Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «средняя общеобразовательная школа №12 с углубленным изучением отдельных предметов»

Свойства и графики элементарных функций

методическое пособие по алгебре для учащихся 9 класса

г. Старый Оскол

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

Свойства и графики элементарных функций

- Рассмотрим **первое свойство** функции – точка пересечения графика функции с осями координат:

❖ Точка пересечения с осью Оу равна значению функции у(х) при х = 0.

❖ Точки пересечения с осью Ох являются корнями уравнения у (х) = 0 и называются нулями функции.

❖ **Второе свойство** – ограниченность функции.

❖ **Третье свойство** – монотонность (т.е. возрастание или убывание функции).

Свойства и графики элементарных функций

И наконец, рассмотрим еще одно свойство функции – *четность*. Предварительно введем еще одно понятие – *симметричность области определения*. Область определения называется *симметричной*, если *функция определена и в точке* x_0, *и в точке* $(-x_0)$ (т. е. в точке, симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Понятие *четности* функции вводится *только* для функции с *симметричной областью определения*. Функция называется *четной*, если *при изменении знака аргумента, значение функции не меняется*, т. е. $y(-x) = y(x)$. График четной функции всегда *симметричен относительно оси ординат*.

Функция называется *нечетной*, *если при изменении знака аргумента, значение функции* также *меняется на противоположное*, т. е. $y(-x) = -y(x)$. График нечетной функции всегда *симметричен относительно начала координат*.

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

Пример 1

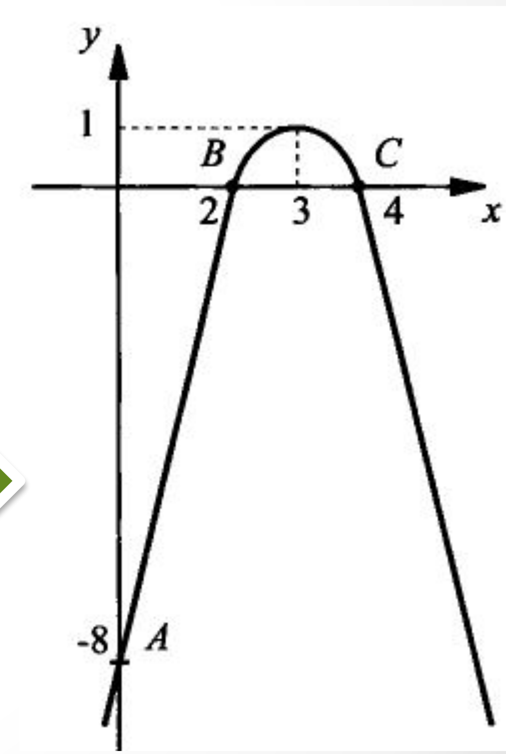
Рассмотрим функцию $y(x) = -x^2 + 6x - 8$.

Найдем точки пересечения графика этой функции с осями координат. Чтобы определить точку пересечения графика с осью ординат, вычислим значение функции $y(x)$ при $x = 0$: $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получаем координаты этой точки $A(0; -8)$.

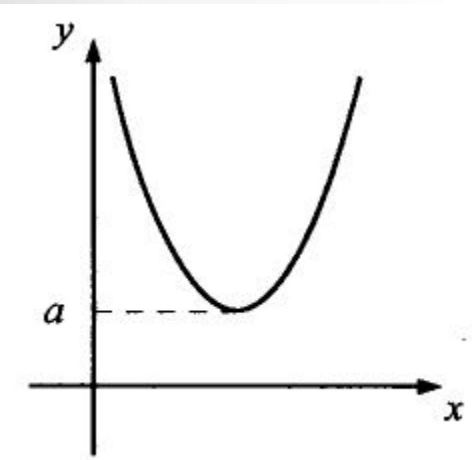
Теперь определим точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Для этого в функцию $y = -x^2 + 6x - 8$ подставим значение $y = 0$ и получим квадратное уравнение $0 = -x^2 + 6x - 8$, или $0 = x^2 - 6x + 8$.

Решим его: $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$, т. е. $x_1 = 2, x_2 = 4$.

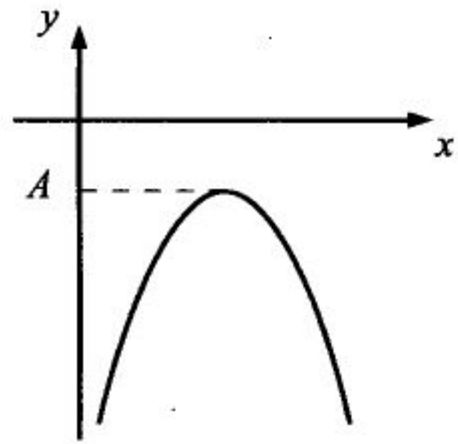
Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: $B(2; 0)$ и $C(4; 0)$.



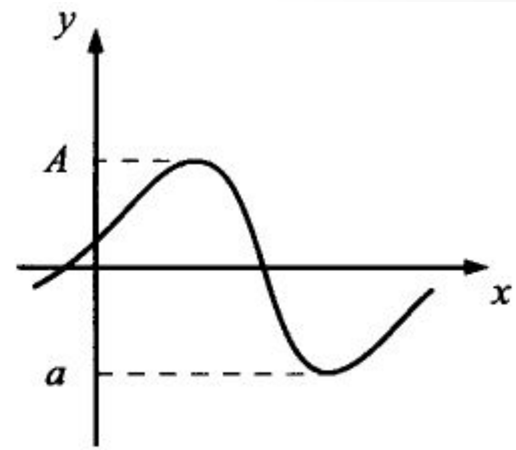
Функция называется **ограниченной снизу**, если все значения функции не меньше некоторого числа *a (т.е.* $y(x) \geq a$*)* . Функция называется ограниченной сверху, если все значения функции не больше некоторого числа **А (т.е. у (х) ≤ А)**. **Если функция ограничена снизу и сверху, то она называется ограниченной.**



