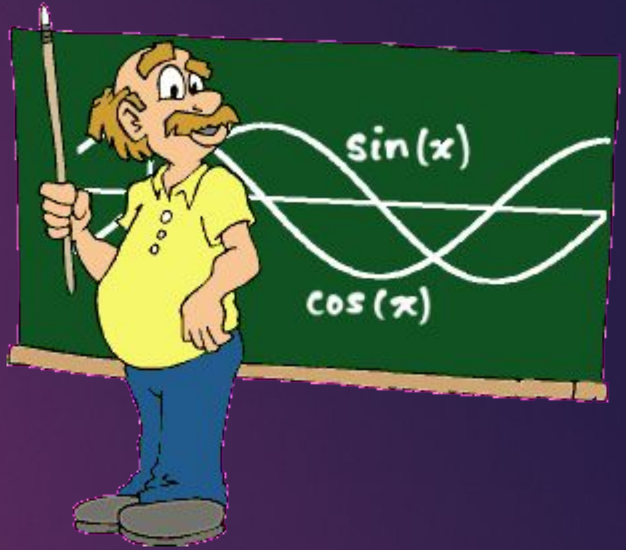
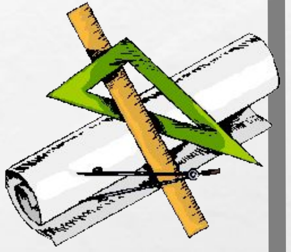
МБОУ «СОШ им. Героя Советского Союза А. М. Селютина с. Михайловское»

Методы и приемы решений тригонометрических уравнений



Учитель математики: Бекмурзова С. Т.

10 класс



СОДЕРЖАНИЕ.

ЦЕЛЬ:

- Повторить решение тригонометрических

  уравнений.

1. Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.
2. Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений.
3. Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.

- Выделение основных проблем при решении

  этих уравнений:

Потеря корней.

Посторонние корни.

Отбор корней.

Тригономе́трия (от греч. τρίγονο (треугольник) и греч. μετρειν (измерять),

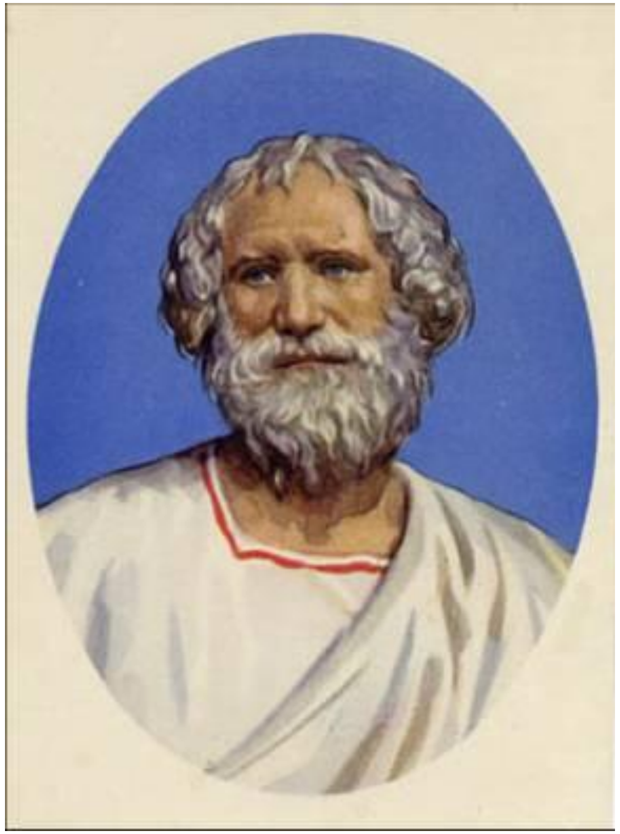
то есть измерение треугольников) — раздел математики,

в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии.

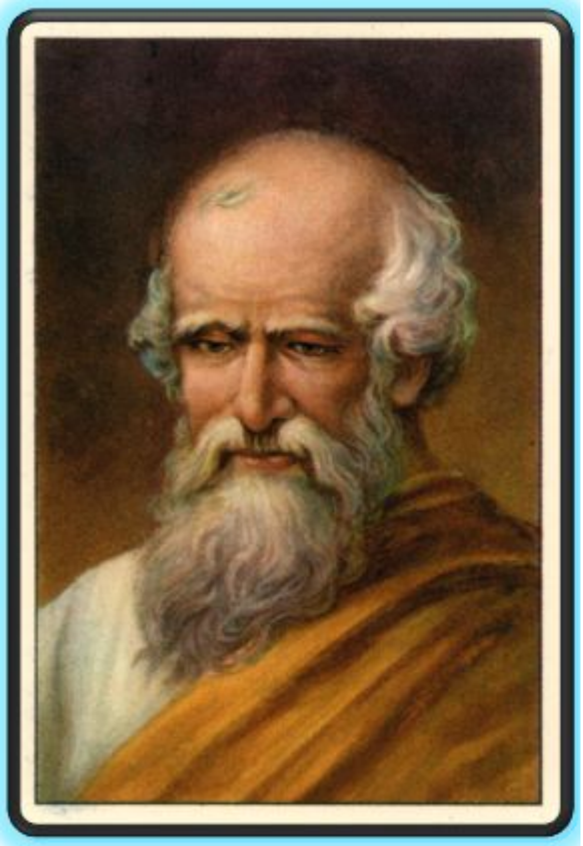
Данный термин впервые появился в *1595* г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса *(Bartholomäus Pitiscus, 1561—1613)*,

а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, геодезии и архитектуре.

