Электронная рабочая тетрадь по тригонометрии

Данная рабочая тетрадь предусматривает оказание помощи обучающимся 10 класса в самостоятельном изучении раздела математики «Тригонометрия».

Пояснительная записка

Для изучения этой большой, сложной темы необходимо:

***знать*:**

понятия тригонометрических функций для острого угла прямоугольного треугольника;

значения тригонометрических функций для углов 30 , 45 и 60 ;

основные тригонометрические тождества;

уметь: использовать понятия, определения и формулы тригонометрии при упрощении и вычислении выражений с тригонометрическими функциями;

знать и уметь: определять обратные тригонометрические функции;

уметь решать тригонометрические уравнения и неравенства;

Ну, что начнем изучение этой сложной темы!

ТРИГОНОМетрия- (от греч. **trigwnon** – треугольник **и** **metrew** – измеряю) – математическая дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами треугольников и тригонометрических функций.

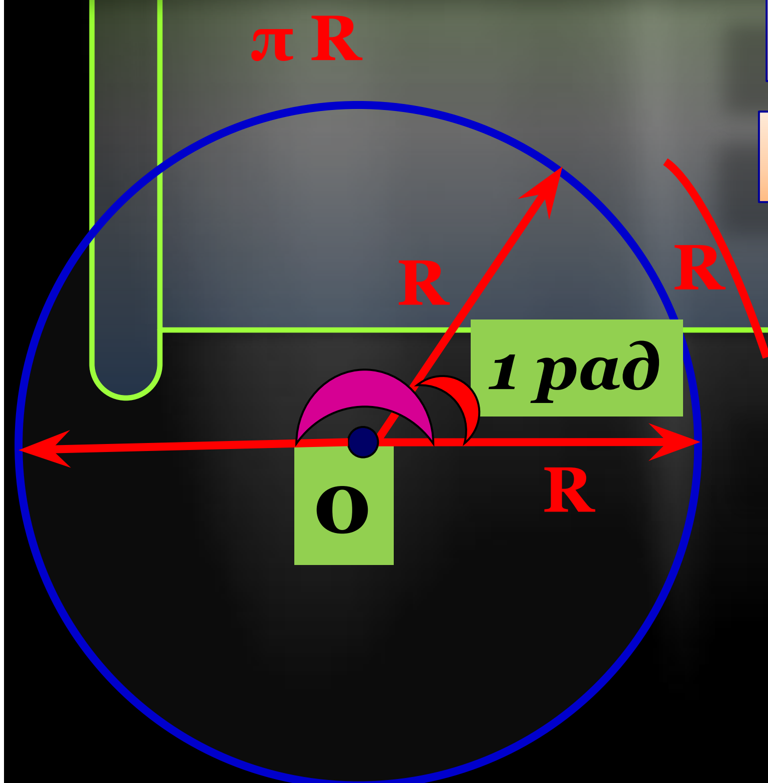
Что тако е триг оном етри я?

Повторение.

Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$

Длина полуокружности равна πR

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.



Длина дуги равна R → угол 1 *рад*

Длина дуги равна πR → угол π *рад*

Развёрнутый угол равен π *рад*

$180^o = \pi$ *рад*

$360^o = 2\pi$ *рад*

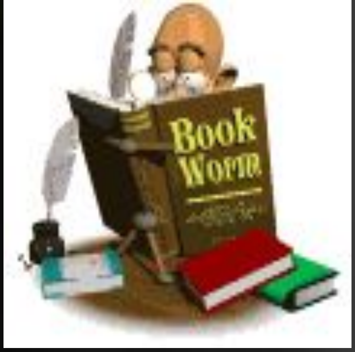
$$1 \text{ радиан} = \frac{180^0}{\pi} \approx \frac{180^0}{3{,}14} \approx 57{,}3^\circ \qquad 1^o = \frac{\pi}{180}$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha^\circ = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \text{ рад}$$

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha \text{ рад} = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}$$



$$\alpha^\circ = \frac{\pi \cdot \alpha}{180}\ \text{рад}$$

$$90^\circ = \frac{\pi \cdot 90}{180} = \frac{\pi}{2}$$

$$45^\circ = \frac{\pi \cdot 45}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

$$30^\circ = \frac{\pi \cdot 30}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

$$180^\circ = \pi$$

$$60^\circ = \frac{\pi \cdot 60}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$360^\circ = 2\pi$$

$$\alpha \quad рад = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}$$

$$\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$$

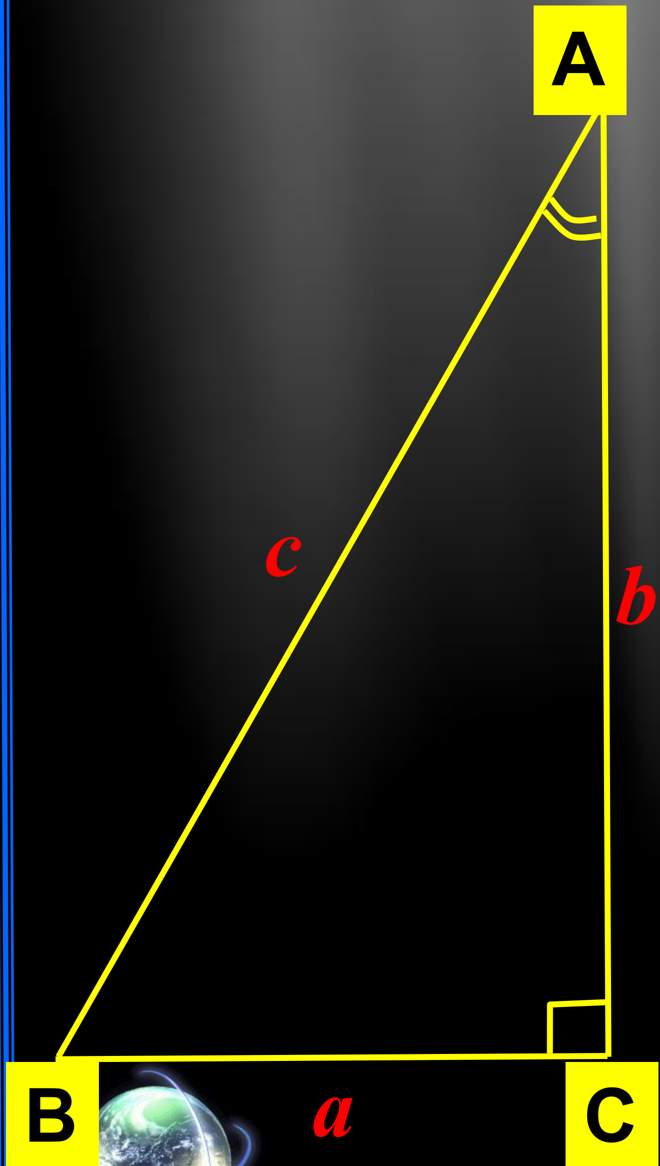
$$-\frac{3\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -108^\circ$$

$$-\frac{5\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -225^\circ$$

Выразите угол в радианах с помощью π:

Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

Повторение



$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \qquad \sin B = \frac{b}{c}$$

$$\sin A = \cos B$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B \qquad \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \sin B$$

$$tgA = \frac{a}{b} \qquad tgB = \frac{b}{a}$$

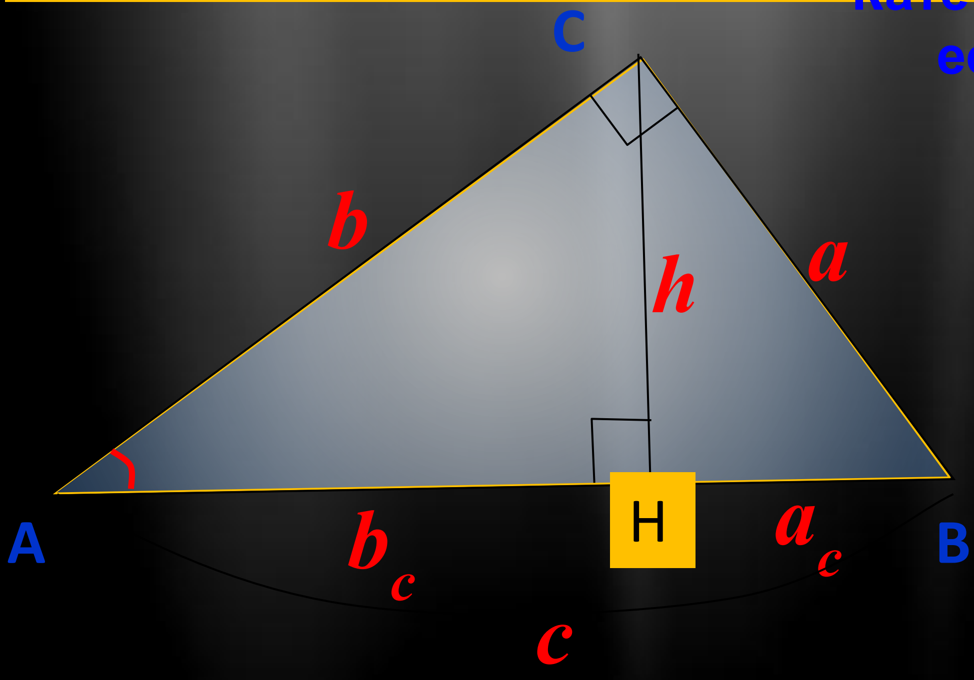
$$tg\,A = \frac{1}{tg\,B}$$

$$ctgB = \frac{a}{b}$$

$$tg\,A = ctg\,B$$

Можно найти множество способов для вычисления элементов прямоугольного треугольника, в котором опущена высота на гипотенузу.