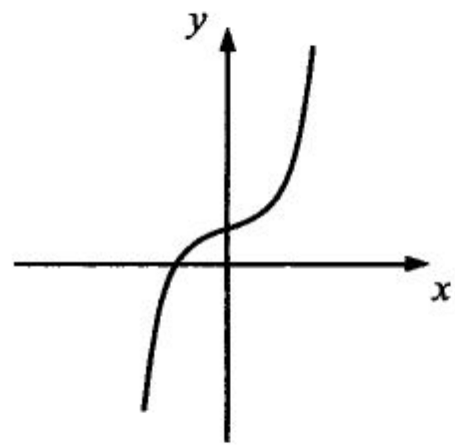
Ограничена снизу



Ограничена сверху



Ограниченная

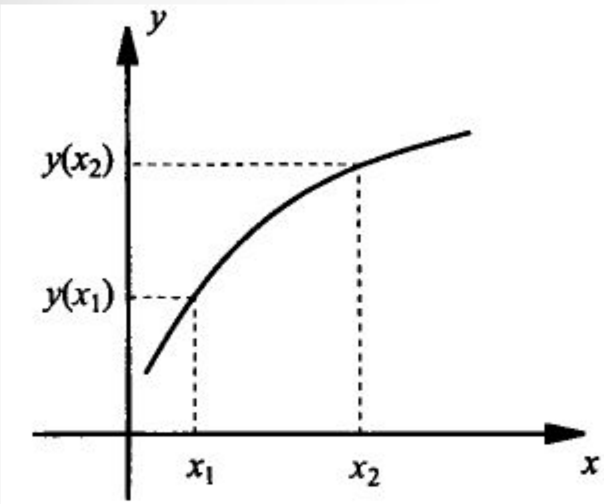


Неограниченная

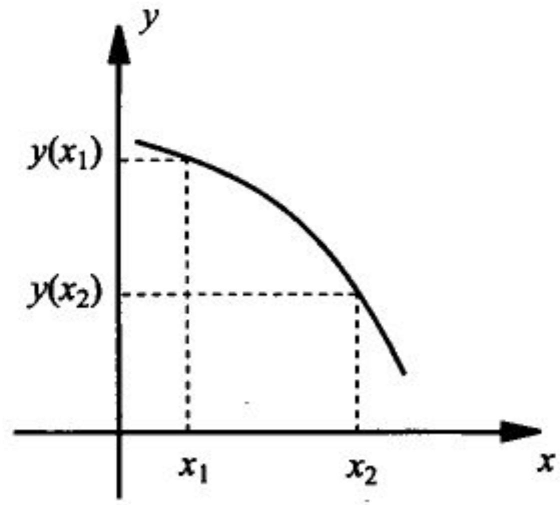
Монотонность функции.

Функция называется **возрастающей**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (т.е. если $x_2 > x_1$ то $y(x_2) > y(x_1)$).

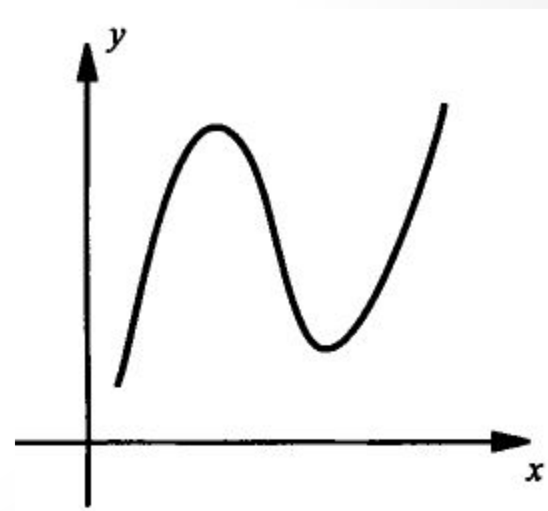
Функция называется **убывающей**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т.е. если $x_2 > x_1$ то $y(x_2) < y(x_1)$).



Возрастающая функция
$y(x_2) > y(x_1)$



Убывающая функция
$y(x_2) < y(x_1)$



Немонотонная функция

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

- **Пример 2. Выясним четность функций:**
- $y = |x| - x^2$,
- $y = x - x^3$,
- $y = x - 2$.

Прежде всего отметим, что области определения всех трех функций $x \in (-\infty; +\infty)$ симметричны. Для выяснения четности этих функций $y(x)$ надо найти значение $y(-x)$ и сравнить значения $y(x)$ и $y(-x)$.

а) $y(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$ (здесь учтено, что $|-x| = |x|$ и $(-x)^2 = x^2$). Теперь легко видеть, что $y(-x)$ совпадает с данной функцией $y(x)$, т. е. $y(-x) = y(x)$. Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

подробнее

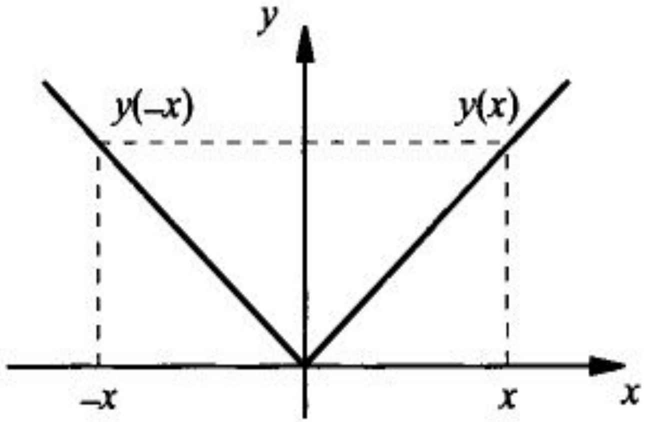
Свойства и графики элементарных функций

б) $y(-x) = -x-(-x)^3 = -x-(-x)^3 = -x+x^3 = -(x-x^3) = -y(x)$. Видно, что значения функции в точках x и $-x$ противоположны по знаку, т. е. $y(-x) = -y(x)$. Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

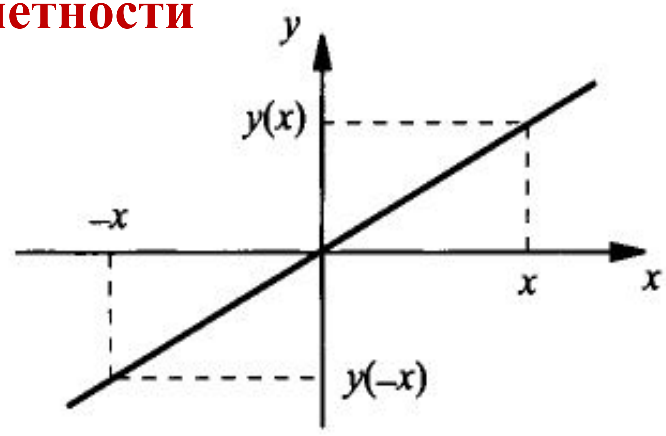
в) $y(-x) = -x-2$. Сравнивая значение $-y(x) = -x-2$ со значением $y(x) = x-2$, видим, что равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется. Поэтому эта функция не является четной. Найдем теперь величину $-y(x) = -(x-2) = 2-x$. Сравнивая значение $y(-x) = -x-2$ со значением $-y(x) = 2-x$, видим, что равенство $y(-x) = -y(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не является нечетной.

