \pi/6 = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n,$$

$$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k; \quad x_2 = \pm \pi/3 - \pi/6 + 2\pi n.$$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



2. Однородные

1) Первой степени:

Решаются делением на $\cos x$ (или $\sin x$) и методом введения новой переменной.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Получим: простое уравнение

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m$$

Пример. Решите уравнение $\sin x + 2\cos x = 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения на $\cos x$.

$$\text{Получим } \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -2$$

$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



2) Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$\mathbf{a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.}$$

Пр и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ откуда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, откуда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad 2) \operatorname{tg} x = -3,$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



3. Уравнение вида:

$$A \sin x + B \cos x = C, \quad A, B, C \neq 0$$

$$\begin{aligned} 1. \sin 2x &= \sin x \\ 2 \sin x \cos x - \sin x &= 0 \\ \sin x(2 \cos x - 1) &= 0 \\ \sin x = 0 & \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \pi k, k \in Z. & \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. 3 \sin x &= 2 \cos^2 x \\ 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 &= 0 \\ \sin x &= t \\ 2t^2 + 3t - 2 &= 0 \\ t = \frac{1}{2} & \quad t = -2 \\ \sin x = \frac{1}{2} & \quad \sin x = -2 \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. & \quad \text{Нет решения.} \end{aligned}$$

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Решение. Перенесём все члены уравнения влево:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \sin x - 2 \sin^2(x/2) &= 0, \\ 2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) - 2 \sin^2(x/2) &= 0, \\ 2 \sin(x/2) \cdot [\cos(x/2) - \sin(x/2)] &= 0, \\ 1). \sin(x/2) = 0, & \quad 2). \cos(x/2) - \sin(x/2) = 0, \\ x/2 = \pi k, & \quad \tan(x/2) = 1, \\ x_1 = 2\pi k; & \quad x/2 = \arctan 1 + \pi n, \\ & \quad x/2 = \pi/4 + \pi n, \\ & \quad x_2 = \pi/2 + 2\pi n. \end{aligned}$$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$A \sin x + B \cos x = C$$

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$tg x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1-tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5, x \in \mathbb{Z}$$

$$3 \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} + 4 \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6tg \frac{x}{2} + 4 - 4tg^2 \frac{x}{2} - 5 - 5tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9tg^2 \frac{x}{2} - 6tg \frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1+tg^2 \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg \frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$$

$$tg \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \arctg \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2 \arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уравнения.

Проверка

Если $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

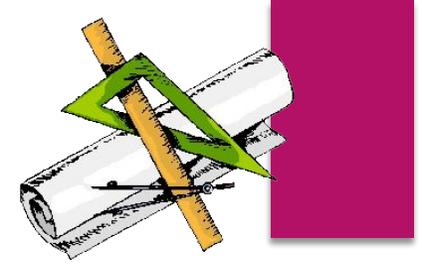
$$3 \sin(\pi + 2\pi n) + 4 \cos(\pi + 2\pi n) = 5, x \in \mathbb{Z}$$

$$0 + 4(-1) = 5 - \text{не верно, значит}$$

$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не является корнями исходного уравнения

Ответ: $x = 2 \arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Формулы.



Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$;
Проверка
обязательна!

Понижение степени.

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= (1 + \cos 2x) : 2 \\ \sin^2 x &= (1 - \cos 2x) : 2 \end{aligned}$$

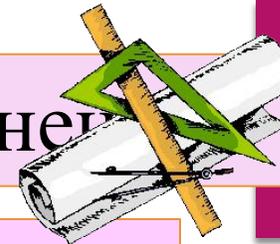
Метод вспомогательного аргумента.

$a \cos x + b \sin x$ заменим на $C \sin(x + \phi)$, где

$$\sin \phi = \frac{a}{C}; \quad \cos \phi = \frac{b}{C}; \quad \phi - \text{вспомогательный аргумент.}$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2};$$

Решение простейших уравнений



1) $\text{tg}2x = -1$

$$2x = \text{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos(x+\pi/3) = 1/2$

$$x+\pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+\pi/3 = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $\sin(\pi - x/3) = 0$

упростим по формулам

приведения

$$\sin(x/3) = 0$$

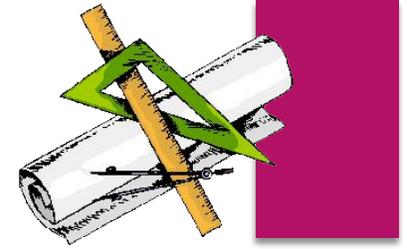
частный случай

$$x/3 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

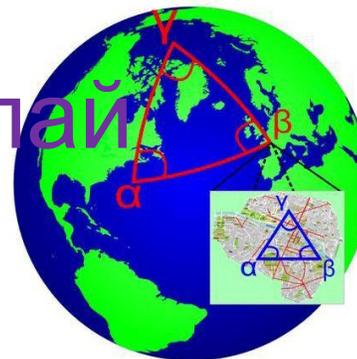
$$x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $3\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

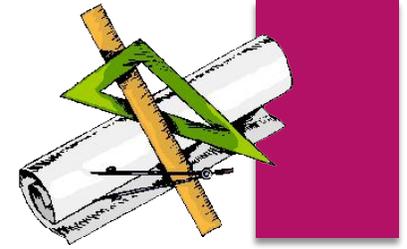
Эти правила помогут при решении!



- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.



$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Потеря корней, лишние

1. Потеря ~~корней~~:

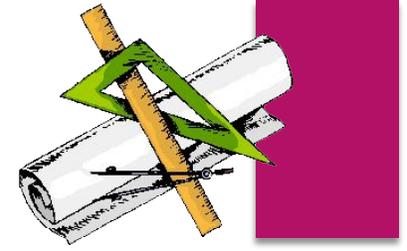
- делим на $g(x)$.
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на $g(x)$ (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.



Спасибо
за
внимание!