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и проекции катета на гипотенузу.



$$b^2 = b_c c$$ **или** $$b = \sqrt{b_c c}$$

$$a^2 = a_c c$$ **или** $$a = \sqrt{a_c c}$$

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для проекций катетов на гипотенузу.

$$h^2 = b_c a_c$$ **или** $$h = \sqrt{b_c a_c}$$

Повторение

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \;\Big/ : \cos^2 A \;/\; : \sin^2 A$$

$$\operatorname{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A} \qquad \operatorname{ctg}^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{tg} A = 1 \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$$

1. В треугольнике *ABC* AC=BC, AB=20, *sinBAC=0,7.* Найдите высоту AH.

$$\text{Из } \Delta ABH$$

$$\sin B = \frac{AH}{AB}$$

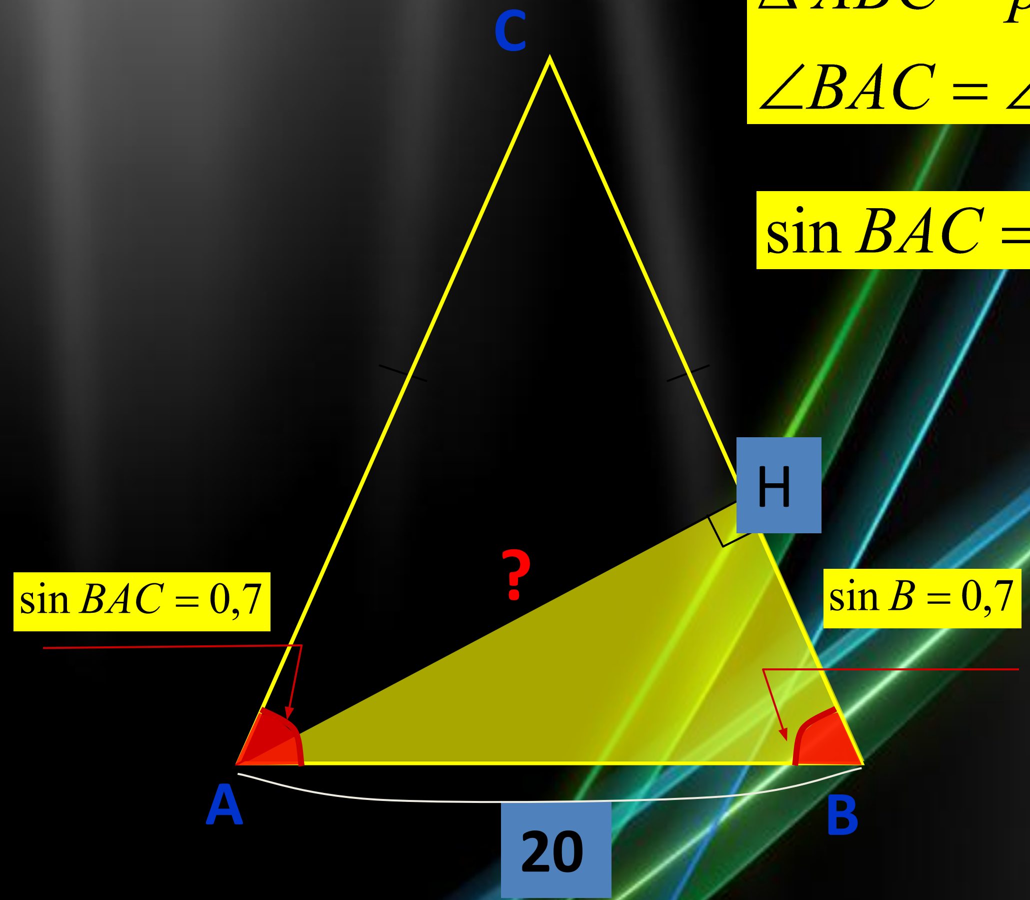
$$\frac{7}{10} = \frac{AH}{20}$$

$$AH = \frac{7 \cdot 20}{10}$$

$$\Delta\, ABC - р/б$$

$$\angle BAC = \angle B$$

$$\sin BAC = \sin B$$

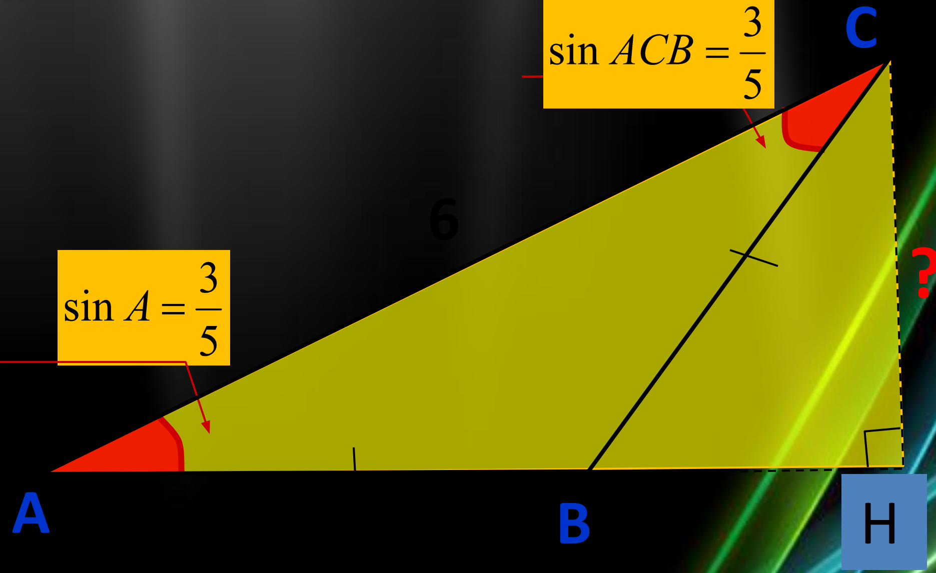


2. В треугольнике *ABC* AB=BC, AC=6, sinACB= $\frac{3}{5}$.
Найдите высоту *CH*.

$$\Delta ABC - р/б$$
$$\angle ACB = \angle A$$

$$\Rightarrow \sin ACB = \sin A$$

$$\sin ACB = \frac{3}{5}$$



$$\sin A = \frac{3}{5}$$

$$Из\ \Delta ACH$$

$$\sin A = \frac{CH}{AC}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{CH}{6}$$

$$CH = \frac{6 \cdot 3}{5}$$

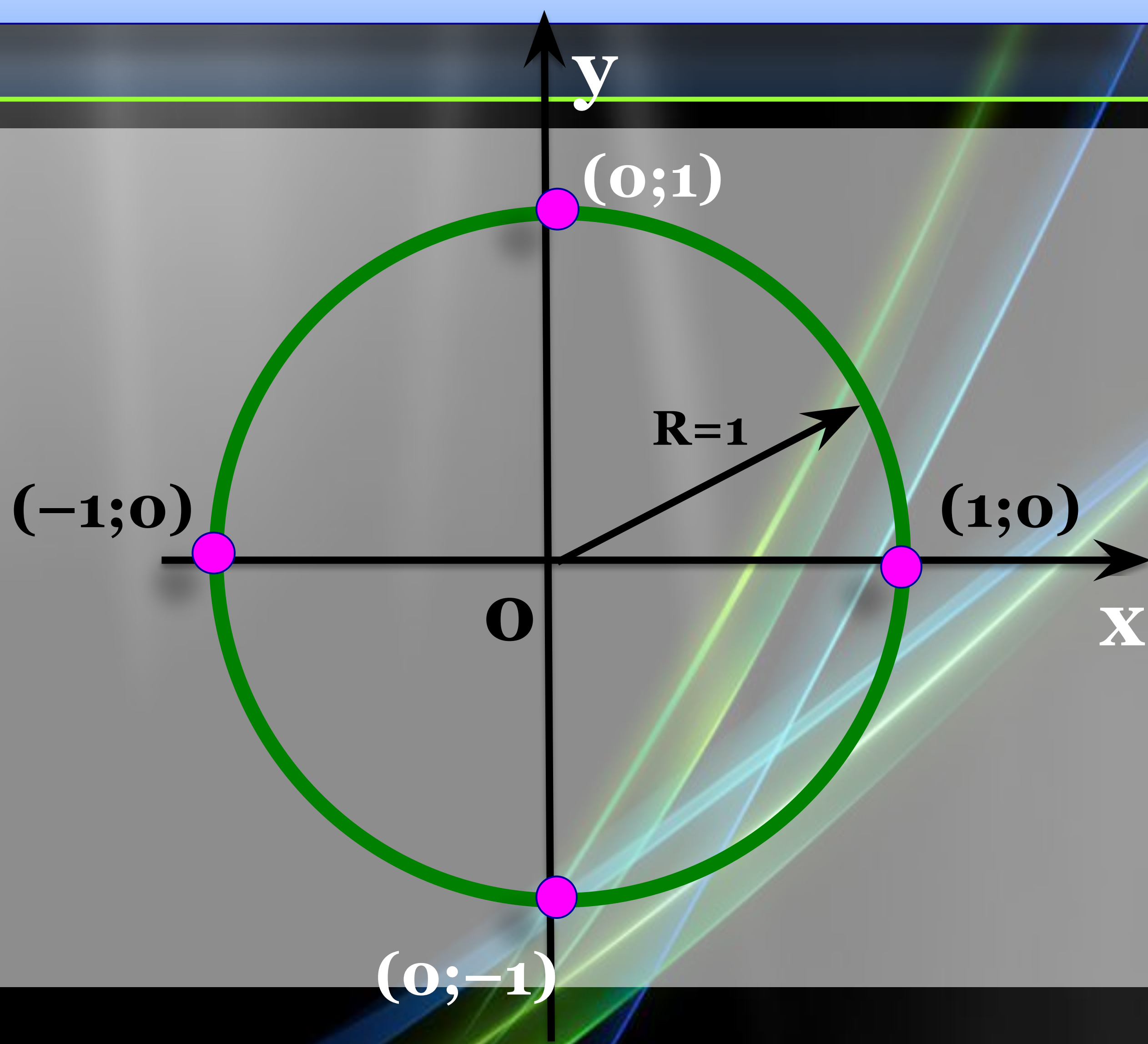
$$CH = \frac{18}{5}$$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tg $\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $\sin 2\alpha$ 45° $\cos^2\alpha$