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

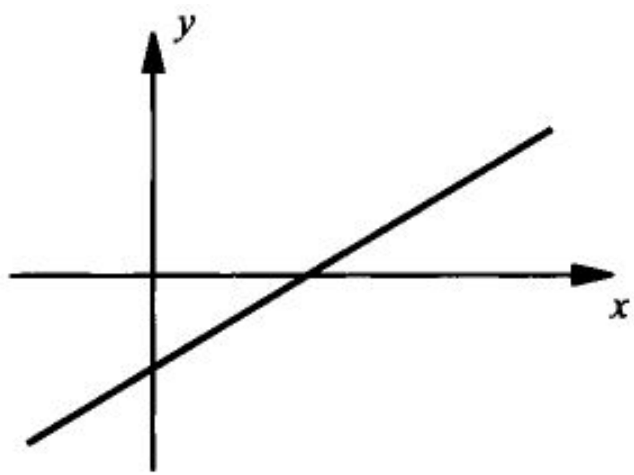
Графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности



Четная функция $y(-x) = y(x)$



Нечетная функция $y(-x) = -y(x)$



Функция, не имеющая четности

Свойства и графики элементарных функций

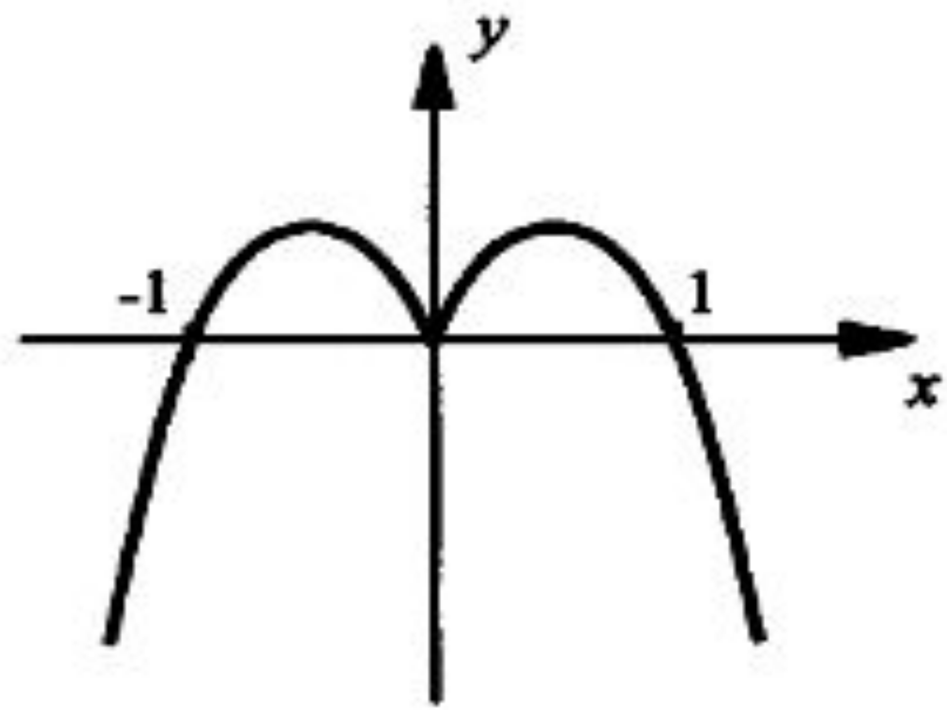


рис. а)

