Производная

Учитель первой категории
МБОУ СШ с. Ильино
И.В. Борцова

«Считай несчастным тот день или тот час, в который ты не усвоил ничего нового и ничего не прибавил к своему образованию»

Я. А. Коменский

Необходимо

ЗНАТЬ

правила вычисления производных;
производные основных элементарных функций;
геометрический и физический смысл производной;
уравнение касательной к графику функции;
применение производной к исследованию функций и построению графиков.

УМЕТЬ

выполнять действия с функциями (описывать по графику поведение и свойства функции, находить её наибольшее и наименьшее значения).

Найдите производную:

1. y = 4x2 + 5x + 8.

2. Вычислить производную y = (2x – 1)3 и найти ее значение в точке x0 = 2.

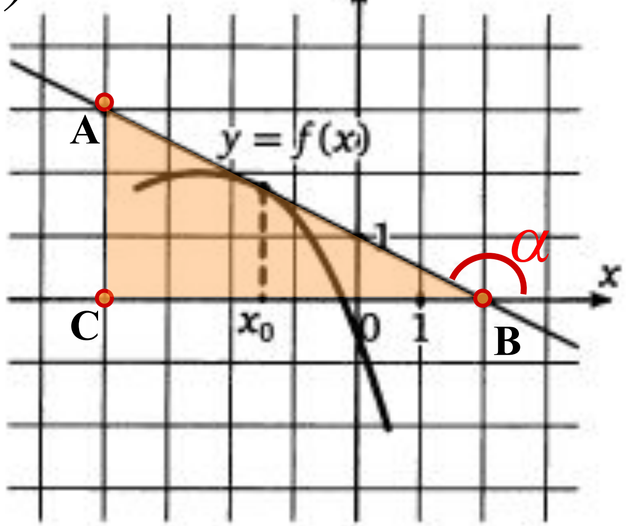
$$y = \frac{2\cos x - 3x}{3x+1}.$$

Таблица производных

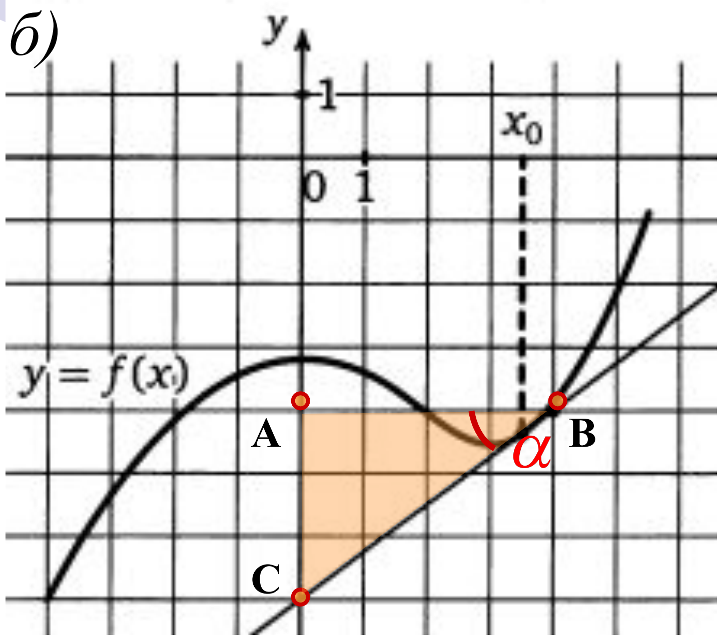
f ' (x)	формулы
C'	0
(x)'	1
$(x^a)'$	ax^{a-1} при $a \neq 1$
sin'x	$\cos x$
cos'x	$-\sin x$
tg'x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctg'x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)'$	e^x
$(a^x)'$	$a^x \ln a$
ln'x	$\frac{1}{x}$
$\log_a{}'x$	$\frac{1}{x \ln a}$
(f+g)'	$f' + g'$
(f·g)'	$f'g + fg'$
(cf)'	cf'
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{(f'g - fg')}{g^2}$
	$kf'(kx+b)$
(f(kx+b)) '	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

На рисунке изображен график функции *y = f (x)*, и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *y = f (x)* в точке x_0.

а)



б)



Решение.

$$f'(x_0) = k = tg\alpha,$$

$$tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{AC}{BC} = -\frac{3}{6} = -0,5.$$