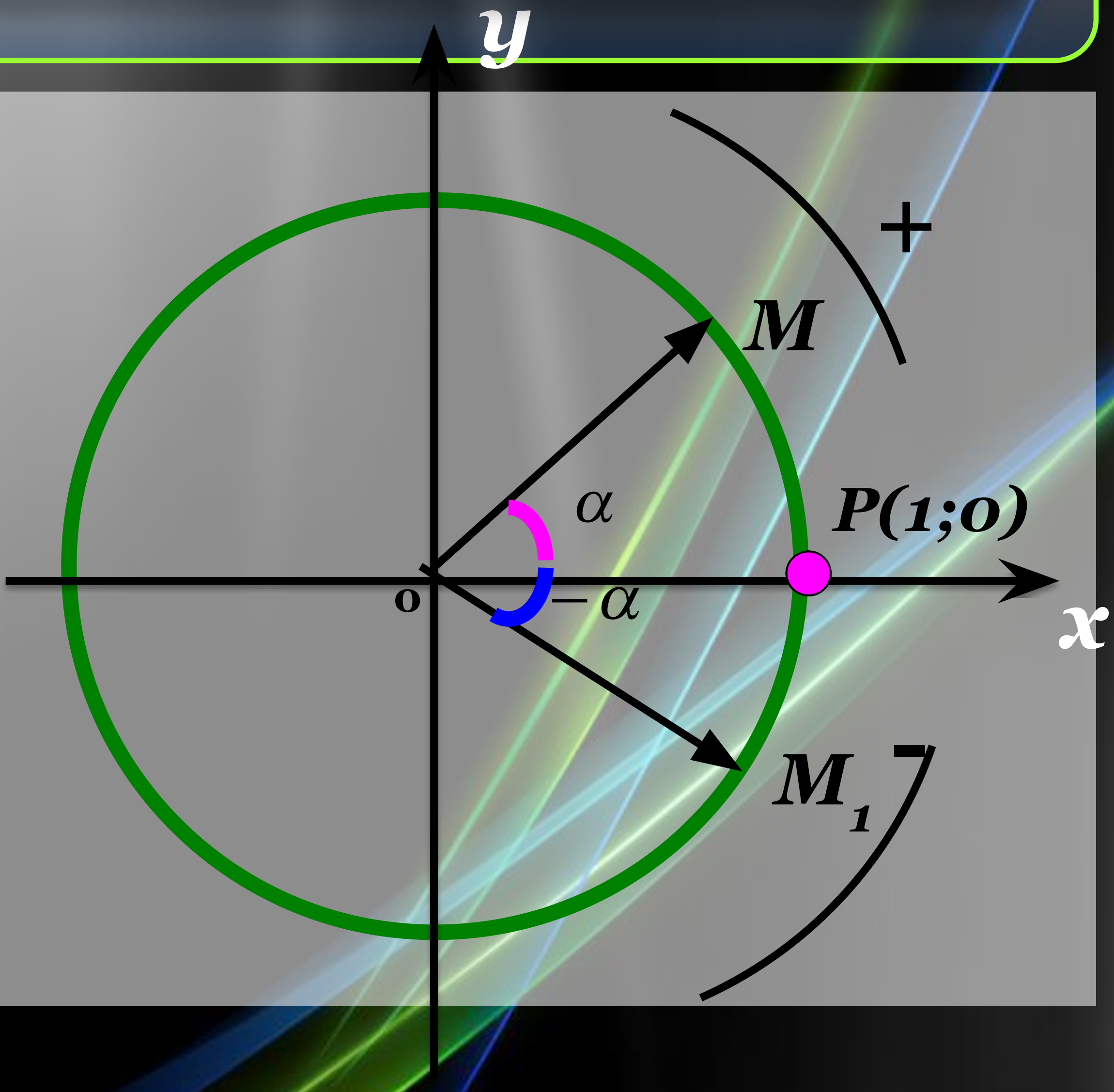
Ф м ы

Три ометрии

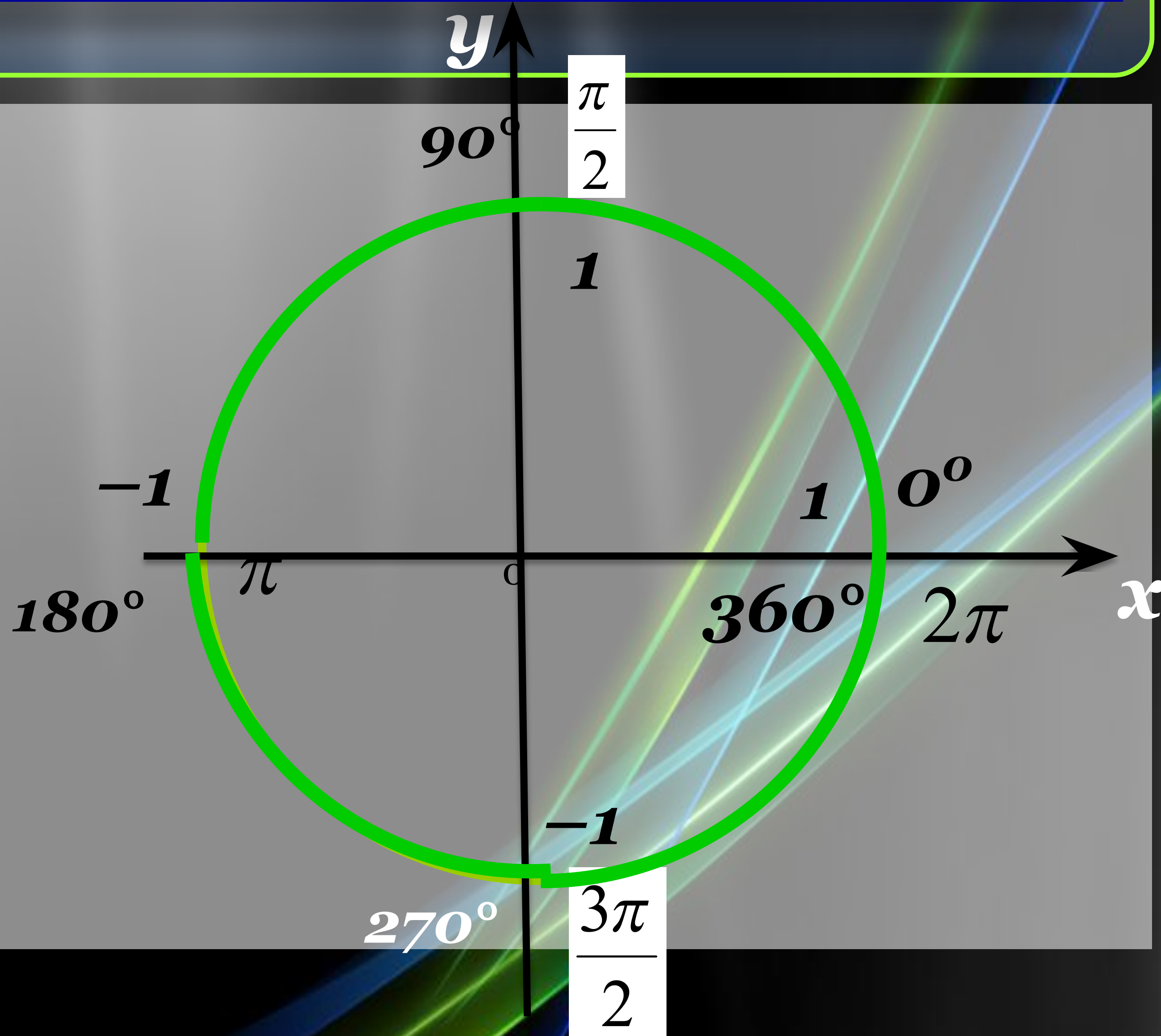
Тригонометрическая окружность



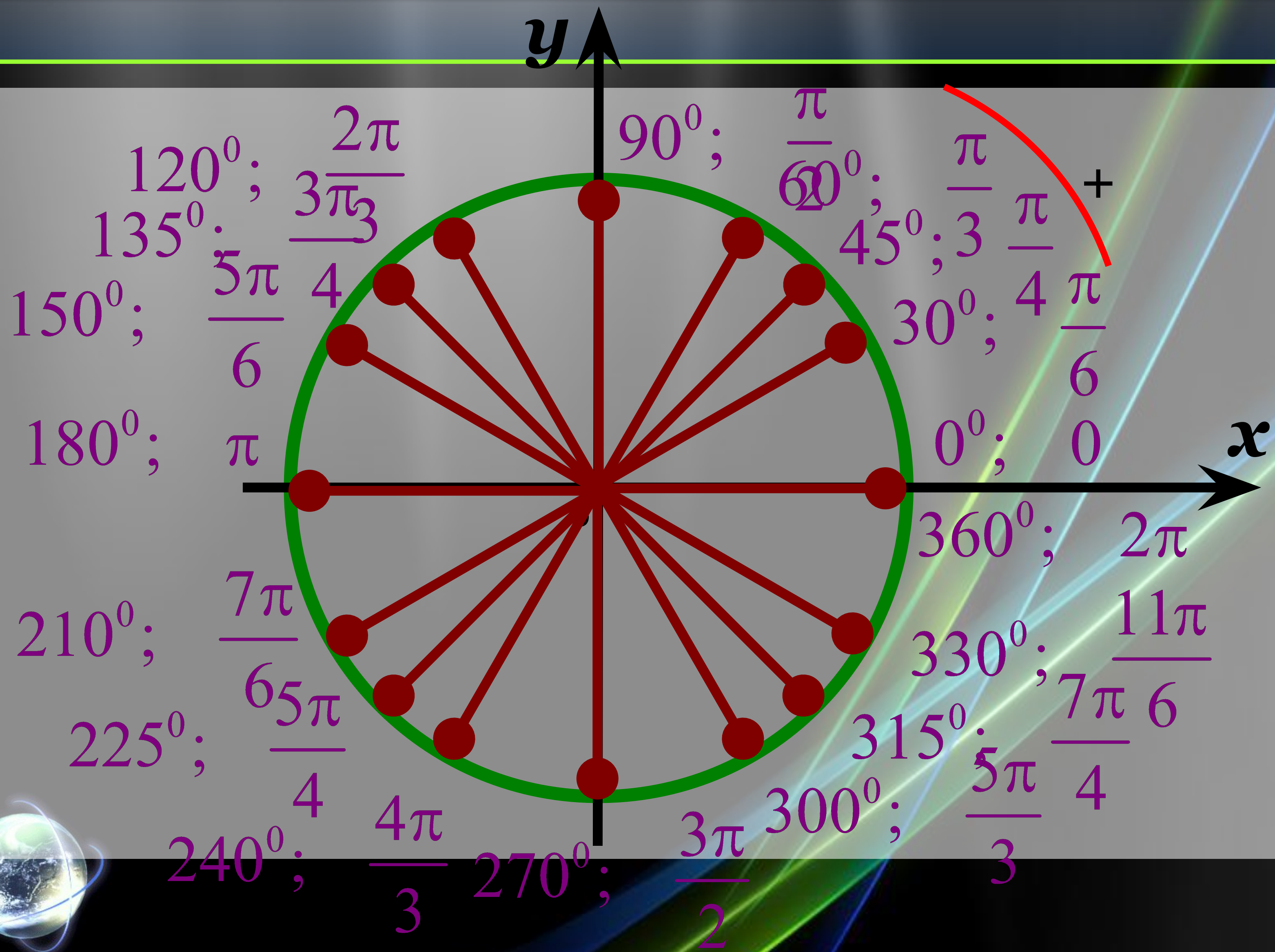
Тригонометрическая окружность



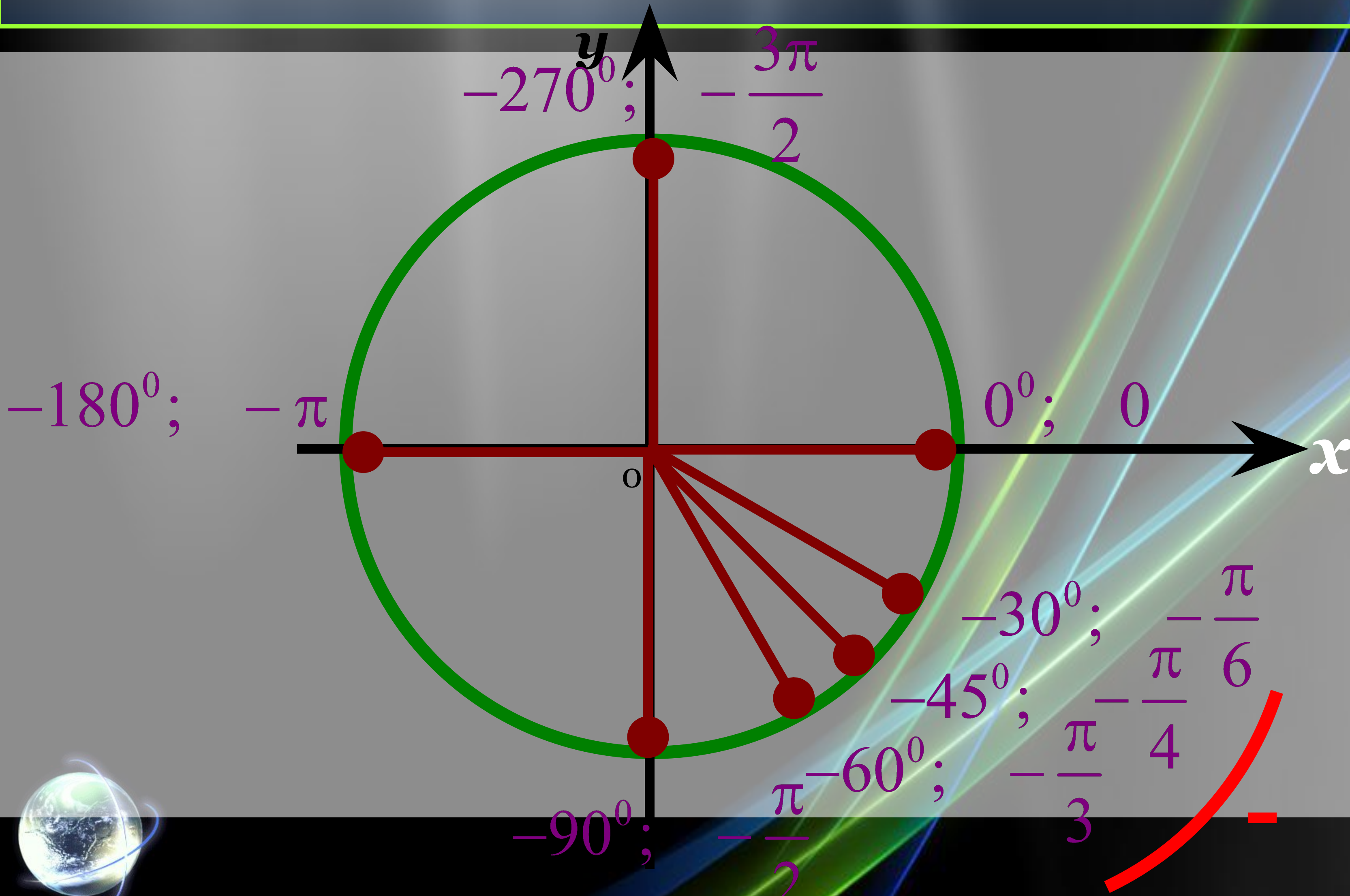
Тригонометрическая окружность



Градусы и радианы