График четной функции

Свойства и графики элементарных функций

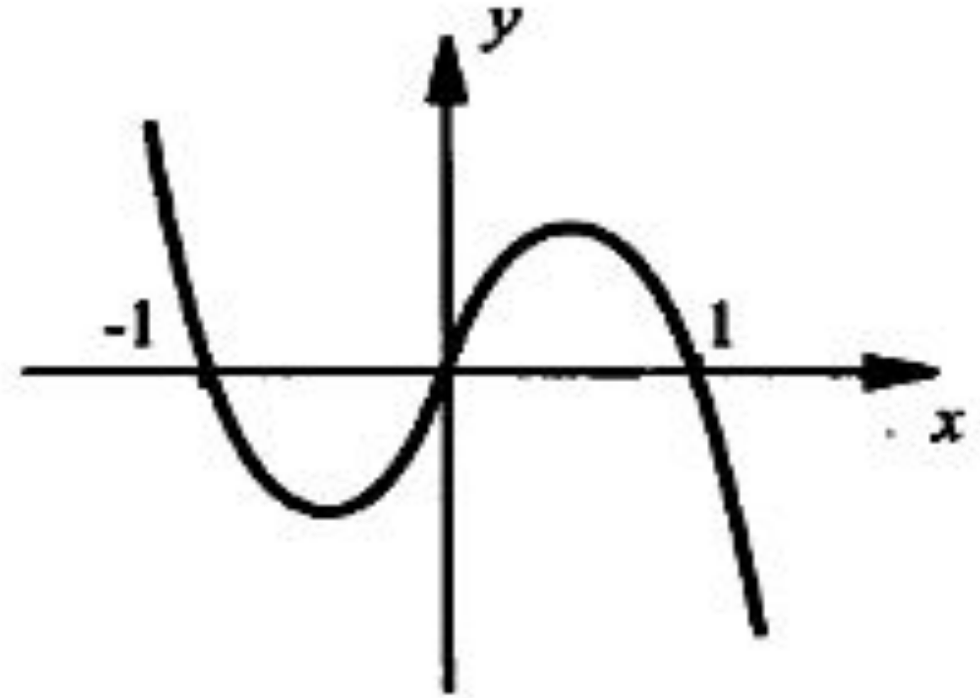
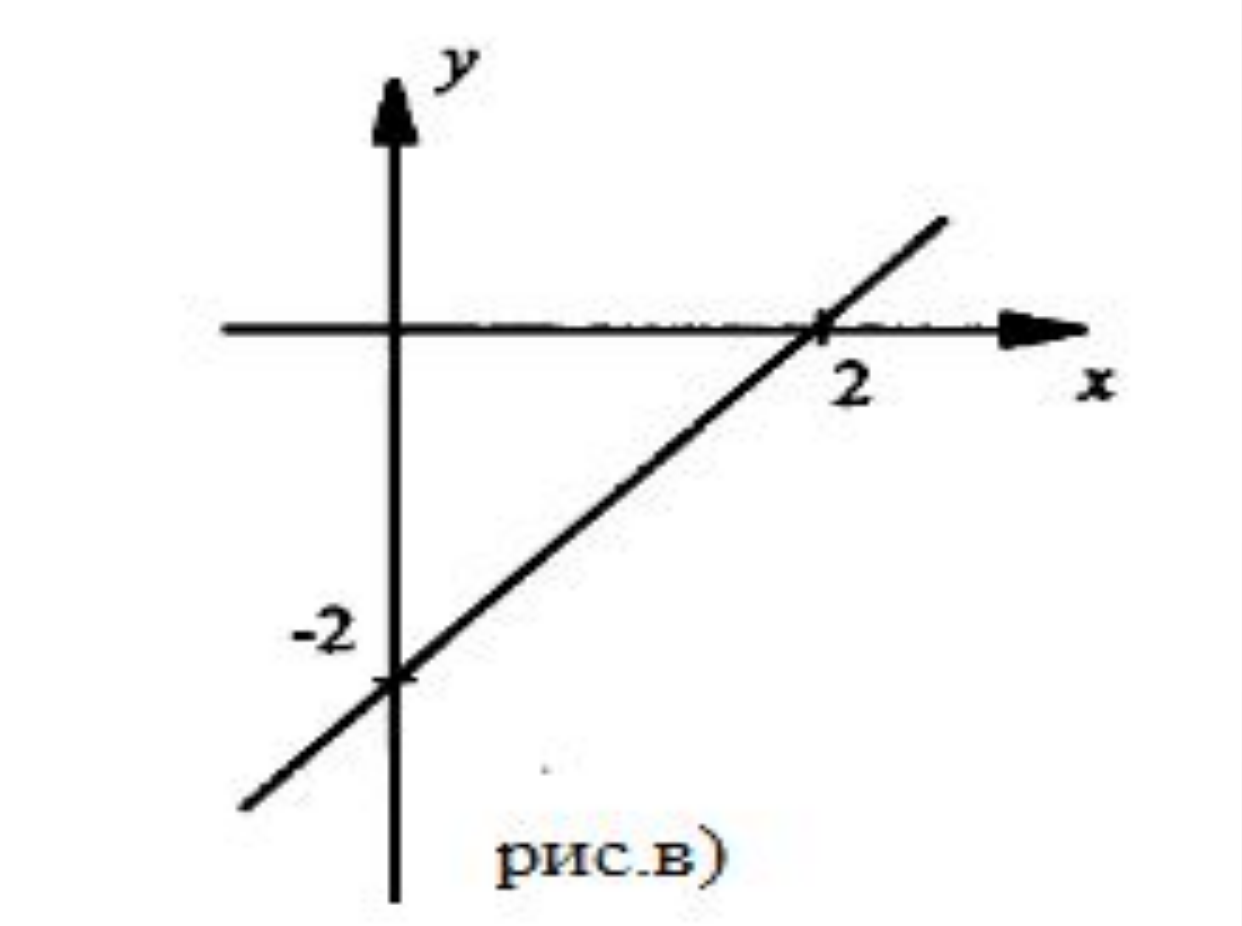


рис.б)

График нечетной функции

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

Свойства и графики элементарных функций



Данная функция никакой четности не имеет и ее график не обладает никакой симметрией

Свойства и графики элементарных функций

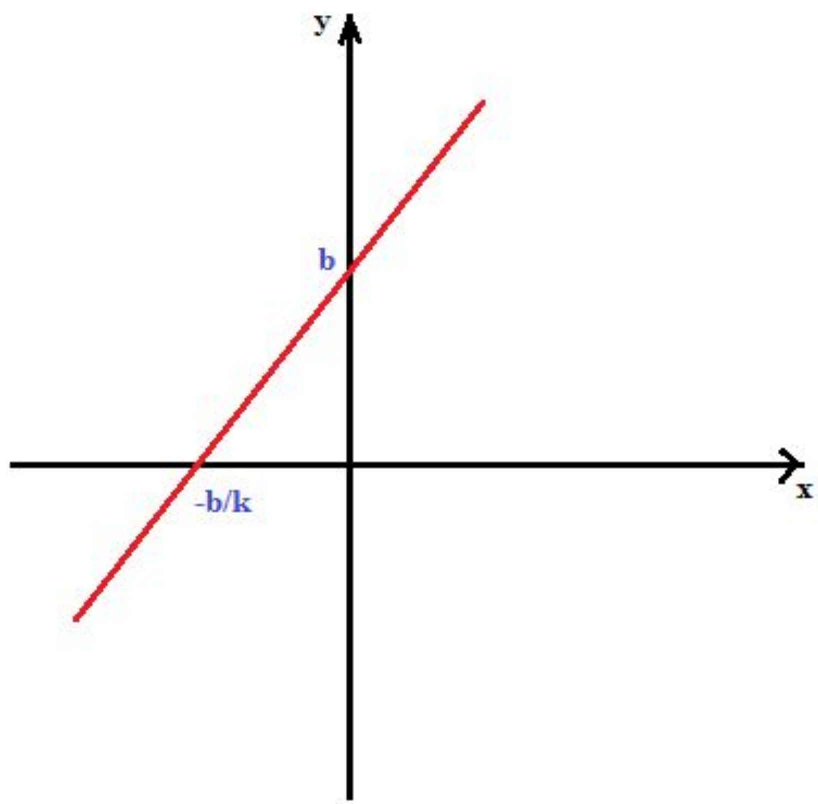
Рассмотрим основные свойства и графики некоторых ранее изученных функций