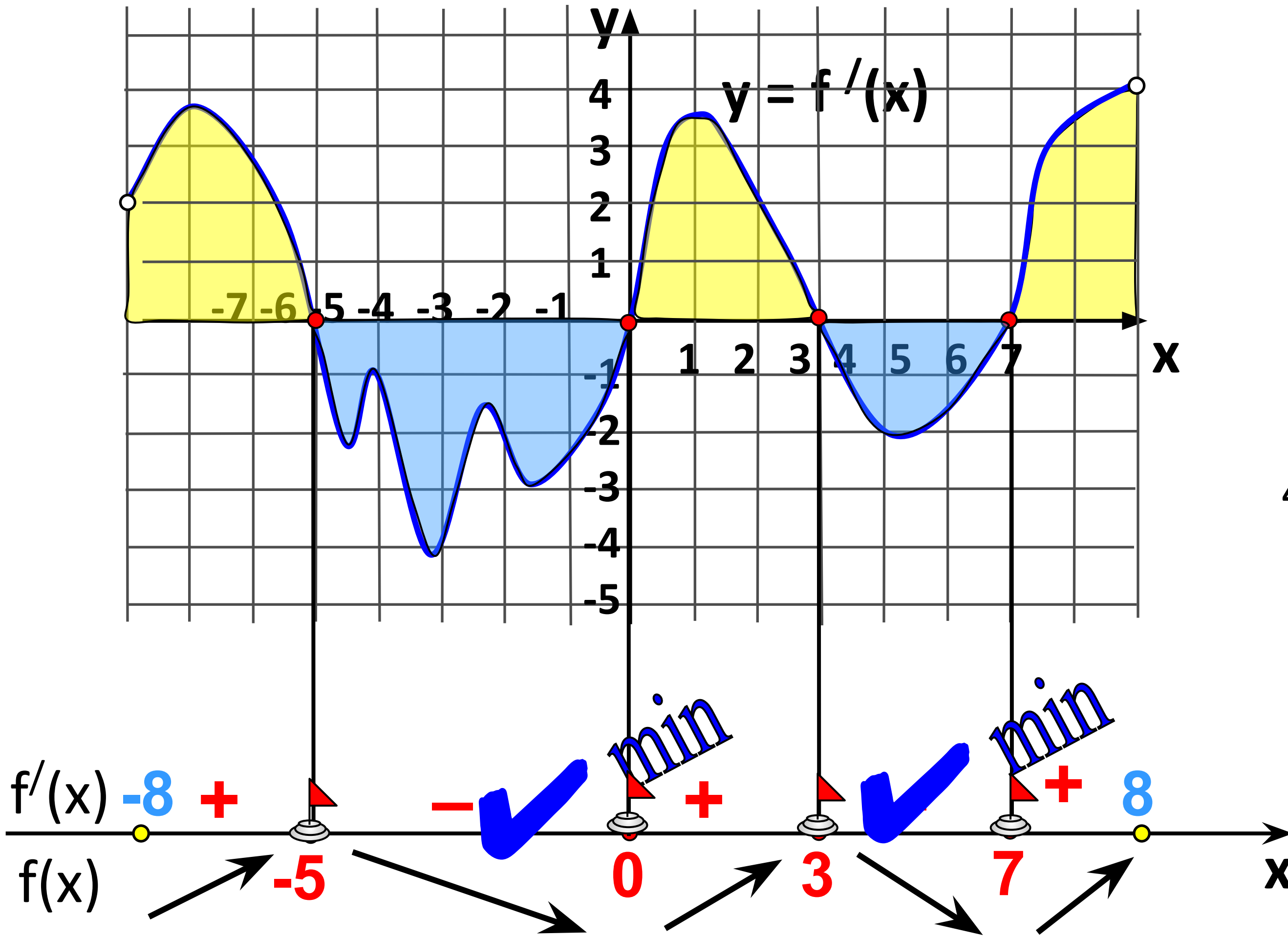
Ответ: - 0,5 .

$$f'(x_0) = k = tg\alpha,$$

$$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

Исследуйте функцию y =f (x) на экстремум и укажите количество ее точек минимума.