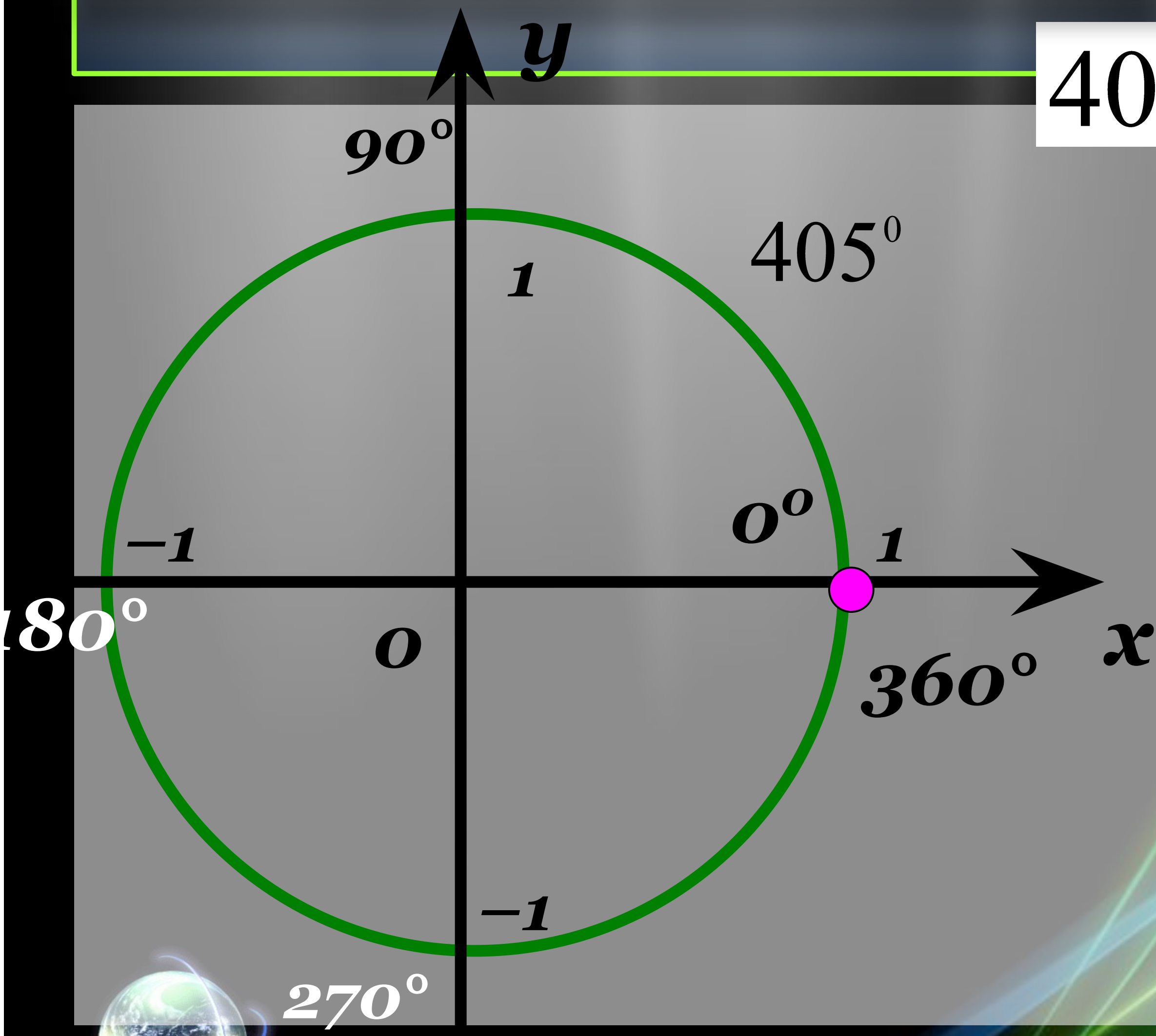


Градусы и радианы



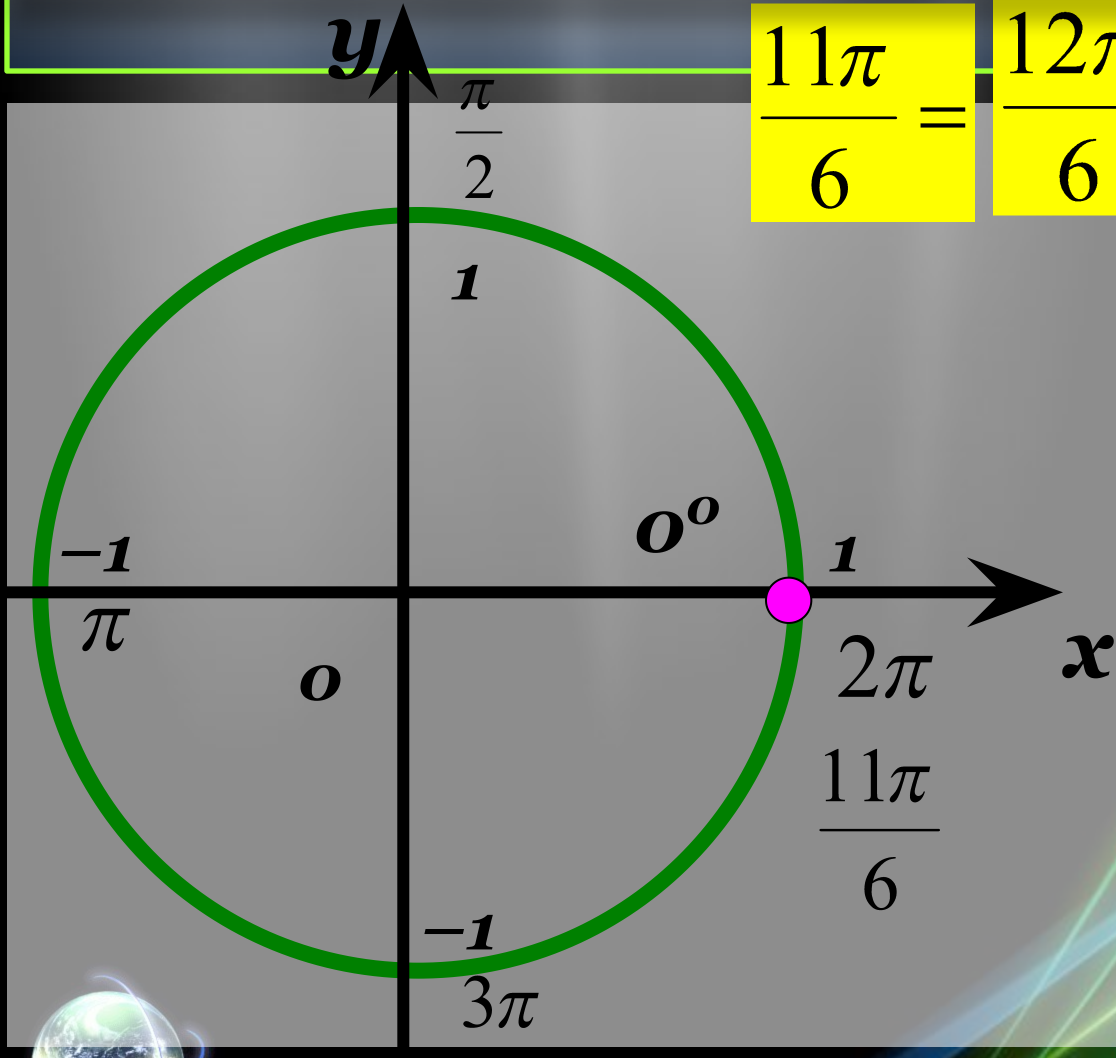
Тригонометрическая окружность

$$405^0 = 360^0 + 45^0$$



Тригонометрическая окружность

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$



Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для некоторых углов.