Линейная функция $y = kx + b$

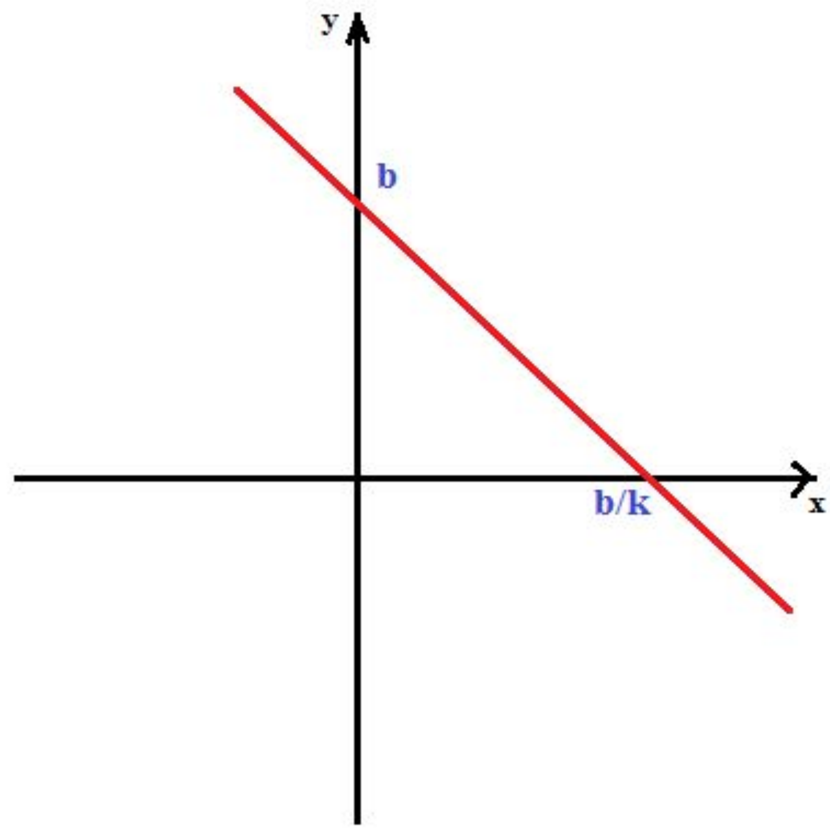
1. Область определения – множество всех чисел.
2. Графиком функции является прямая линия.
3. График функции пересекает ось абсцисс в точке $x = -\frac{b}{k}$ (при $k \neq 0$) и параллелен оси абсцисс при $k = 0$. График функции пересекает ось ординат в точке $y = b$.
4. Функция возрастает при $k > 0$, убывает при $k < 0$ и постоянна при $k = 0$.
5. Функция неограниченная при $k \neq 0$ и ограниченная при $k = 0$.
6. Функция определенной четности не имеет при $b \neq 0$, нечетная при $b = 0$ и четная при $k = 0$.
7. Область значений – множество всех чисел при $k \neq 0$ и $y = b$ при $k = 0$.
8. При $b = 0$ функцию $y = kx$ называют прямой пропорциональностью.

Свойства и графики элементарных функций

Линейная функция y = kx + b



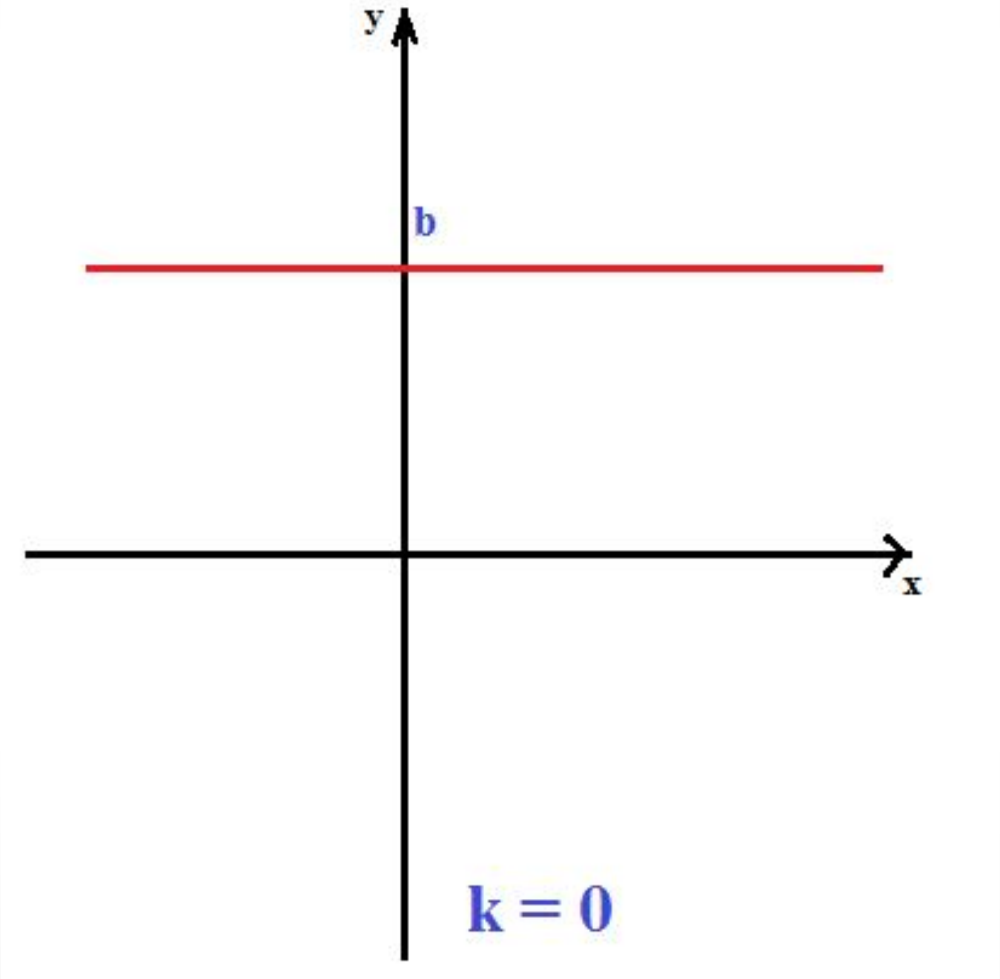
$k > 0$



$k < 0$

Свойства и графики элементарных функций

Линейная функция y = kx + b



Свойства и графики элементарных функций

Линейная функция y = kx + b

Пример

Найти условие, при котором линейная функция $y = kx + b$ является: а) нечетной; б) четной.

Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$ – симметричная.

Найдем значение $y(-x) = k \cdot (-x) + b = -kx + b$.

а) Если функция нечетная, то $y(-x) = -y(x)$. Получаем: $-kx + b = -(kx + b)$, или $b = -b$, или $2b = 0$, откуда $b = 0$.

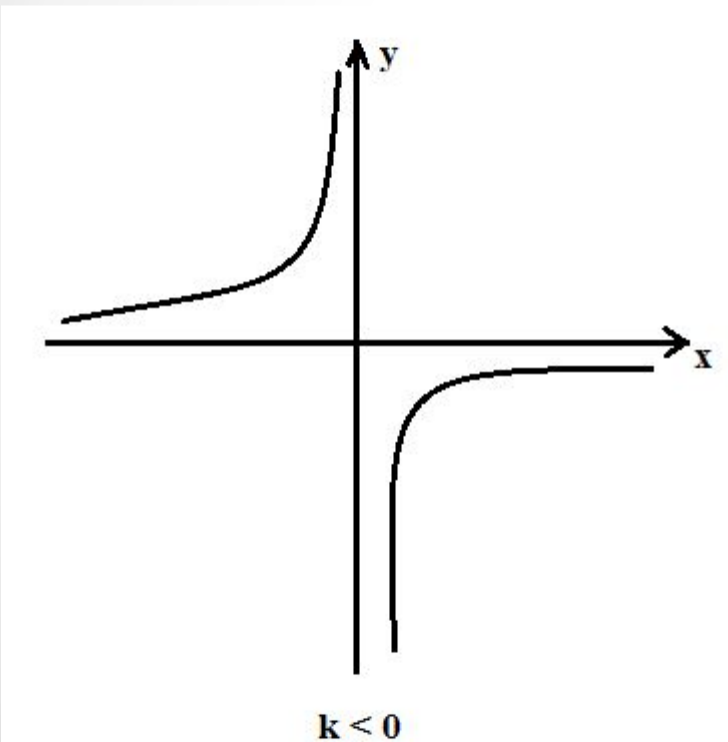
б) Если функция четная, то $y(-x) = y(x)$. Получаем: $-kx + b = kx + b$, или $0 = 2kx$, откуда $k = 0$ (т. к. x – любое число, не равное нулю).

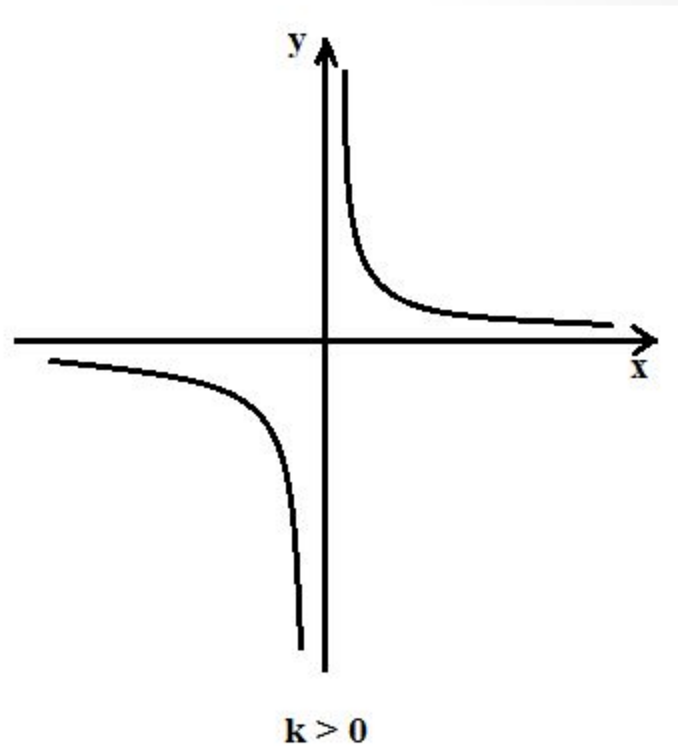
Свойства и графики элементарных функций
Обратная пропорциональность y = k/x

1. **Область определения – множество всех чисел, кроме нуля.**
2. **Графиком функции является гипербола.**
3. **График функции осей координат не пересекает.**
4. **Функция возрастает при $k < 0$ и убывает при $k > 0$ в области определения.**
5. **Функция неограниченная.**
6. **Функция нечетная.**
7. **Область значений – множество всех чисел, кроме нуля.**

Свойства и графики элементарных функций

Обратная пропорциональность $y = k/x$





Свойства и графики элементарных функций

Пример

Выясним монотонность обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$.

Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$. Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 (где $x_1 > x_2$) из области определения функции. Найдем значения функции в этих точках $y(x_1)=\frac{k}{x_1}$ и $y(x_2)=\frac{k}{x_2}$ и сравним их. Для этого рассмотрим разность $y(x_2)-y(x_1)=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{k(x_1-x_2)}{x_1x_2}$. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_1 - x_2$ отрицательна. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ противоположен знаку дроби $\frac{k}{x_1x_2}$.

Функция $y=\frac{k}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Рассмотрим два промежутка области определения. При $x_1, x_2 \in (-\infty;\,0)$ и при $x_1, x_2 \in (0;\,+\infty;)$ произведение x_1x_2 положительно. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ противоположен знаку коэффициента k. Следовательно, при $k < 0$ величина $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$ и функция возрастает; при $k > 0$ величина $y(x_2) - y(x_1) < 0$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$ и функция убывает.

Свойства и графики элементарных функций

Функция $y = x^2$

Функция $y = x^2$ является частным случаем квадратичной функции.

1. Область определения – множество всех чисел.
2. Графиком функции является парабола.
3. График функции $y = x^2$ проходит через начало координат.
4. Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
5. Функция ограничена снизу, т.е. $Y \geq 0$.
6. Функция четная.
7. Область значений – промежуток $[0; +\infty)$.