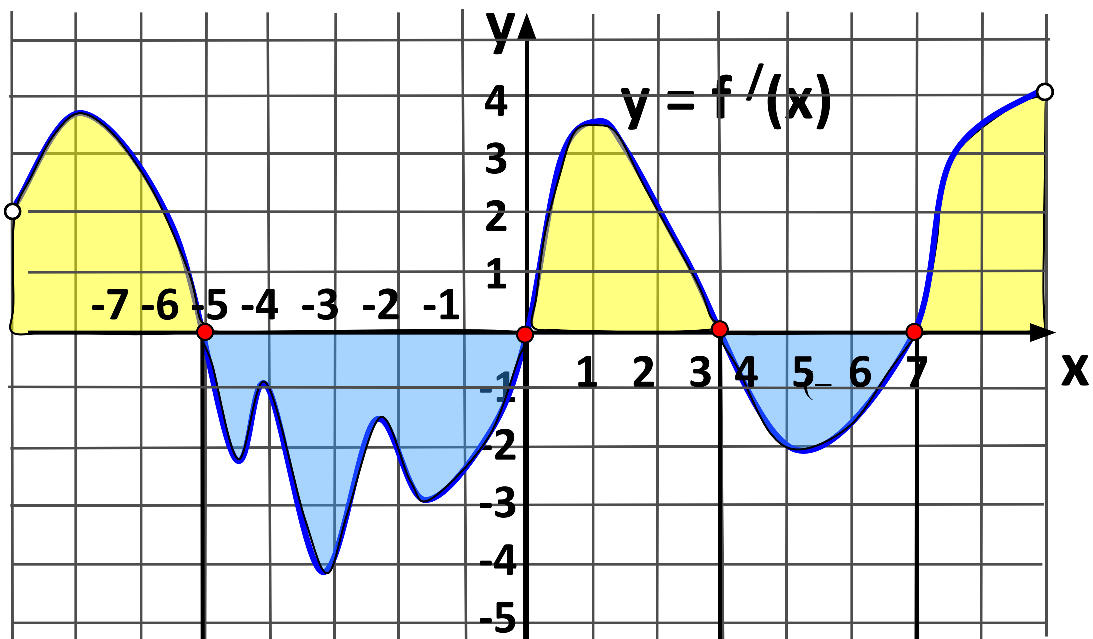


4 точки экстремума,

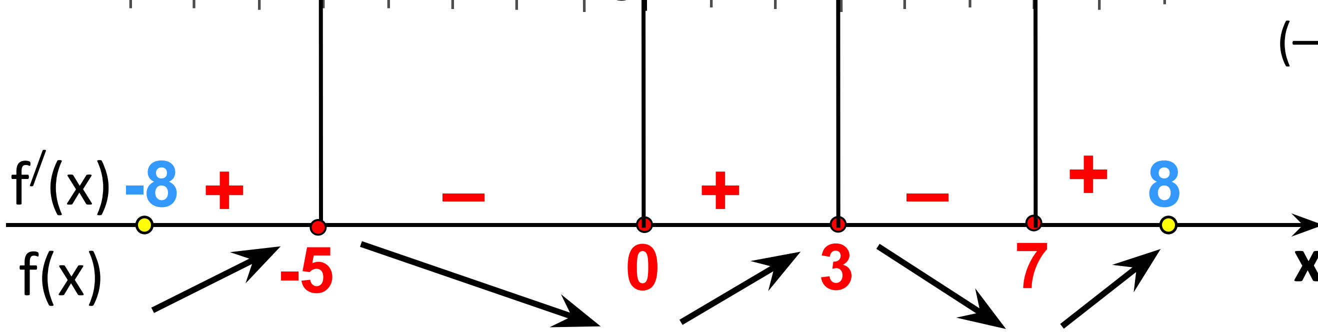
Ответ:
2 точки минимума

Пример

Найдите промежутки возрастания функции y =f (x).



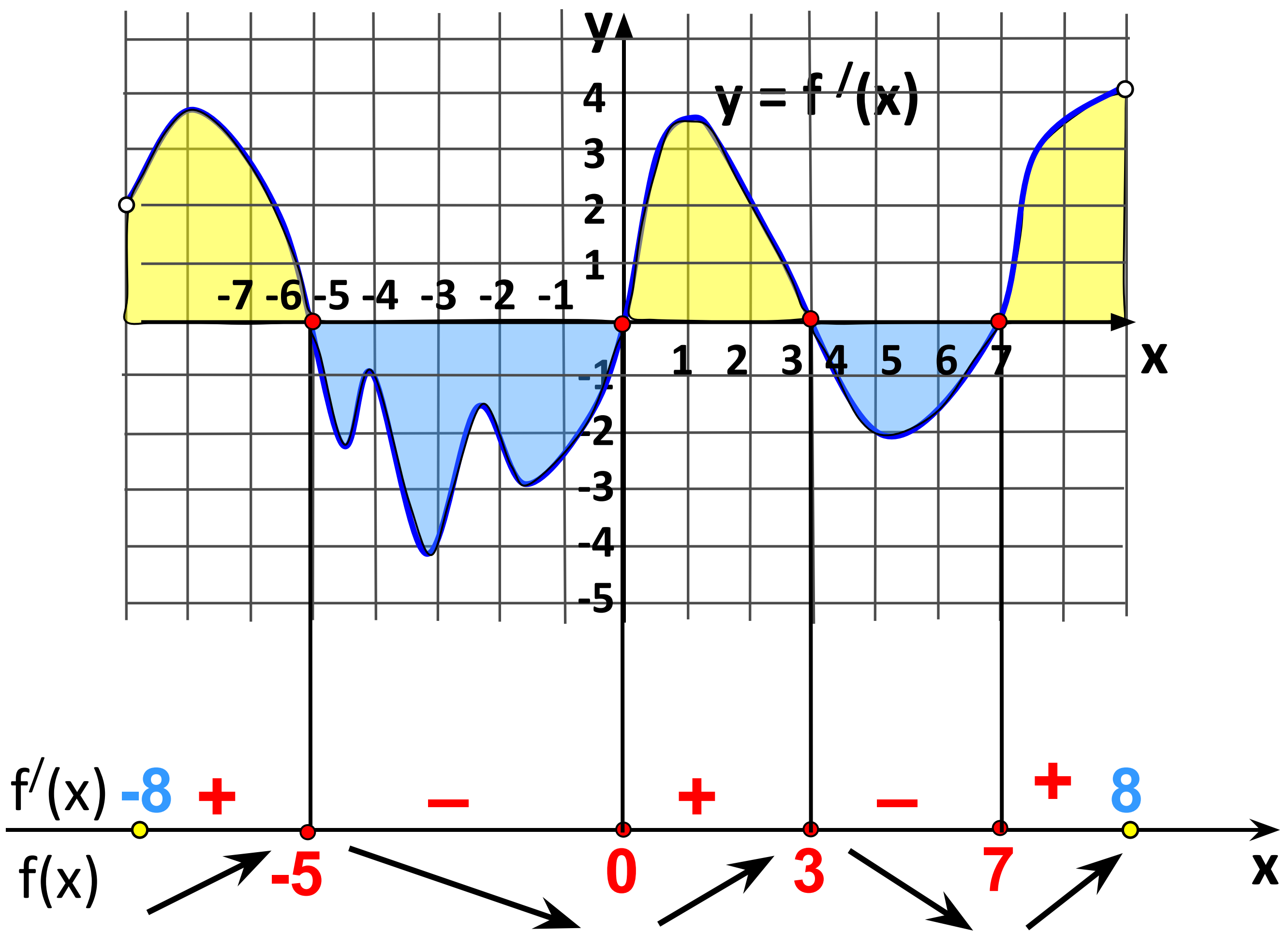
В точках –5, 0, 3 и 7 функция непрерывна, поэтому при записи промежутков возрастания эти точки включаем.