$180^\circ = \pi \quad радиан$

$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$

$\alpha^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot \alpha = \dfrac{\alpha}{180} \cdot \pi$

$1 \quad рад \quad = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$\beta \quad рад \quad = \dfrac{180^\circ}{\pi} \cdot \beta$

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

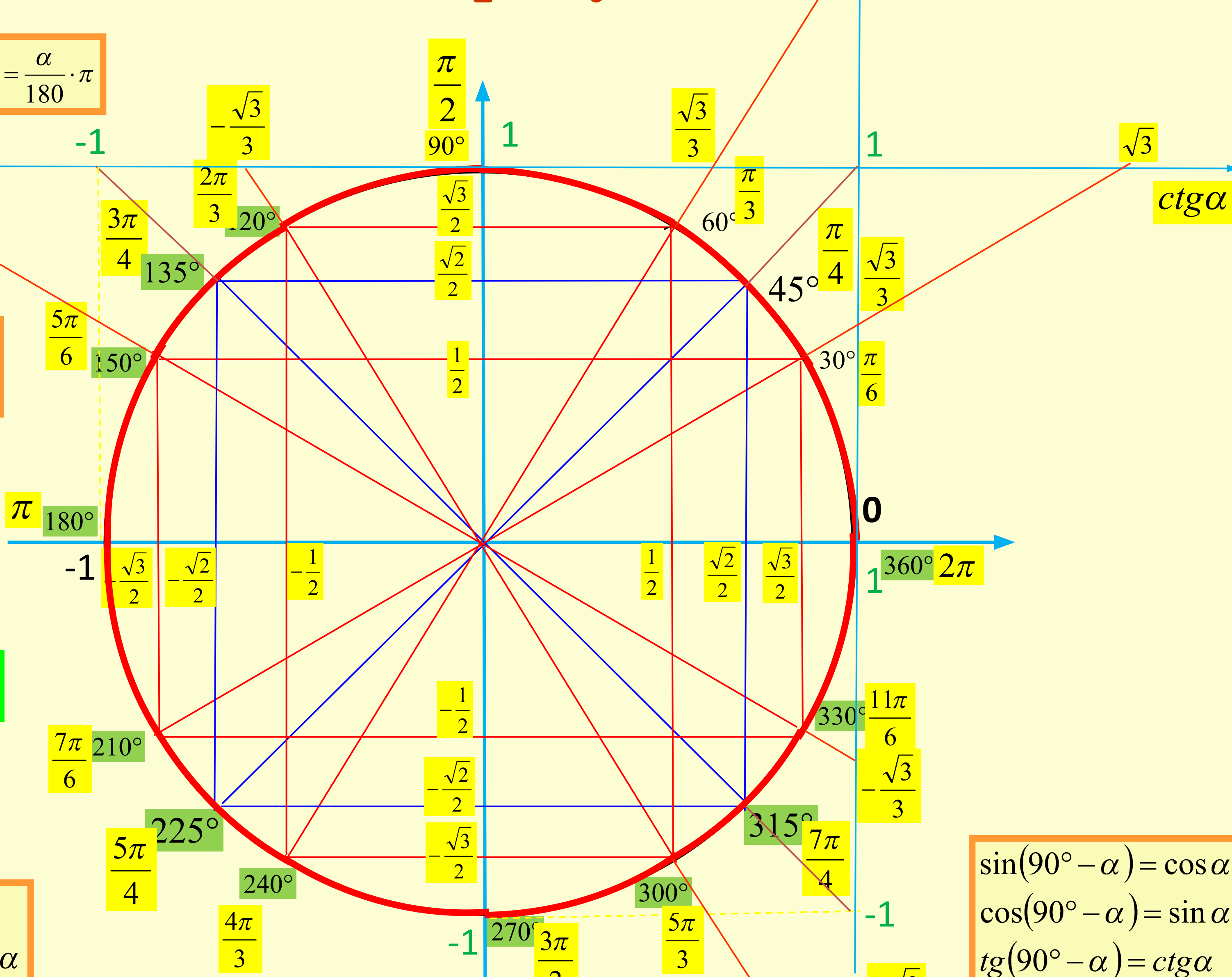
$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

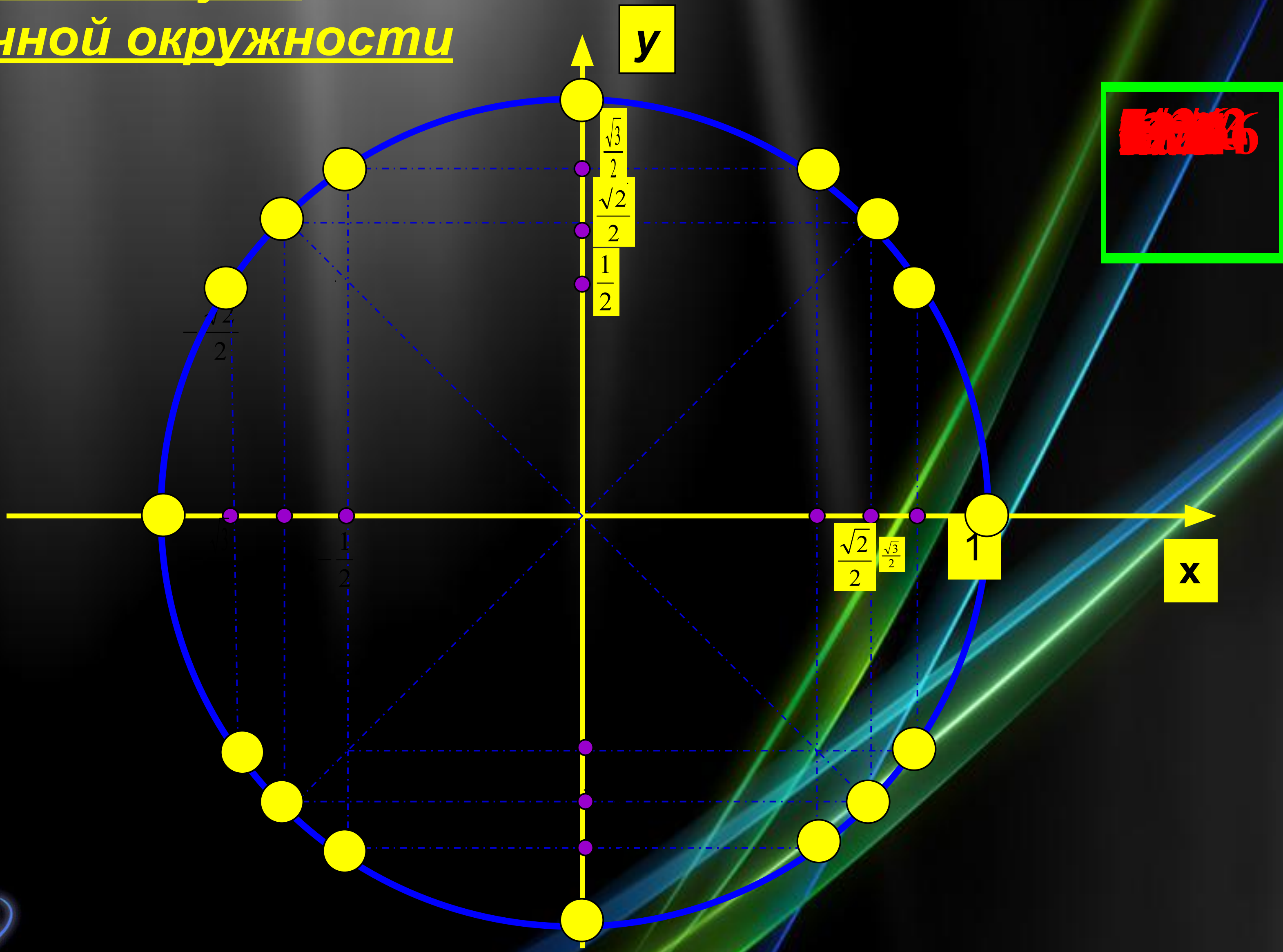
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$tg(90^\circ - \alpha) = ctg\alpha$

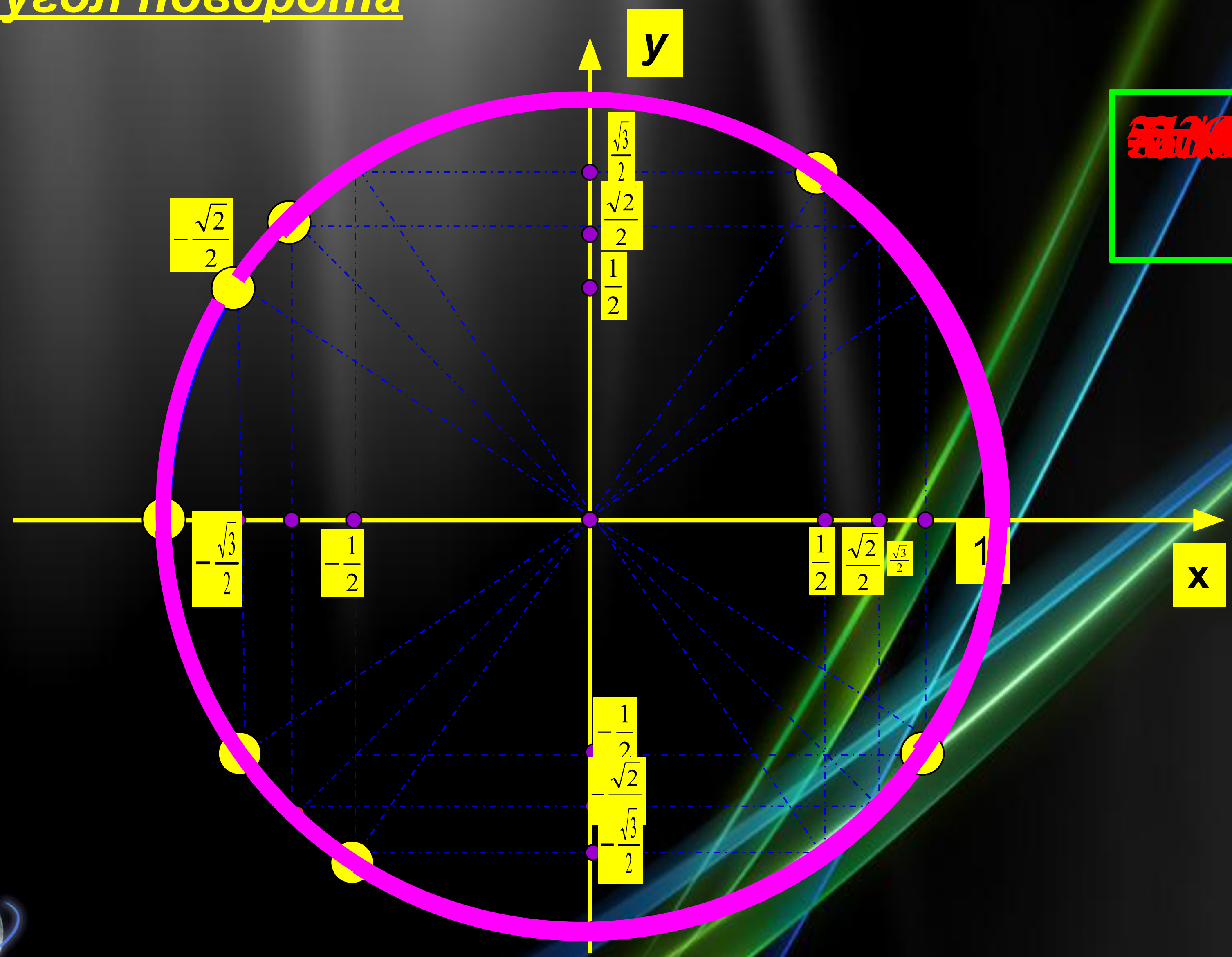
Тригонометр:

отметь точку на единичной окружности



Тригонометр

укажи угол поворота



Об измерении углов на практике

В качестве единицы измерения плоских углов Международной системой единиц (СИ) принят радиан - угол между двумя радиусами круга, вырезающими на его окружности дугу, длина которой равна радиусу данного круга.
Измерение углов в радианах на практике связано с значительными трудностями, так как ни один из современных угломерных приборов не имеет градуировки в радианах.
По этой причине в машиностроении для угловых измерений в основном применяются внесистемные единицы: градус, минута и секунда. Эти единицы связаны между собой следующими соотношениями:

- *1 рад = 57°17265" 206 = ″45′*
- *1° = π/180 рад = 1,745329 × 10^{-2} рад;*
- *1‘ = π /10800 рад = 2,908882 × 10^{-1} рад;*
- *1” = π/648000 рад = 4,848137 × 10^{-6} рад.*

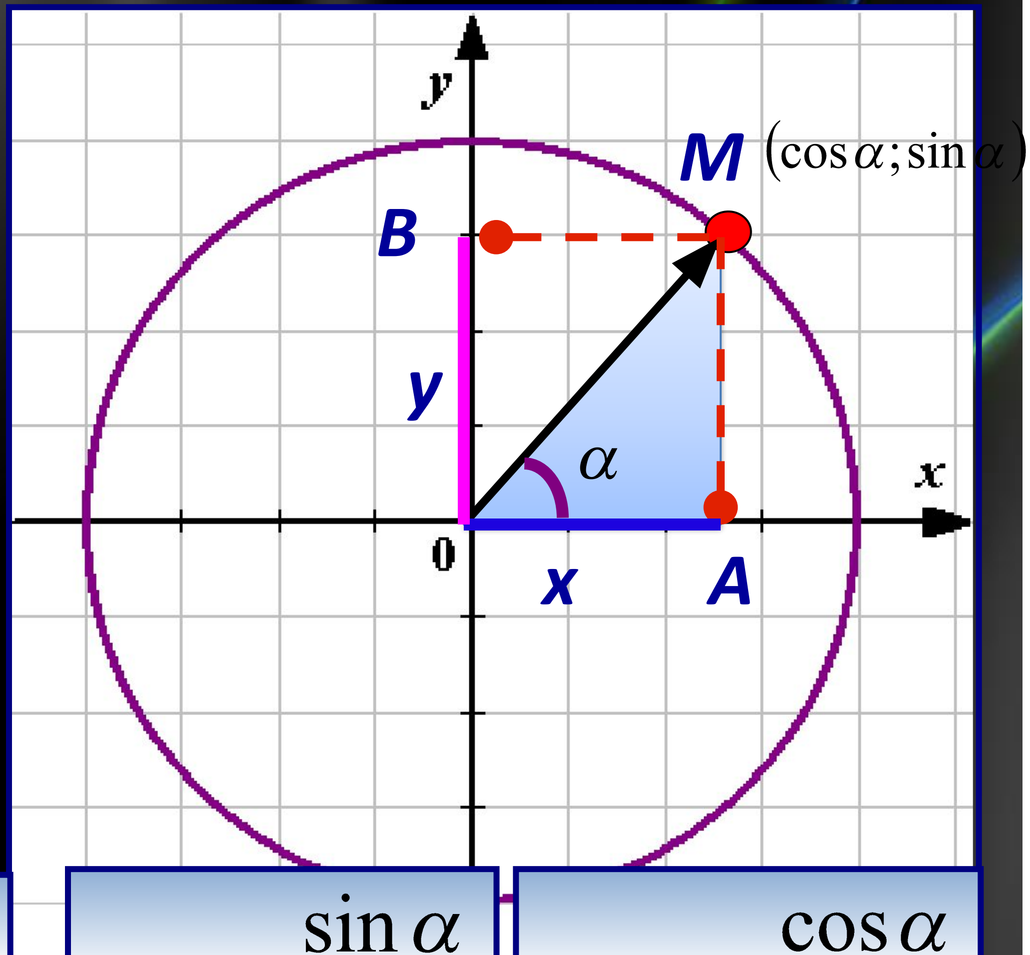
Определение синуса и косинуса

В $\triangle OMA$:

$OM = 1$

$OA = x;$

$AM = OB = y$



$$\cos\alpha = x$$

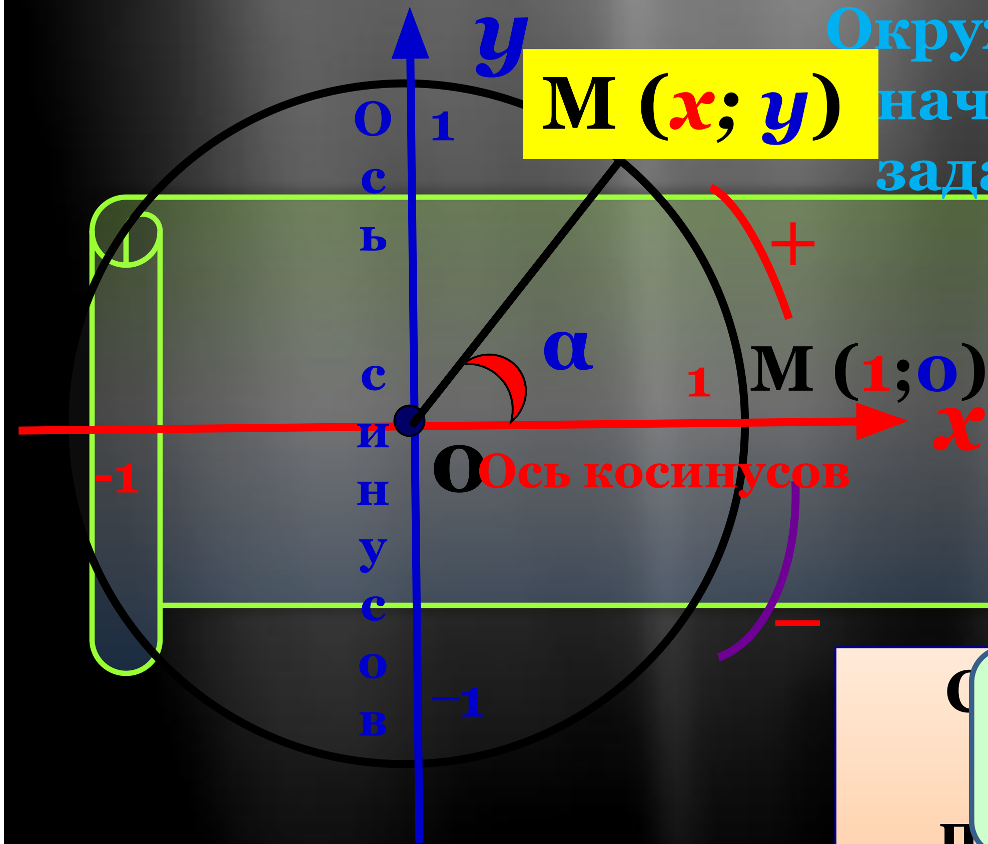
$$\sin\alpha = y$$

По теореме Пифагора:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



Окружность радиуса 1 с центром в начале координат, на которой задана точка М — начало отсчета для измерения углов, и направление положительного обхода, называется единичной (тригонометрической) окружностью

С…

п… и

$$\sin \alpha = y$$

Косинусом угл… точки, полученной по… чала координат н…

$$\cos \alpha = x$$

α существует:

1) **синус** этого угла и притом **единственный;**

2) **косинус** этого угла и притом **единственный**

Значит, есть функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$

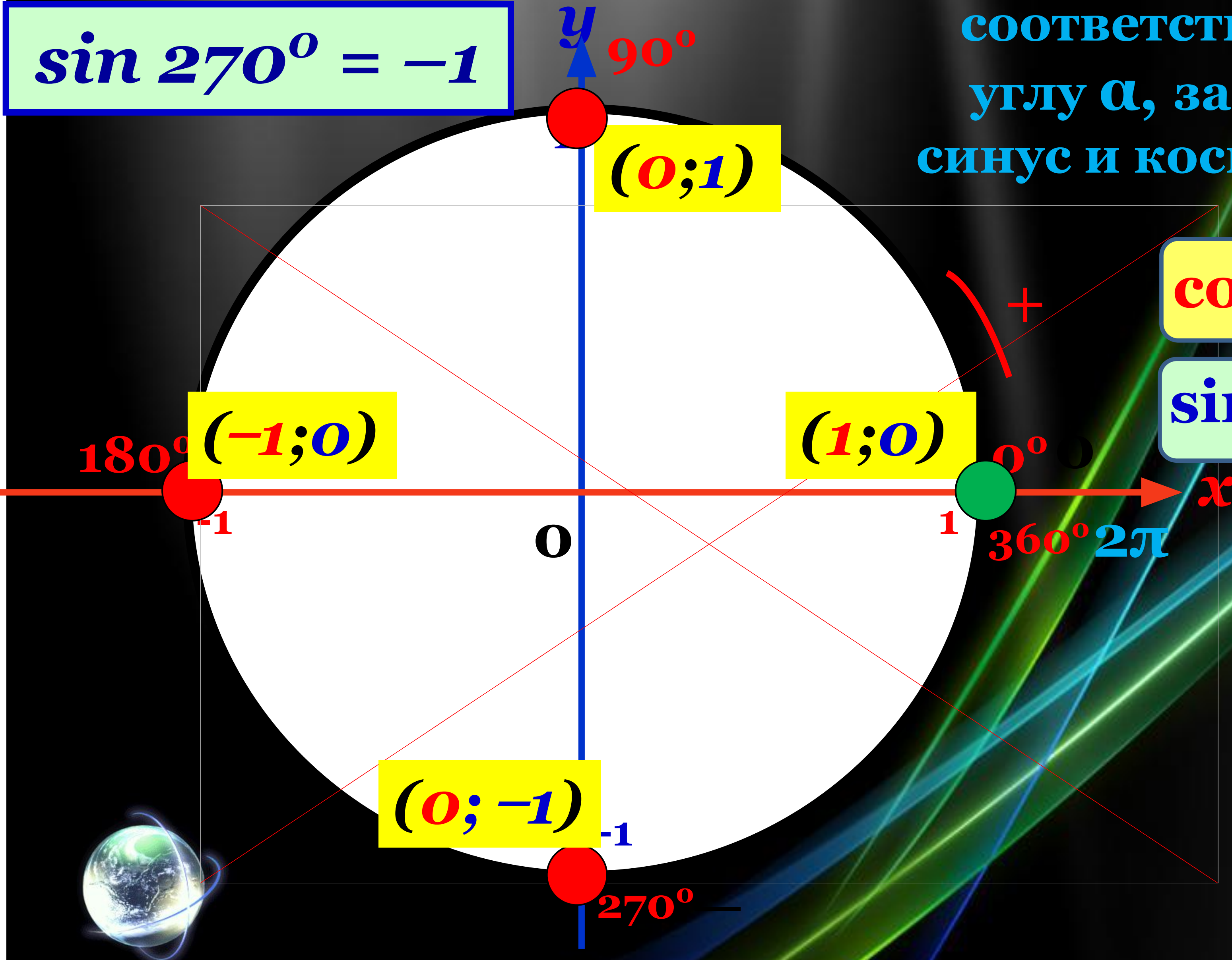
$\cos 270^{o} = 0$

$\sin 270^{o} = -1$

Используя точку, соответствующую углу α, запишите синус и косинус угла,

$\cos \alpha = x$

$\sin \alpha = y$

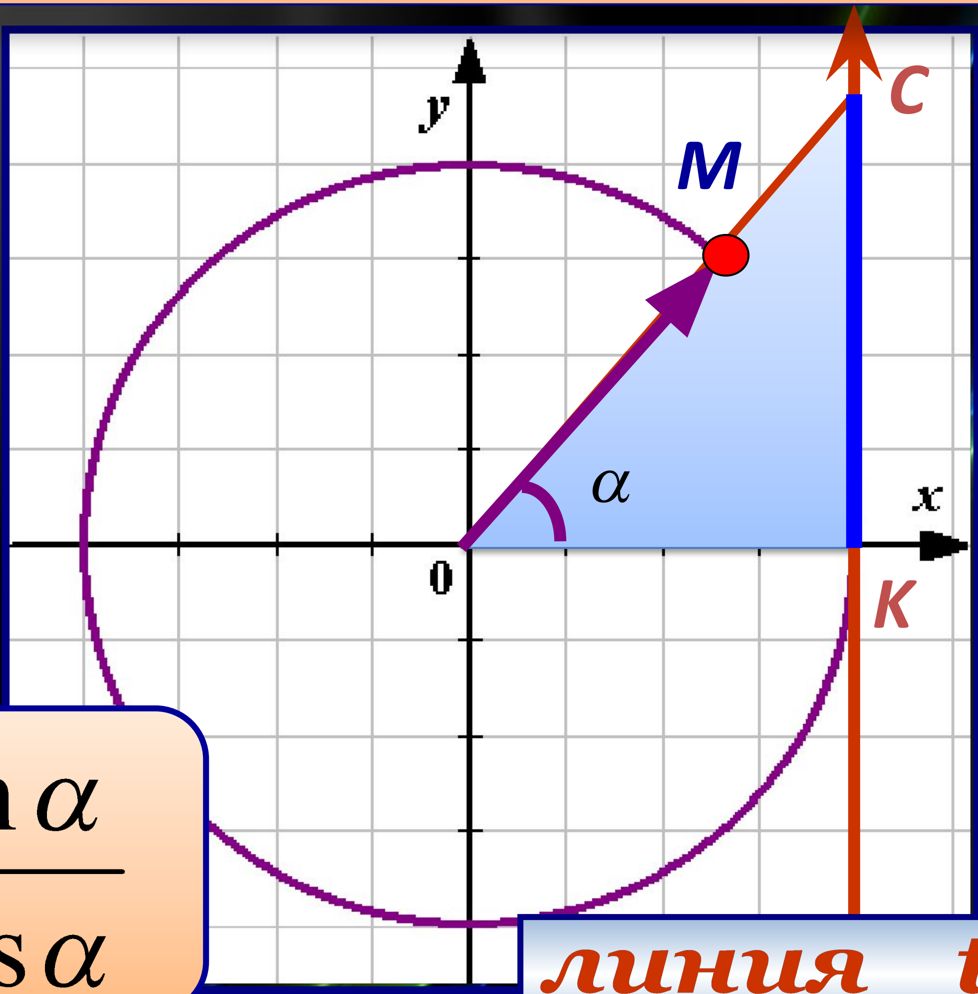


Определение тангенса

Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу.

В ΔKOC:

$$tg\alpha = \frac{KC}{OK} = \frac{KC}{1} = KC$$



$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

линия $tg\alpha$

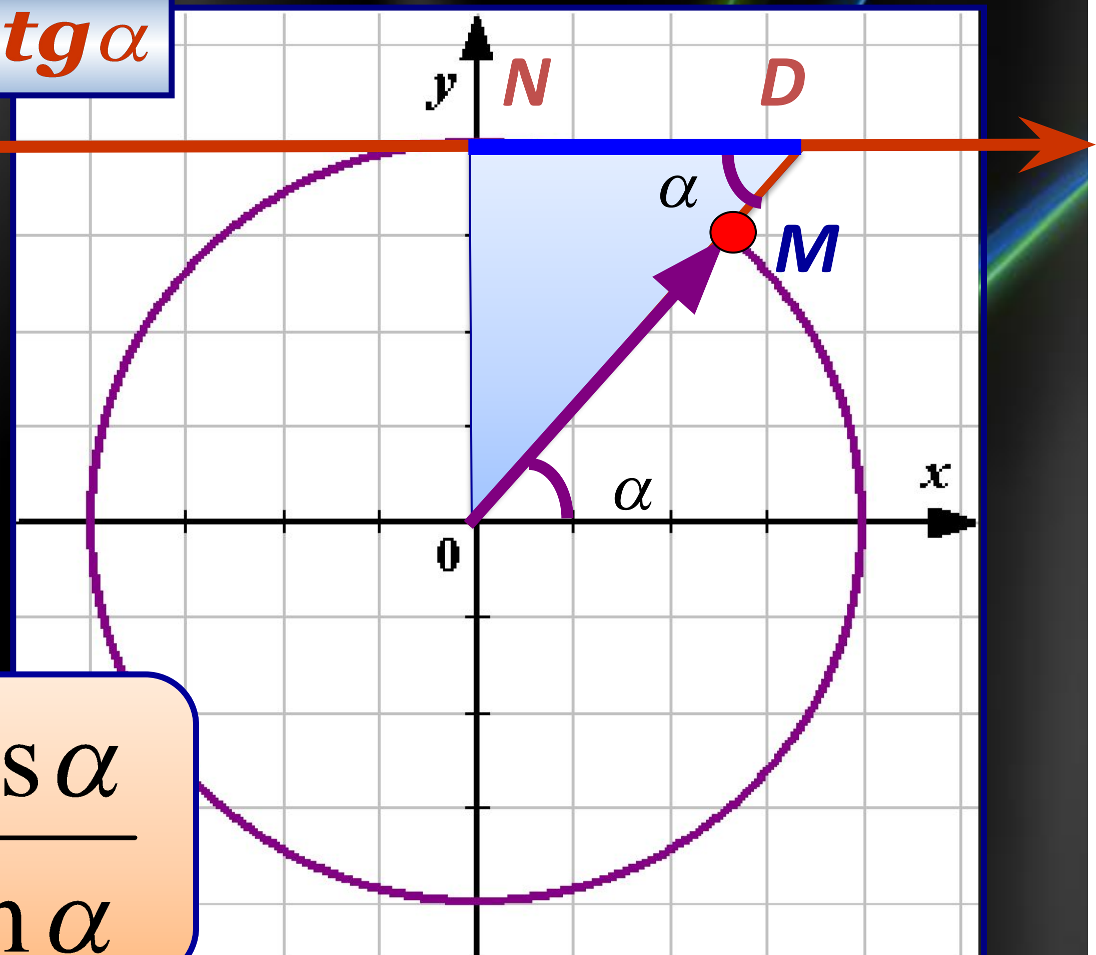
Определение котангенса

Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу.

линия $ctg\alpha$

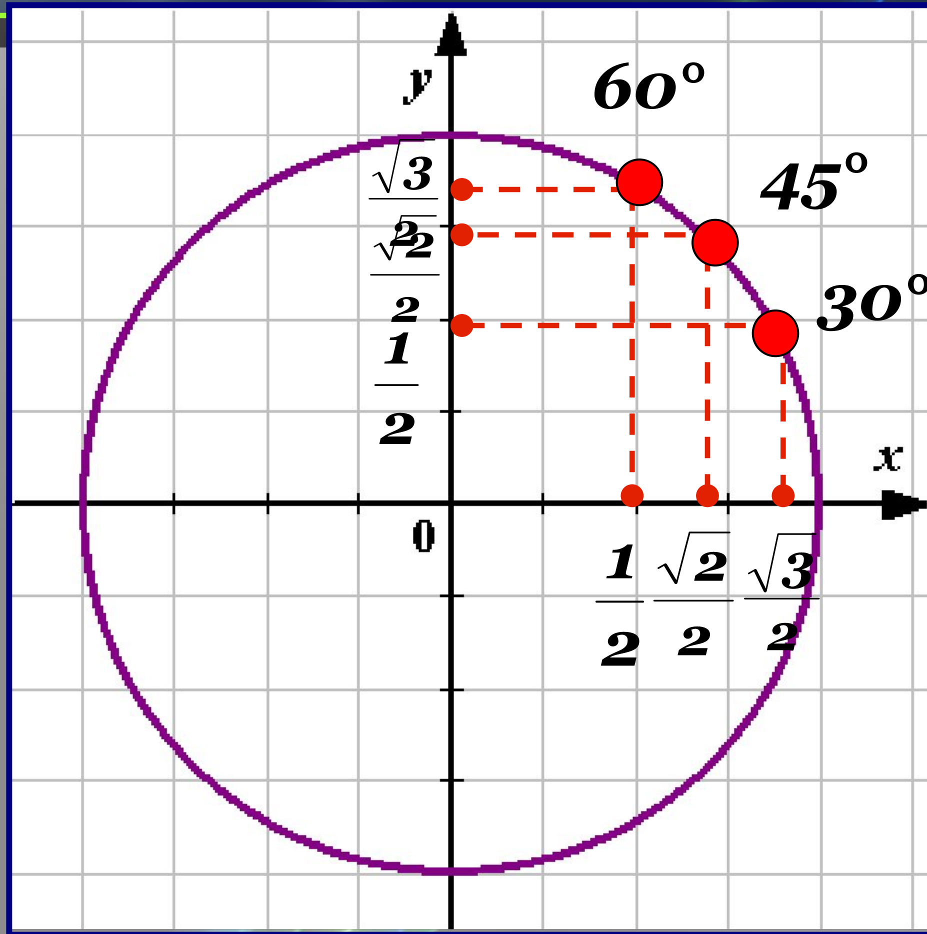
В ΔODN :