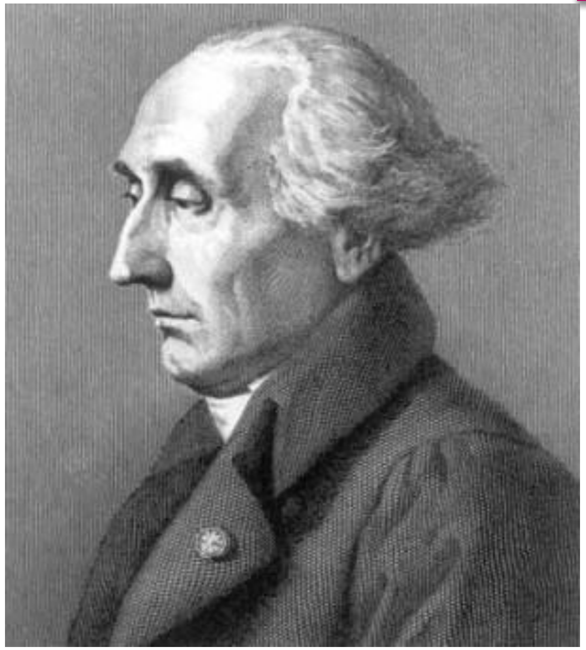
Развитие тригонометрии началось с этих великих ученых!



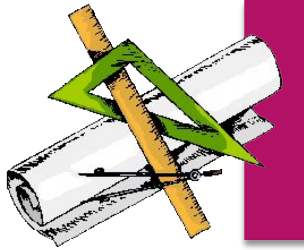
Фал
ес



Архиме
д



Жозеф
Луи
Лагранж

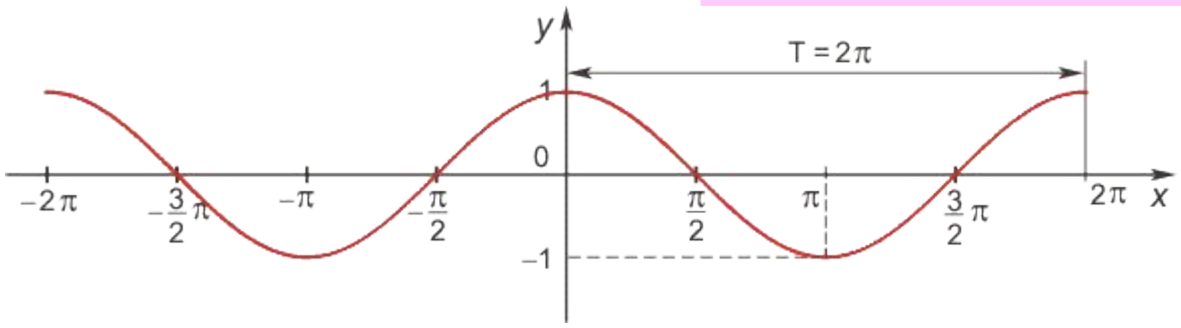


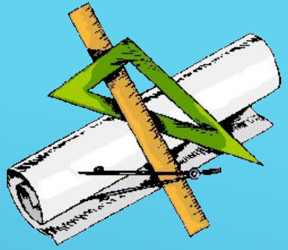
В $XVIII$ веке Леонард Эйлер дал современные, более общие определения, расширив область определени... на всю числ...