Ответ:
(–8; –5], [0; 3], [7; 8)

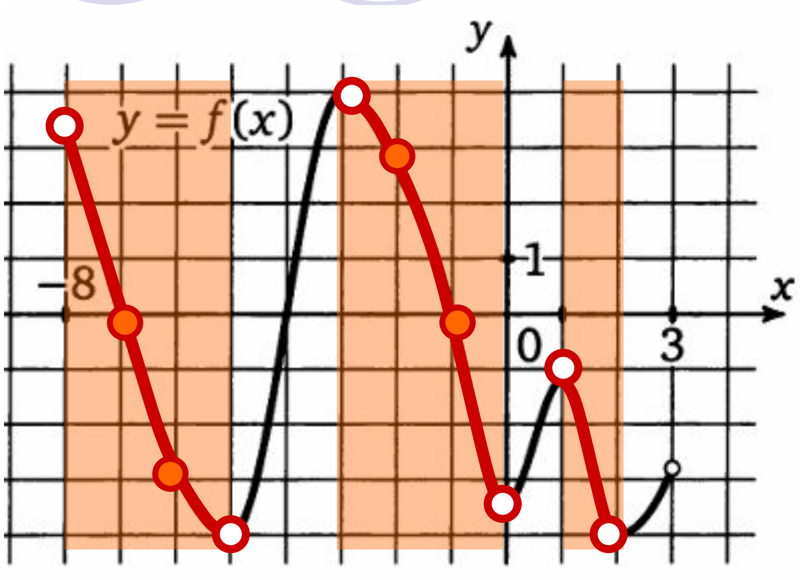
Пример

Найдите промежутки убывания функции y =f (x). В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 5.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-8; 3). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение.

$f'(x) < 0$, если $f(x)$ убывает.

Целые решения:

x=-7; x=-6; x=-2; x=-1.

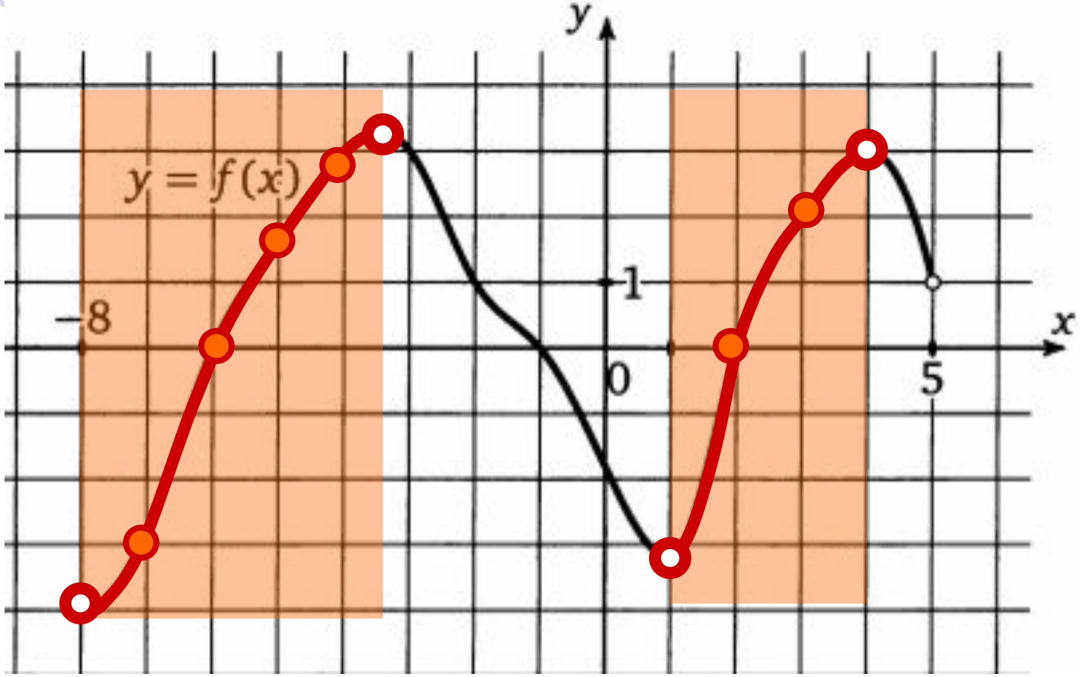
Их количество равно 4.

Ответ: 4.

Теоретические сведения.

Решим эту задачу, воспользовавшись следующим утверждением. Производная непрерывно дифференцируемой функции на промежутке убывания (возрастания) не положительна (не отрицательна). Значит необходимо выделить промежутки убывания функции и сосчитать количество целых чисел, принадлежащих этим промежуткам. Причем производная равна нулю на концах этих промежутков, значит, нужно брать только внутренние точки промежутков.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (—8; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Решение.

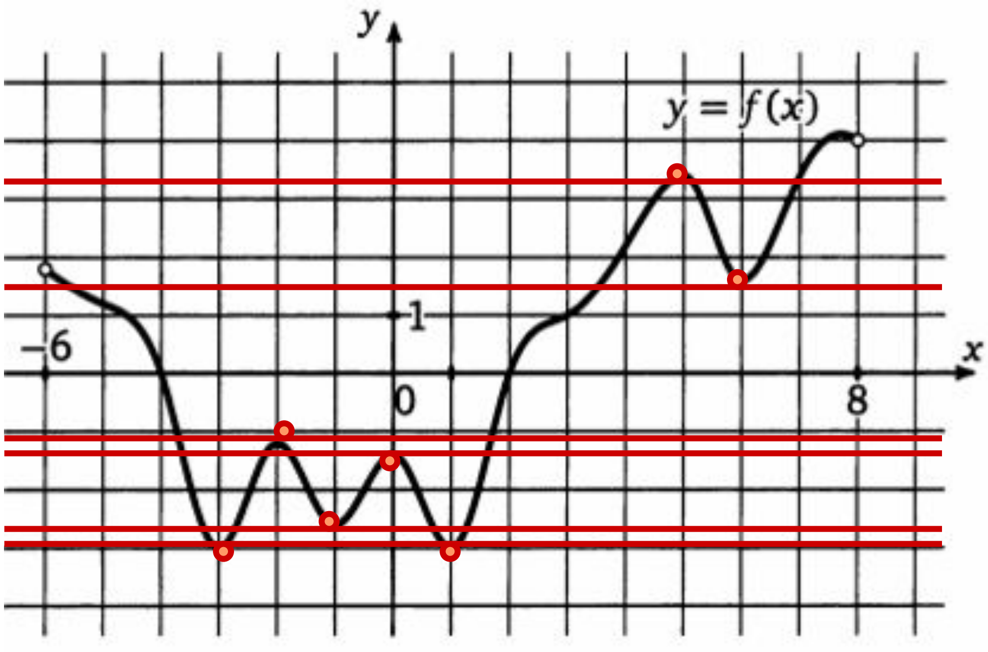
$f'(x) > 0$, если $f(x)$ возрастает.