Свойства и графики элементарных функций

Кубическая функция $y = x^3$

1. Область определения – множество всех чисел.
2. График специального названия не имеет.
3. График функции проходит через начало координат.
4. Функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
5. Функция неограниченная.
6. Функция нечетная.
7. Область значений – множество всех чисел.

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

Свойства и графики элементарных функций

Функция $y = \sqrt{x}$

1. Область определения – множество неотрицательных чисел.
2. График специального названия не имеет.
3. График выходит из начала координат.
4. Функция возрастает.
5. Функция ограничена снизу, т.е. $y \geq 0$.
6. Функция определенной четности не имеет.
7. Область значений – множество неотрицательных чисел.

Свойства и графики элементарных функций

Функция $y = |x|$

1. Область определения – множество всех чисел.
2. График специального названия не имеет.
3. График функции $y = |x|$ проходит через начало координат.
4. Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
5. Функция ограничена снизу, т.е. $y \geq 0$.
6. Функция четная.
7. Область значений - множество неотрицательных чисел.

Свойства и графики элементарных функций

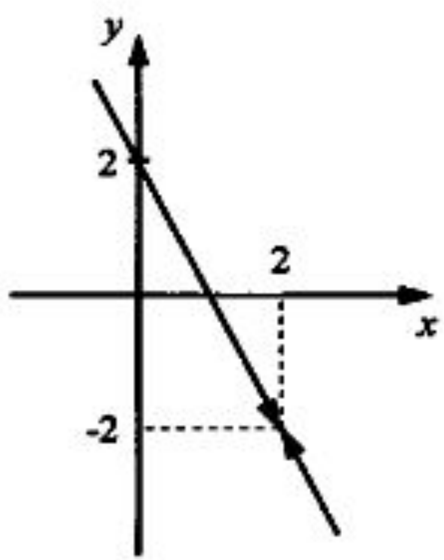
Примеры построения графика более сложных функций

1

Построим график функции $y = \dfrac{4-x^2}{2-x} - 3x.$

Область определения функции – множество всех чисел, кроме $x = 2$.

Сократим дробь и запишем функцию в виде $y = \dfrac{(2-x)(2+x)}{2-x} - 3x =$ $= 2 + x - 3x = 2 - 2x.$ Поэтому надо построить график линейной функции $y = 2 - 2x$ и удалить из него точку с абсциссой $x = 2$ (показана стрелками).



Свойства и графики элементарных функций

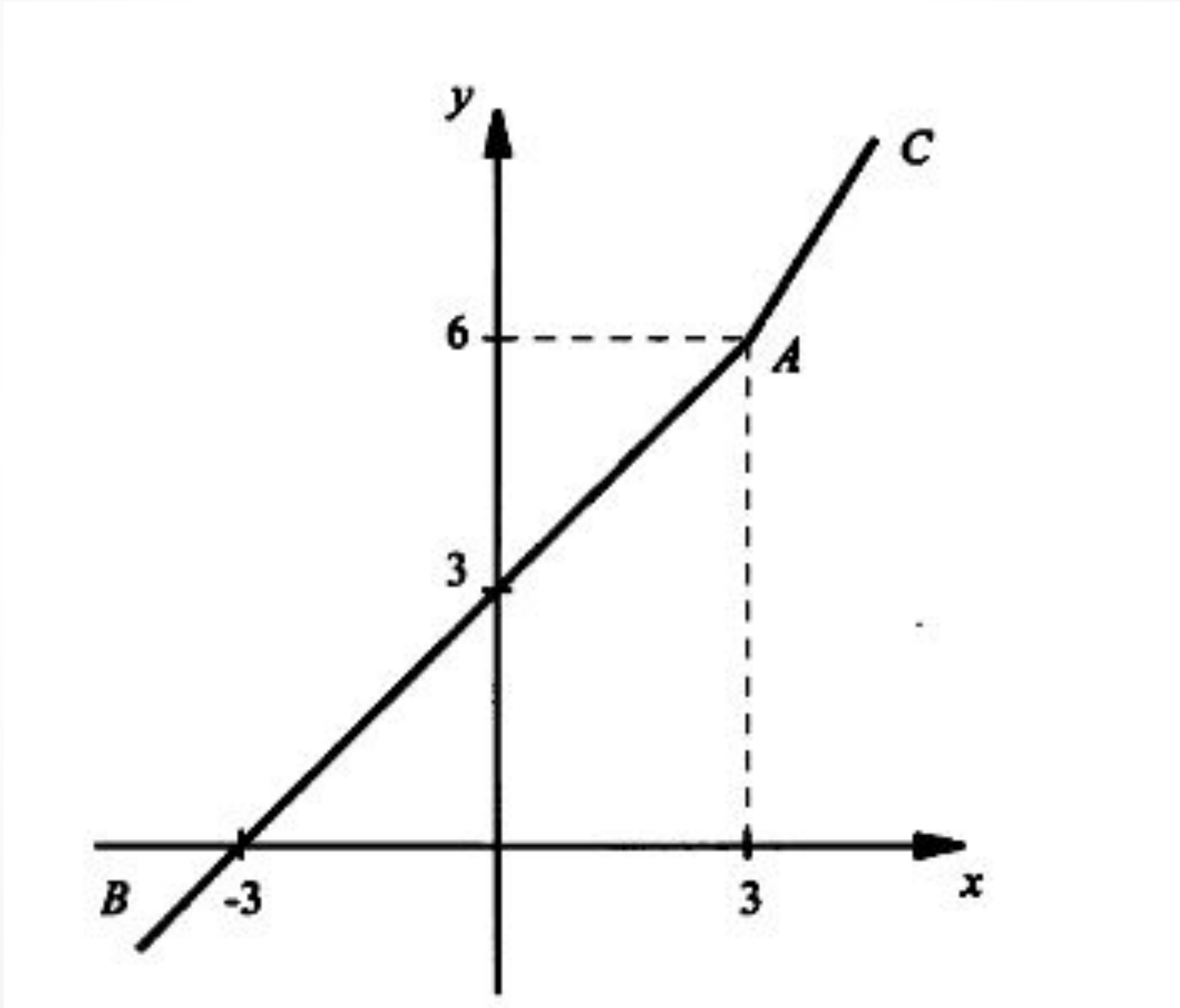
Примеры построения графика более сложных функций