$$\alpha - угол\_поворота$$

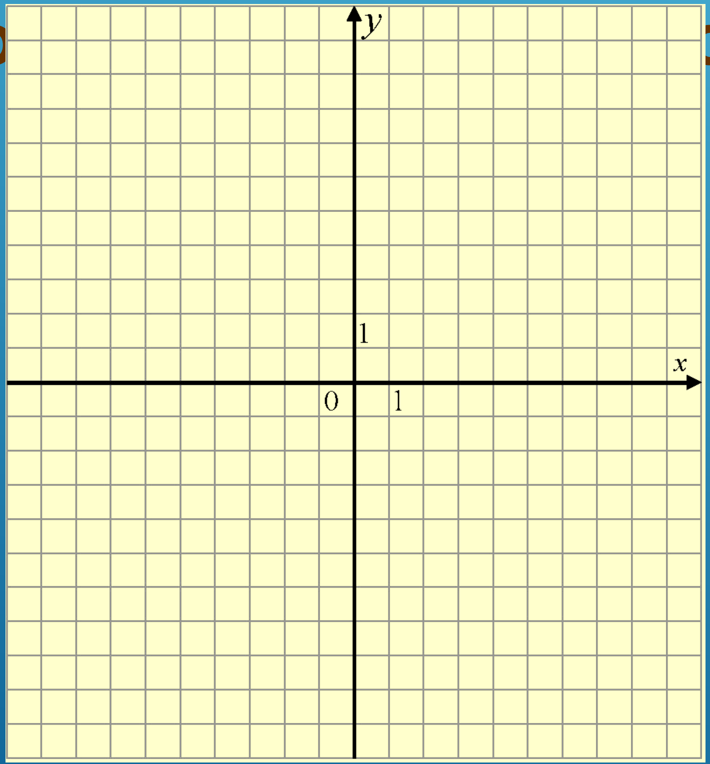
$$-\infty < \alpha < +\infty$$

$$\alpha \in R$$

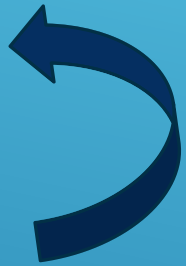




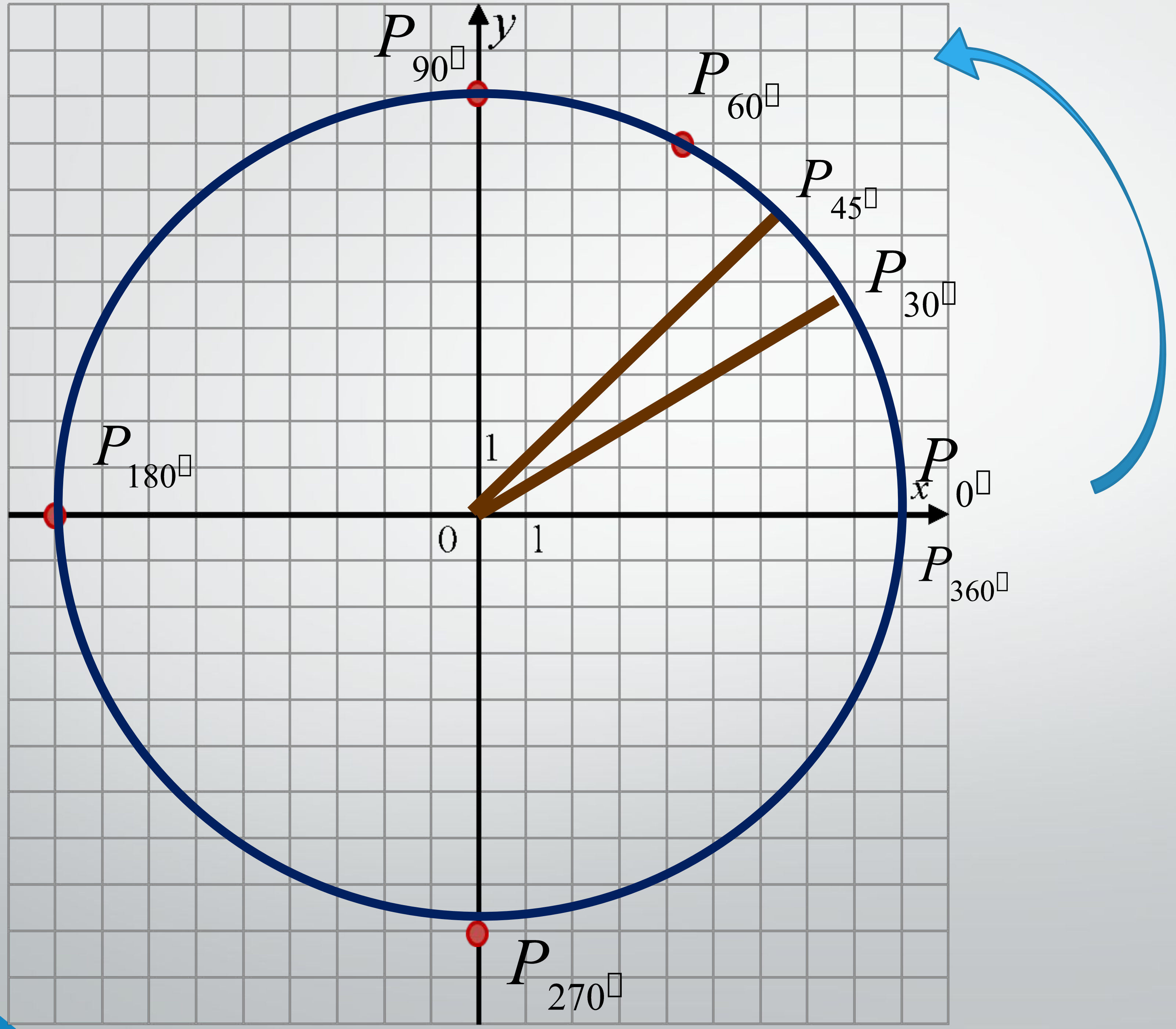
Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенной сторо… …стью обозначим Р.