Целые решения при : *x=-7; x=-6; x=-5; x=-4; x=2; x=3.*

Их количество равно 6.

Ответ: 6.

На рисунке изображен график функции *y = f (x)*, определенной на интервале (-6; 8). Найдите количество точек, в которых производная функции *y = f (x)* равна 0.



Решение.

$$f'(x_0) = 0,$$

если касательная, проведенная в эту точку имеет вид y = const.

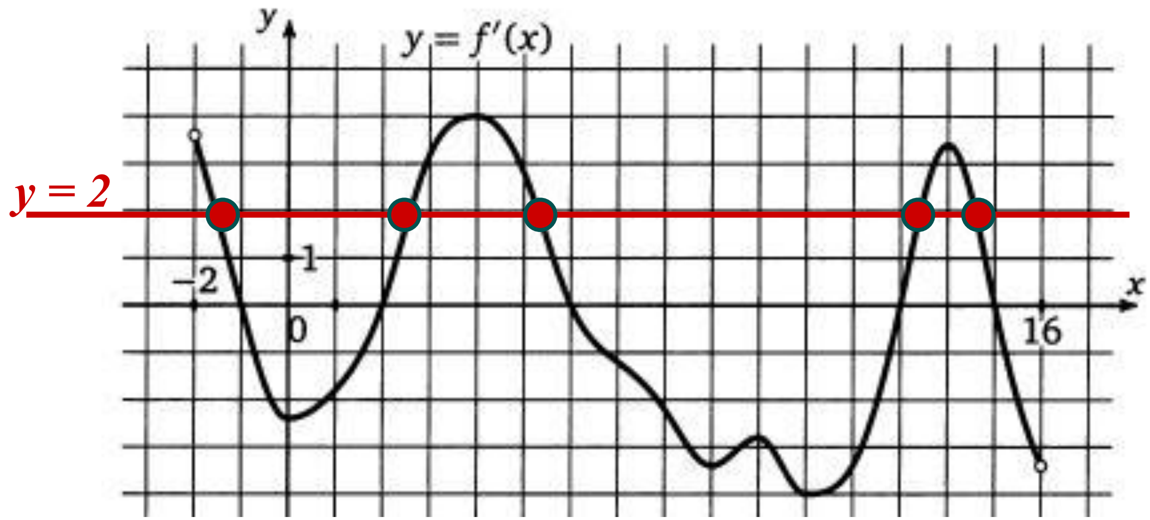
Считаем количество точек пересечения графика функции с касательной.

Ответ: 7.

Теоретические сведения.

Производная функции в точке x_0 равна 0 тогда и только тогда, когда касательная к графику функции, проведенная в точке с абсциссой x_0, горизонтальна. Отсюда следует простой способ решения задачи — приложить линейку или край листа бумаги к рисунку сверху горизонтально и, двигая «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной.

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (-11; 3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой *y* = 2*x* -5 или совпадает с ней.



Решение.

Если касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой *y* = 2*x*-5 или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент равен 2, а значит нам нужно найти количество точек, в которых производная функции *f(x)* равна 2.

Для этого на графике производной проведем горизонтальную черту, соответствующую значению *y* = 2, и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. В нашем случае таких точек 5.

Ответ: 5 .

1) На рисунке изображен *график функции* $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

Подумай!

0,5

Подумай!

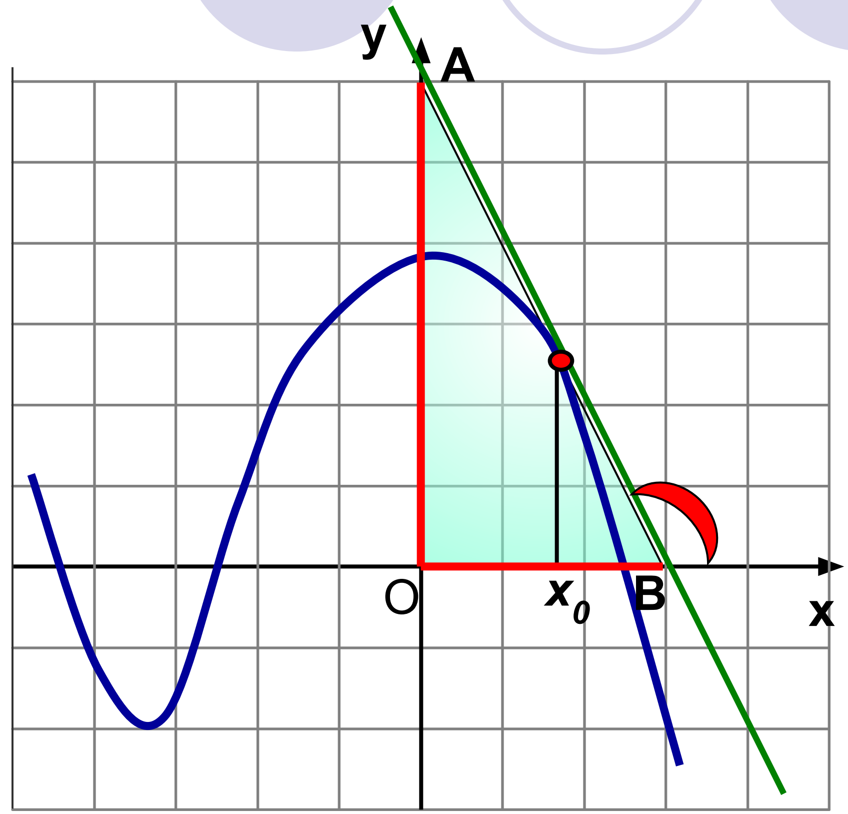
-0,5

Верно!