2

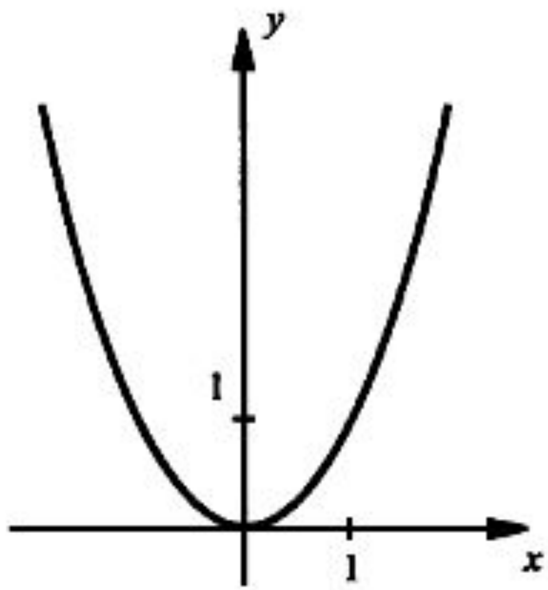
Построим график функции $y = 2x + |x - 3|$.

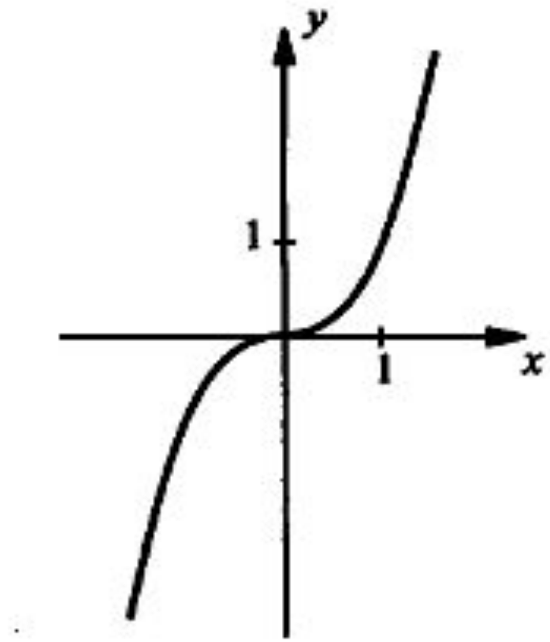
Раскроем знак модуля, рассмотрев два случая. При $x - 3 < 0$ получаем: $y = 2x - (x - 3) = x + 3$, при $x - 3 \geq 0$ имеем: $y = 2x + (x - 3) = 3x - 3$. Таким образом, надо построить график функции $y = \begin{cases} x + 3 \text{ при } x < 3, \\ 3x - 3 \text{ при } x \geq 3 \end{cases}$. Строим при $x < 3$ график прямой $y = x + 3$ (луч AB) и при $x \geq 3$ график прямой $y = 3x - 3$ (луч AC). Поэтому графиком данной функции будет ломаная BAC.

Свойства и графики элементарных функций



Свойства и графики элементарных функций



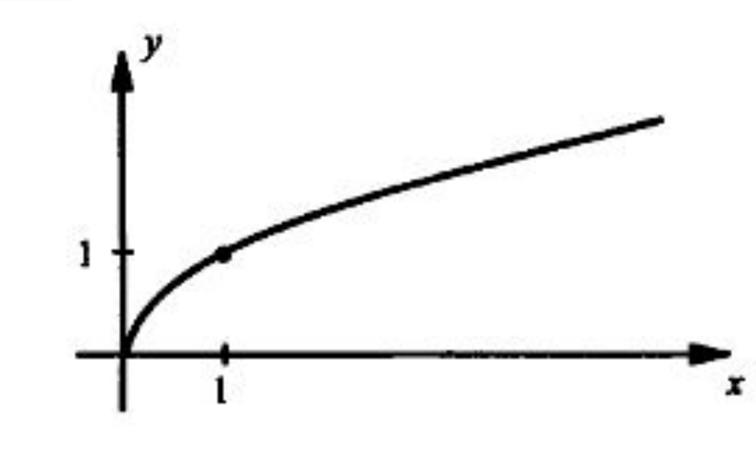


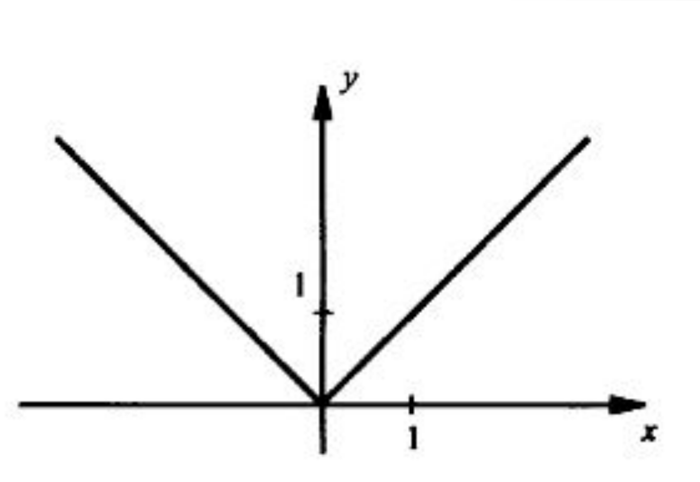
$y = x^2$

$y = x^3$

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

Свойства и графики основных функций





$y = \sqrt{x}$

$y = |x|$

Гулова Р.И., учитель математики, МБОУ "СОШ №12 с УИОП"

Свойства и графики основных функций

Контрольные вопросы

1. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
2. Дайте понятие ограниченности функции.
3. Какая функция называется возрастающей, убывающей на промежутке?
4. Четная и нечетная функции и их свойства.
5. Свойства и график функции $y = kx + b$.
6. Свойства и график пропорциональности.
7. Свойства и график квадратичной функции.
8. Свойства и график кубической функции.
9. Свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.
10. Свойства и график функции $y = |x|$.

Свойства и графики элементарных функций

Используемые материалы

1. Ю.Н.Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б.Суворова. Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2011.
2. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, Л.Б. Крайнева. Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс. – М: Просвещение, 2014.
3. А.Н.Рурукин, С.А.Полякова Поурочные разработки по алгебре 9 класс. -М: Просвещение, 2010.