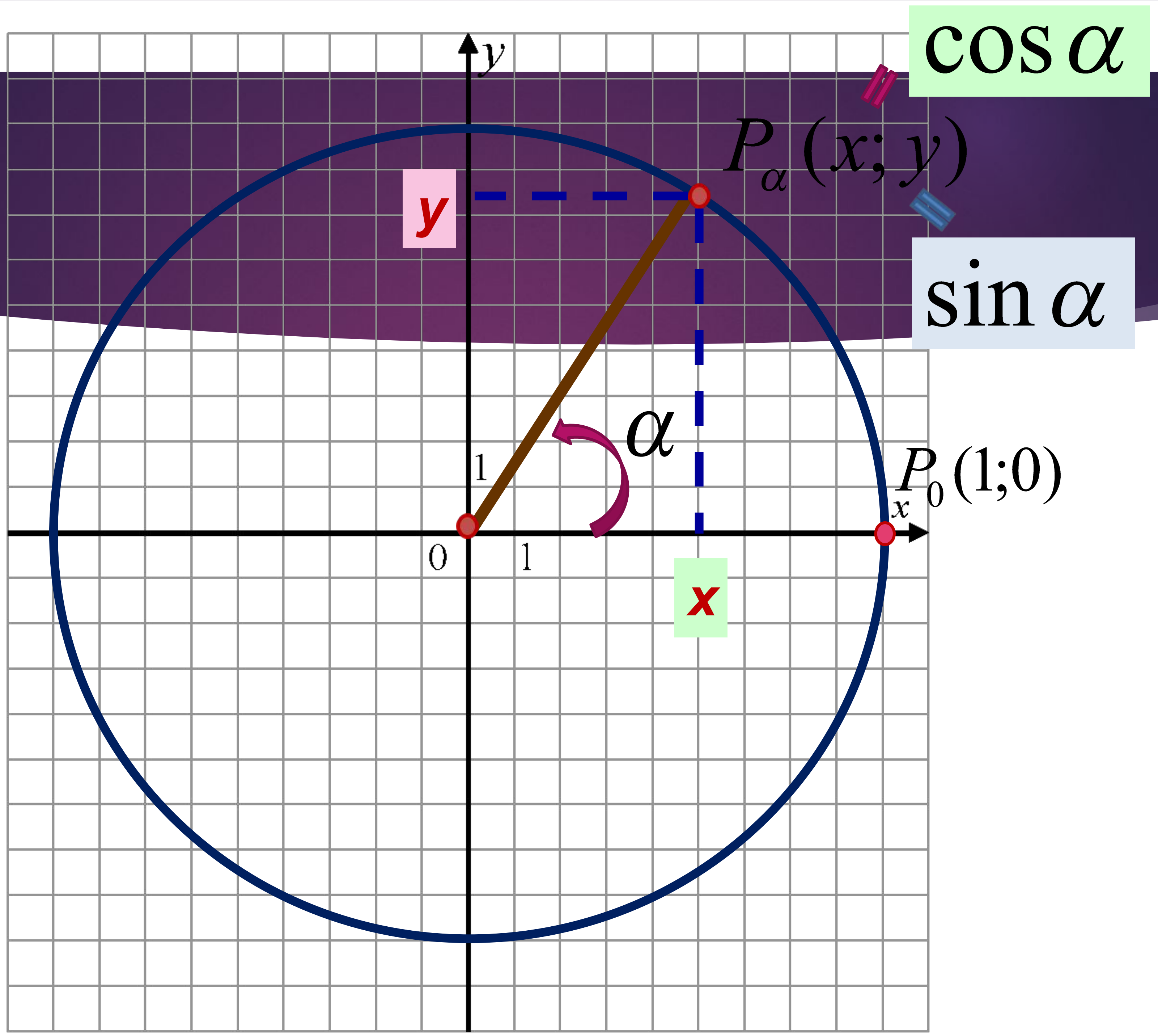
$\alpha > 0$



$\alpha < 0$

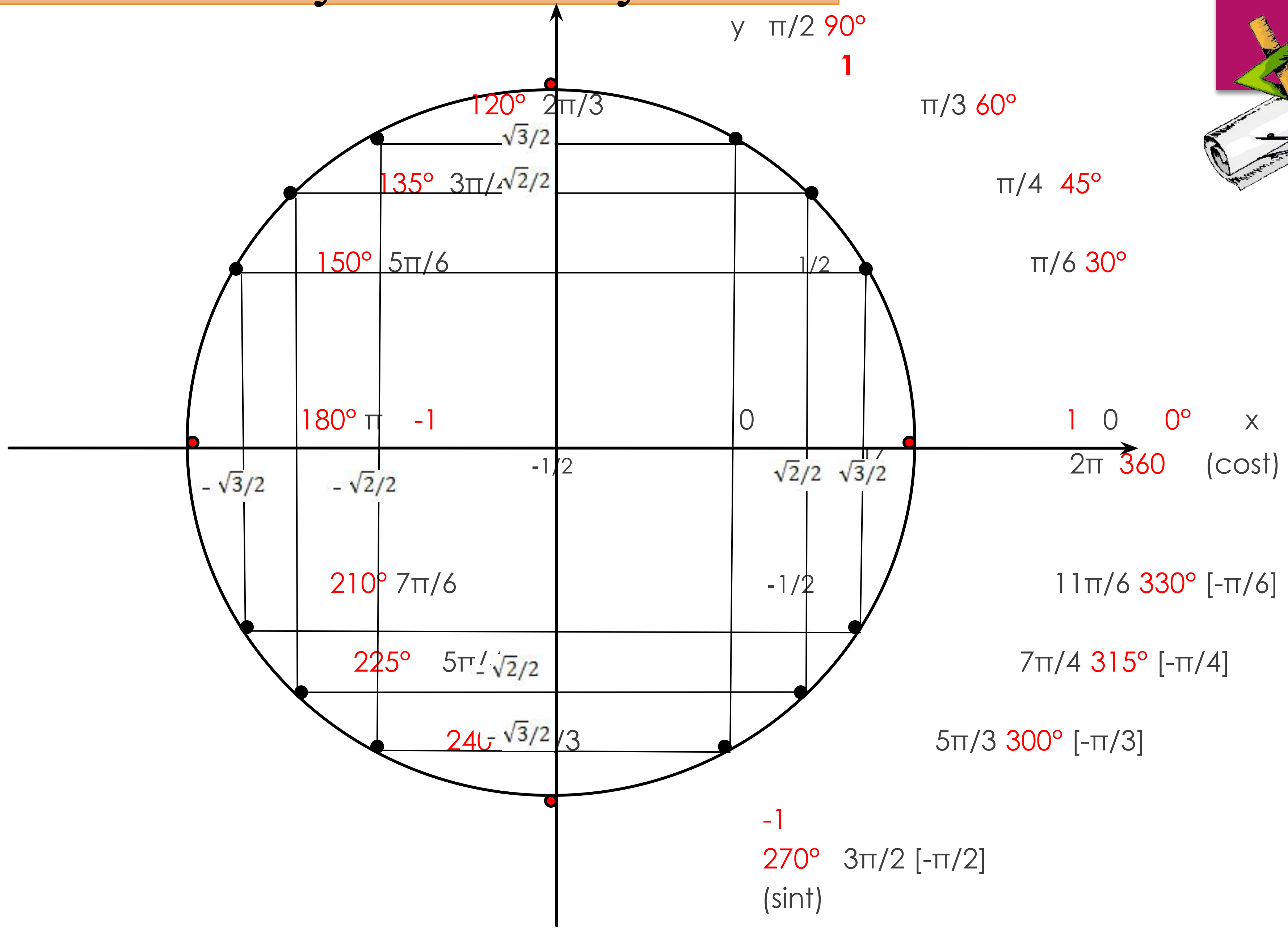


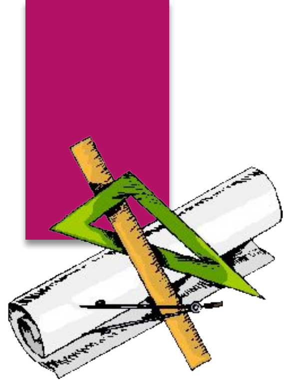
P_{90°
y
P_{60°
P_{45°
P_{30°
P_{180°
1
P_{0°
x
0
1
P_{360°
P_{270°



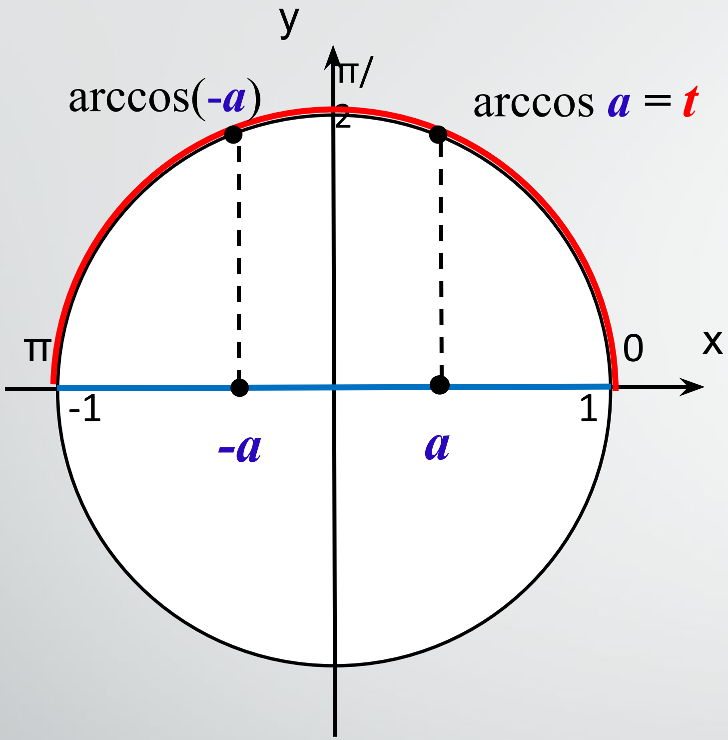
$\cos\alpha$
=
$P_\alpha(x;y)$
=
$\sin\alpha$
y
x
α
$P_0(1;0)$
y
x
0
1
1

Повторим значения синуса и косинуса





Арккосинус



Арккосинусом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из $[0;\pi]$, что **cos *t* = *a*.**

Причём, $|a| \le$ **1**.