-2

Подумай!

2



Проверка

Геометрический смысл производной: $k = \operatorname{tg} \alpha$
Угол наклона касательной к оси Ох тупой, значит $k < o$.
Из прямоугольного треугольника
находим $\operatorname{tg}\alpha = 6 : 3 = 2$. Значит, $k = -2$

2) Непрерывная функция y = f(x) задана на интервале (-6; 7). На рисунке *изображен ее график.* Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 6.

Верно!

3

5

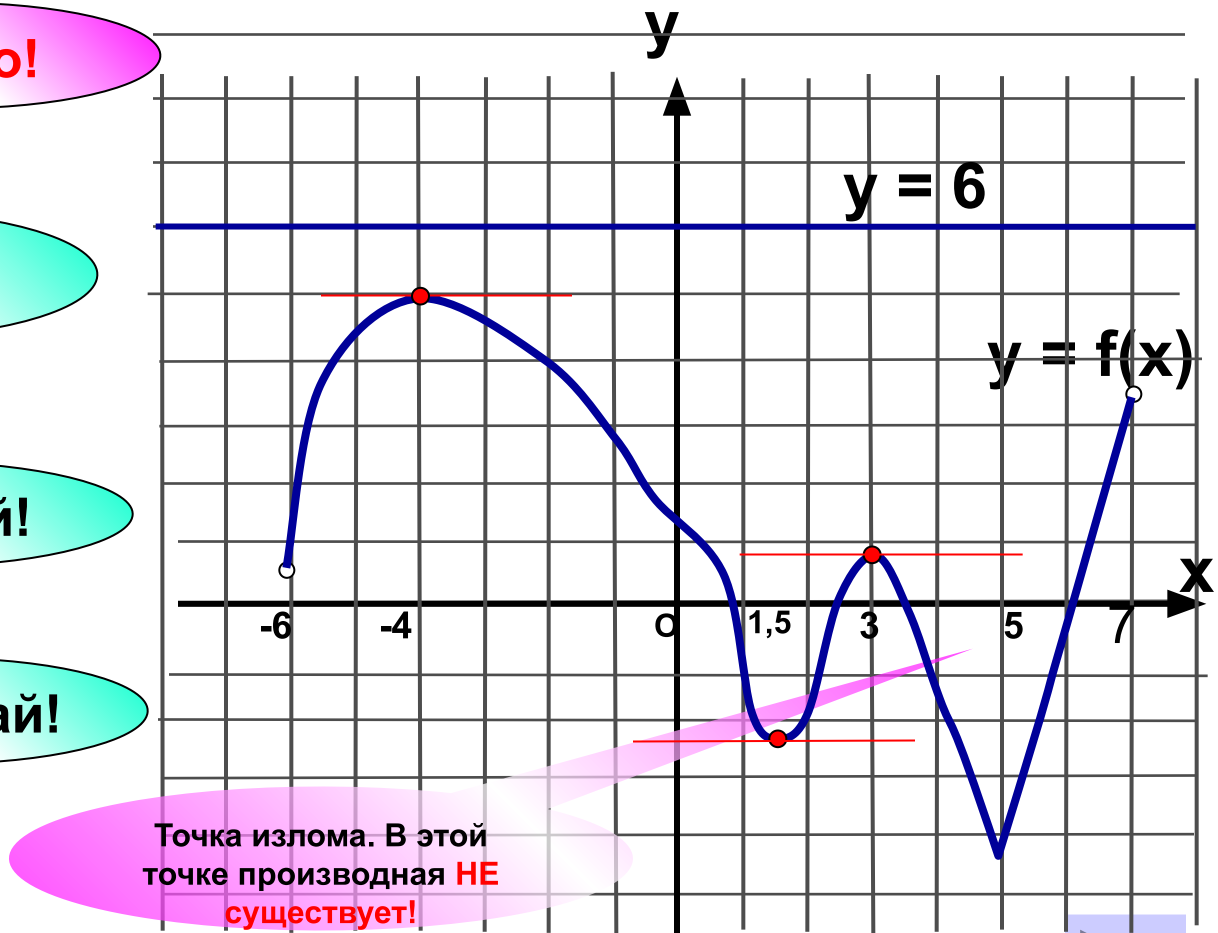
8

11

Подумай!

Подумай!

Подумай!