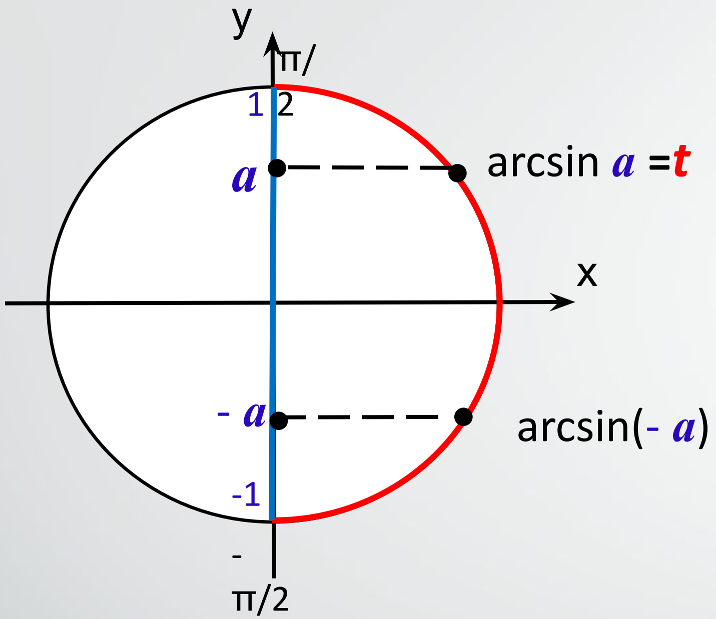
$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Примеры:

1) $\arccos(-1) = \pi$

2) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Арксинус



Арксинусом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из **[-π/2;π/2]**, что ***sin t* = *a*.**
Причём, | ***a*** |≤ **1**.

arcsin(- *a*)= - arcsin *a*

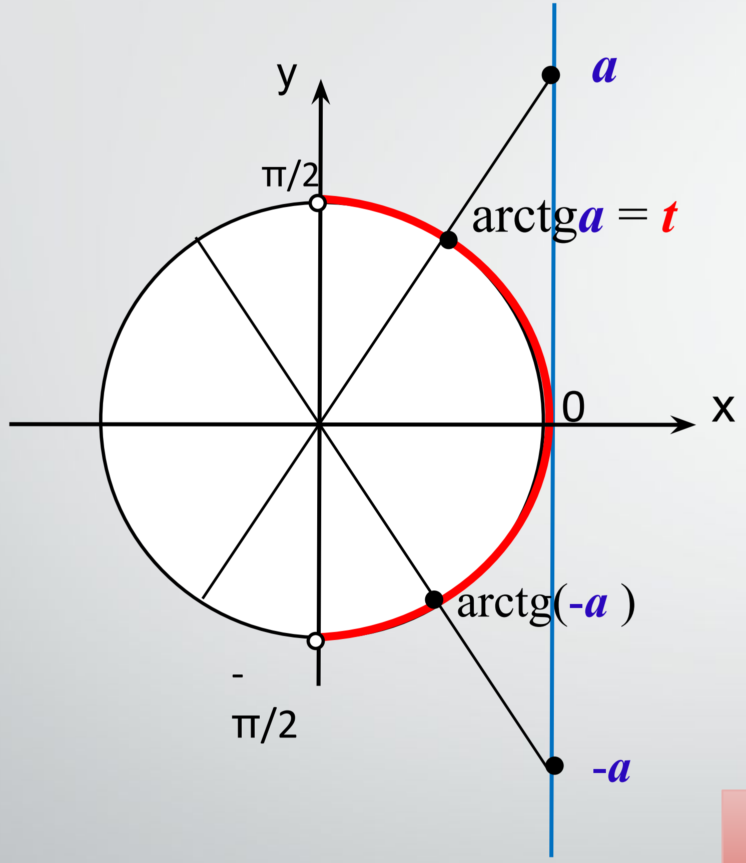
Примеры:

$1)\ arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$2)arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$3)arcsin0 = 0$

Арктангенс



Арктангенсом числа a называется такое число (угол) t из (-π/2;π/2), что **$tg\ t = a$.**
Причём, a **Є R.**