Проверка

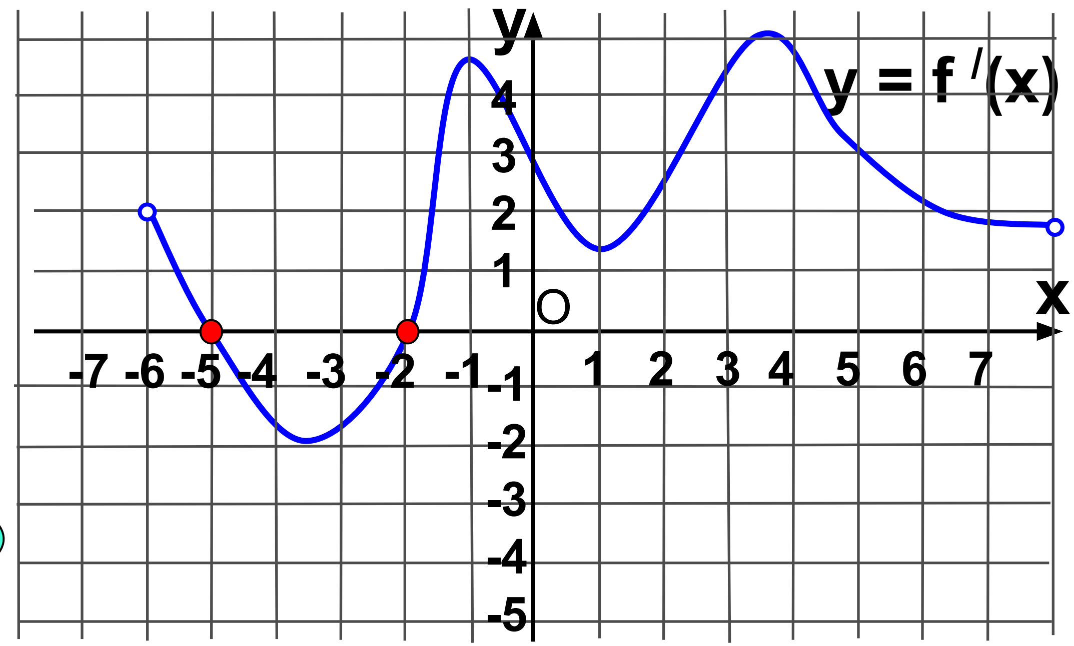
3)На рисунке изображен график ***производной*** функции $y = f'(x)$, заданной на промежутке (- 6; 8). Исследуйте функцию $y = f(x)$ на экстремум и укажите к***оличество ее точек экстремума***.

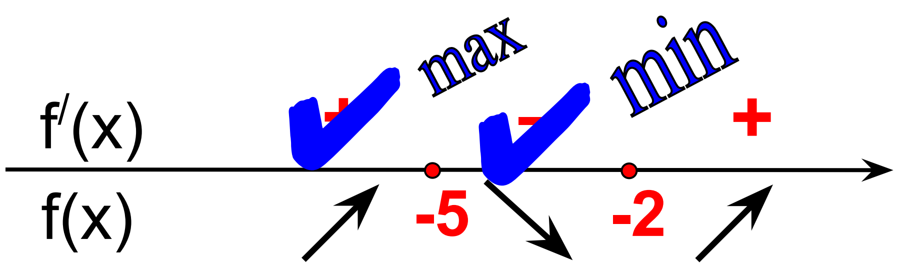
5 — Не верно!

2 — Верно!

1 — Не верно!

4 — Не верно!





Проверка (2)

4) На рисунке изображен ***<u>график функции</u>*** у =f(x), заданной на промежутке [-5;5]. Укажите ***<u>точку минимума функции.</u>***

Точка перегиба!

-1

Подумай!

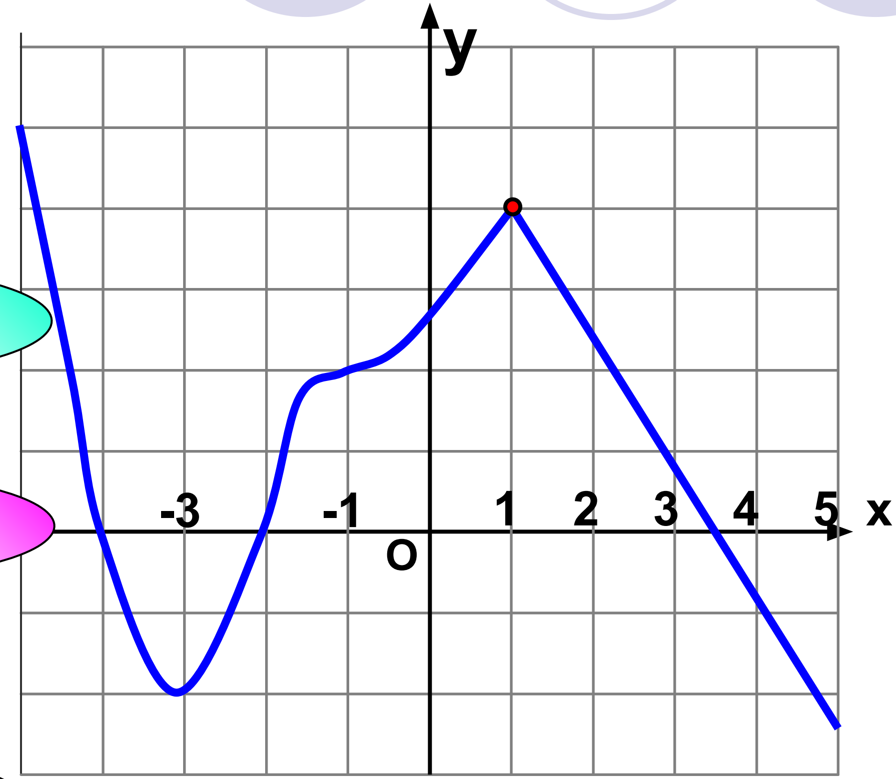
4

Верно!

1

Точка минимума!

-3



5) На рисунке изображен график <u>производной функции</u>. Найдите <u>длину промежутка возрастания</u> этой функции.