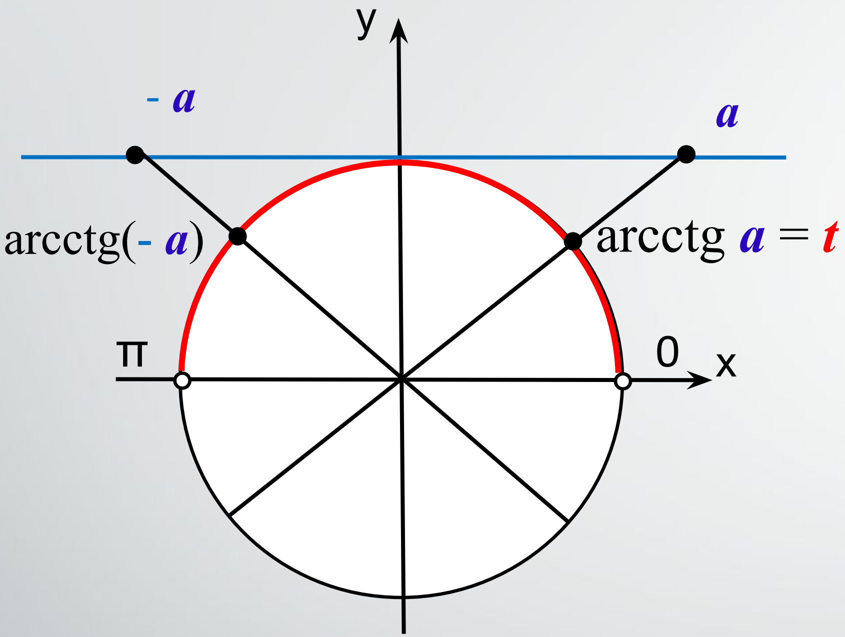
arctg(-a) = - arctg a

Примеры:

1) arctg√3/3 = π/6

2) arctg(-1) = -π/4

Арккотангенс



Арккотангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из $(0;\pi)$, что ctg ***t*** = ***a***.
Причём, ***a*** $\in R$.

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$

Примеры:

1) $\mathrm{arcctg}(-1) =$ $3\pi/4$

2) $\mathrm{arcctg}\sqrt{3} =$ $\pi/6$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

1.cost = *a* , где $|a| \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = \pm\arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) cost=0

$t = \pi/2+\pi k,\ k \in Z$

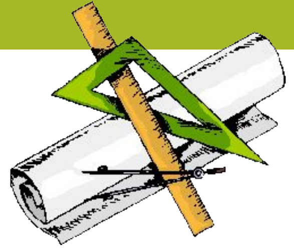
2) cost=1

$t = 2\pi k,\ k \in Z$

3) cost = -1

$t = \pi+2\pi k,\ k \in Z$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений



2. $\sin t = a$, *где* $|a| \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$\boxed{t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z}$$

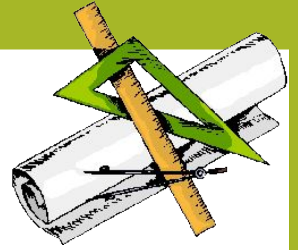
Частные случаи

1) <u>sint=0</u>
$t = \pi k$, $k \in Z$

2) <u>sint=1</u>
$t = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$

3) <u>sint = - 1</u>
$t = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений



3. $\mathbf{tg}\,\mathbf{t} = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$

$t = \mathrm{arctg}\ \boldsymbol{a} + \pi k,\ k \in Z$

4. $\mathbf{ctg}\,\mathbf{t} = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$

$t = \mathrm{arcctg}\ \boldsymbol{a} + \pi k,\ k \in Z$

При каких значениях X имеет смысл выражение:

1. $\arcsin(2x+1)$

1) $-1 \le \mathbf{2x+1} \le 1$

$-2 \le \mathbf{2x} \le 0$

$-1 \le \mathbf{x} \le 0$

Ответ: $[-1;0]$

2. $\arccos(5-2x)$

2) $-1 \le \mathbf{5-2x} \le 1$

$-6 \le \mathbf{-2x} \le -4$

$2 \le \mathbf{x} \le 3$

Ответ: $[2;3]$

3. $\arccos(x^2-1)$

$-1 \le \mathbf{x^2-1} \le 1$

$0 \le \mathbf{x^2} \le 2$

Ответ:

$$\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

4. $\arcsin(4x^2-3x)$

$-1 \le 4x^2-3x \le 1$

$$\begin{cases} 4x^2-3x \ge -1 \\ 4x^2-3x \le 1 \end{cases}$$

$4x^2-3x-1 \le 0$

Ответ:

$$\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

a·sin²x + b·sinx + c=0

Пусть sinx = p, где |p| ≤1, тогда a·p² + b·p + c = 0

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6) - 3\sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6) - 3\cos(x+\pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6) = 1$, 2). $\cos(x+\pi/6) = 1/2$,

$x + \pi/6 = 2\pi k$, $x + \pi/6 = \pm\arccos(1/2) + 2\pi n$,

$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k$; $x_2 = \pm\pi/3 - \pi/6 + 2\pi n$.

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.Однородные

1)Первой степени:

*Решаются **делением на cos x (или sinx)** и методом введения новой переменной.*

$$\mathbf{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0}$$

Т.к. sinx и cosx одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на cosx (или на **sinx**). Получим: простое уравнение

$$a \cdot \mathrm{tg}x + b = 0 \text{ или } \mathrm{tg}x = m$$

Пример. Решите уравнение sinx + 2cosx = 0.

Решение: Разделим обе части уравнения на cosx.

Получим
$$\frac{\sin x}{\cos x} + 2\frac{\cos x}{\cos x} = 0$$
$$tgx + 2 = 0$$
$$tgx = -2$$
$$x = -arctg2 + \pi k,\ k \in Z$$

Ответ: $-arctg2 + \pi k,\ k \in Z$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2) Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$\mathbf{a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0}$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a\cdot \mathrm{tg}^2 x + b\cdot \mathrm{tg} x + c = 0.$$

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$\mathrm{tg}^2 x + 4\,\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

1) $\mathrm{tg}\, x = -1$, 2) $\mathrm{tg}\, x = -3$,

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -arctg3 + \pi n,\ n \in Z$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3. Уравнение вида:

$A\sin x + B\cos x = C.$ $\quad A, B, C \neq 0$

$1.\ \sin 2x = \sin x$

$2\sin x\cos x - \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ или $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$x = \pi k, k \in Z.$ $\quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k.$

$2.\ 3\sin x = 2\cos^2 x$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\sin x = t$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \dfrac{1}{2}$ $\quad t = -2$

$\sin x = \dfrac{1}{2}$ $\quad \sin x = -2$

$x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$ Нет решения.

$\sin x + \cos x = 1$.

Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:

$\sin x + \cos x - 1 = 0$,

$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$

$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$

$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$

1). $\sin(x/2) = 0,$ $\quad$ 2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$

$x/2 = \pi k,$ $\quad \tan(x/2) = 1,$

$x_1 = 2\pi k;$ $\quad x/2 = \arctan 1 + \pi n,$

$x/2 = \pi/4 + \pi n,$

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$

ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$A\sin x + B\cos x = C$$

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$$

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6tg\frac{x}{2} + 4 - 4tg^2\frac{x}{2} - 5 - 5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1+tg^2\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уровнения.

Проверка

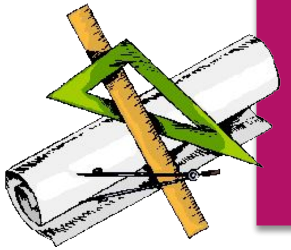
Если $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$,

$$3\sin(\pi + 2\pi n) + 4\cos(\pi + 2\pi n) = 5, x \in Z$$

$0 + 4(-1) = 5$ - не верно, значит $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, не является корнями исходного уравнения

Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Формулы.



Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \mathrm{tg}x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$;
Проверка обязательна!

Понижение степени.

$\cos^2 x$ *= (1 + cos2x) : 2*

$\sin^2 x$ *= (1 – cos 2x) : 2*

Метод вспомогательного аргумента.

a cosx +b sinx заменим на C sin(x+ϕ), где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$;

sinϕ = $\frac{a}{C}$; cosϕ = $\frac{b}{C}$; ϕ - вспомогательный аргумент.

Решение простейших уравнен

1) $tg2x = -1$

$2x = arctg(-1) + \pi k,\ k \in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$.

2) **$\cos(x+\pi/3) = ½$**

$x+\pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

3) **$\sin(\pi – x/3) = 0$**

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

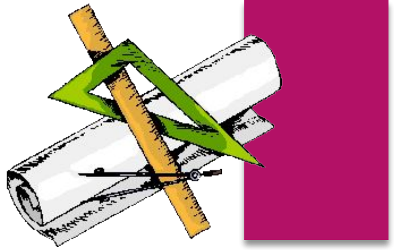
частный случай

$x/3 = \pi k,\ k \in Z$

$x = 3\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $3\pi k,\ k \in Z$.

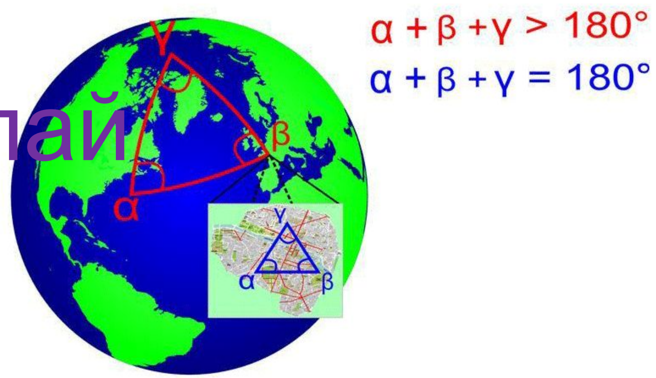
Эти правила помогут при решении!

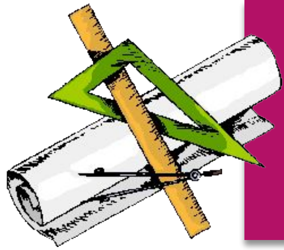


- Увидел квадрат – понижай степень.

- Увидел произведение – делай сумму.

- Увидел сумму – делай произведение.





Потеря корней, лишние корни.

1.Потеря корней:

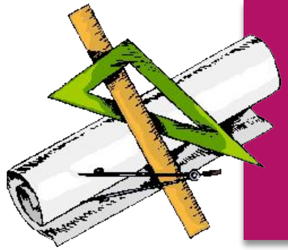
- делим на g(x).
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на g(x) (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.



Спасибо за внимание!