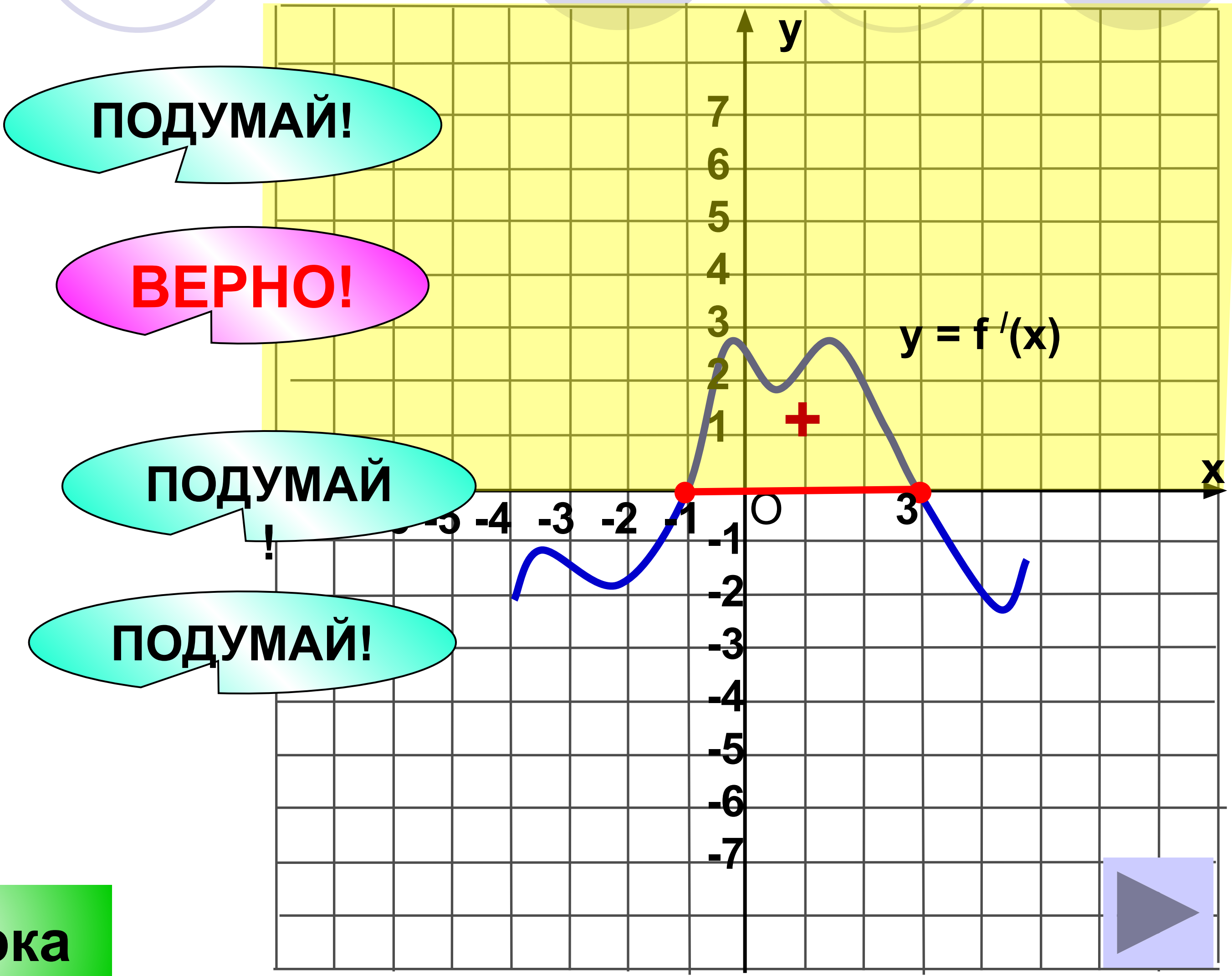
2

4

3

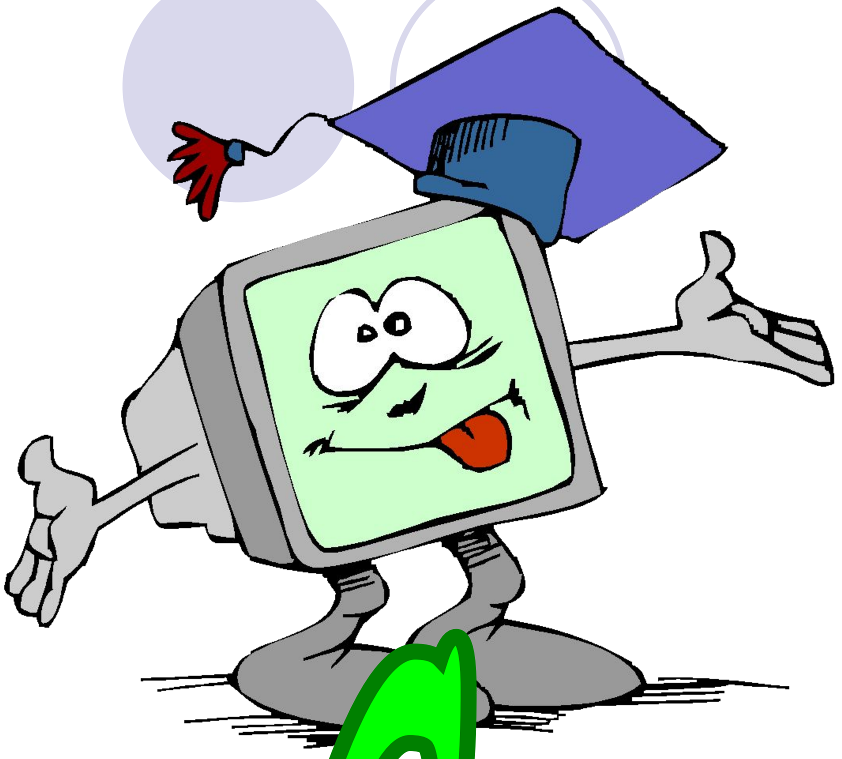
5

Проверка



« То, что мы знаем, - ограниченно, а то чего мы не знаем, - бесконечно».

Пьер Лаплас:



Спасибо!