$$ctg\alpha = \frac{NД}{ON} = \frac{NД}{1} = NД$$

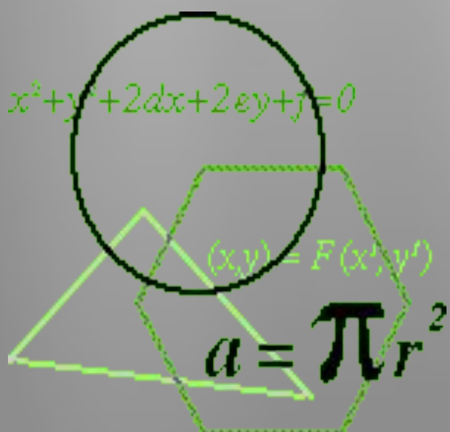


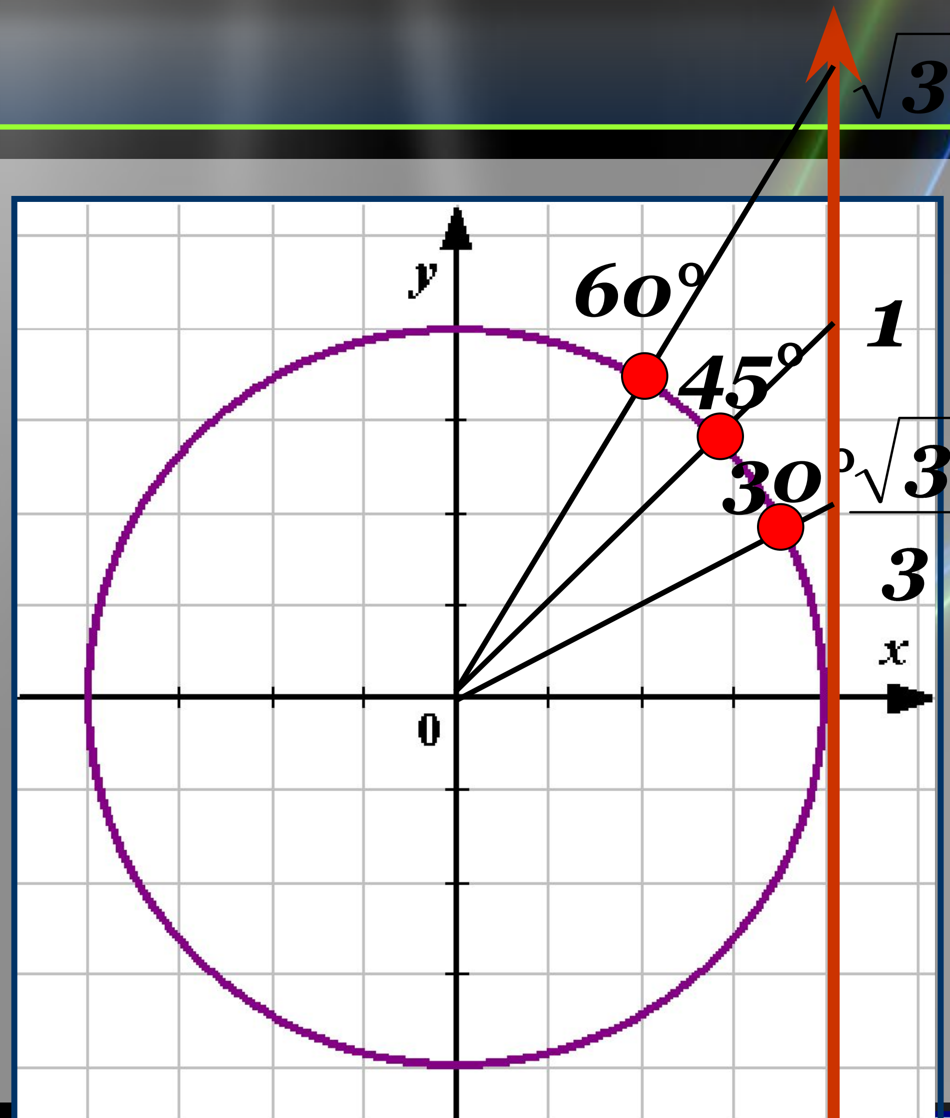
$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Значения синуса и косинуса



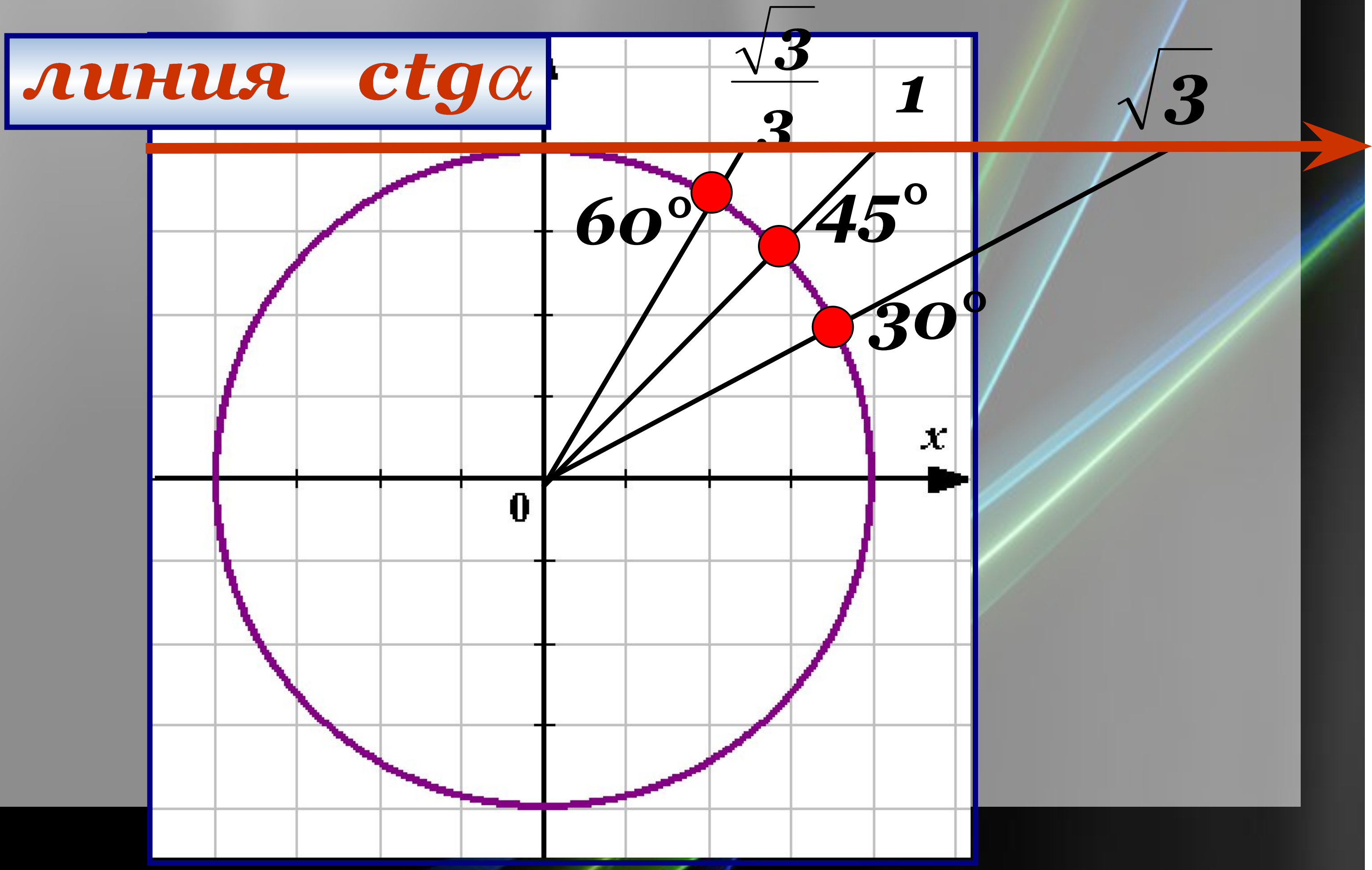
Значения тангенса



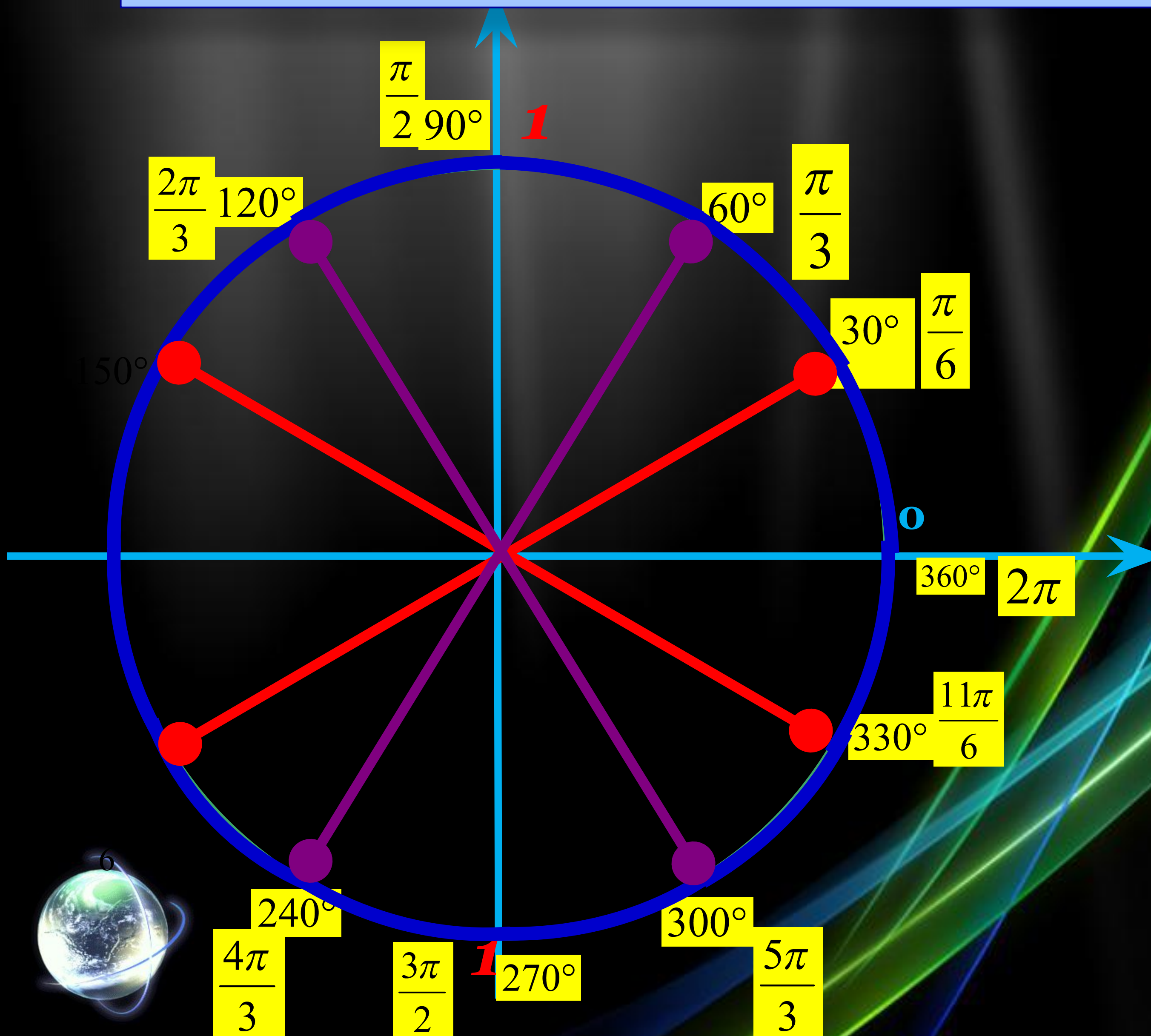


линия $tg\alpha$

Значения котангенса



Значения тригонометрических функций для некоторых углов



Значения тригонометрических функций для некоторых углов

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Значения тригонометрических функций для некоторых углов

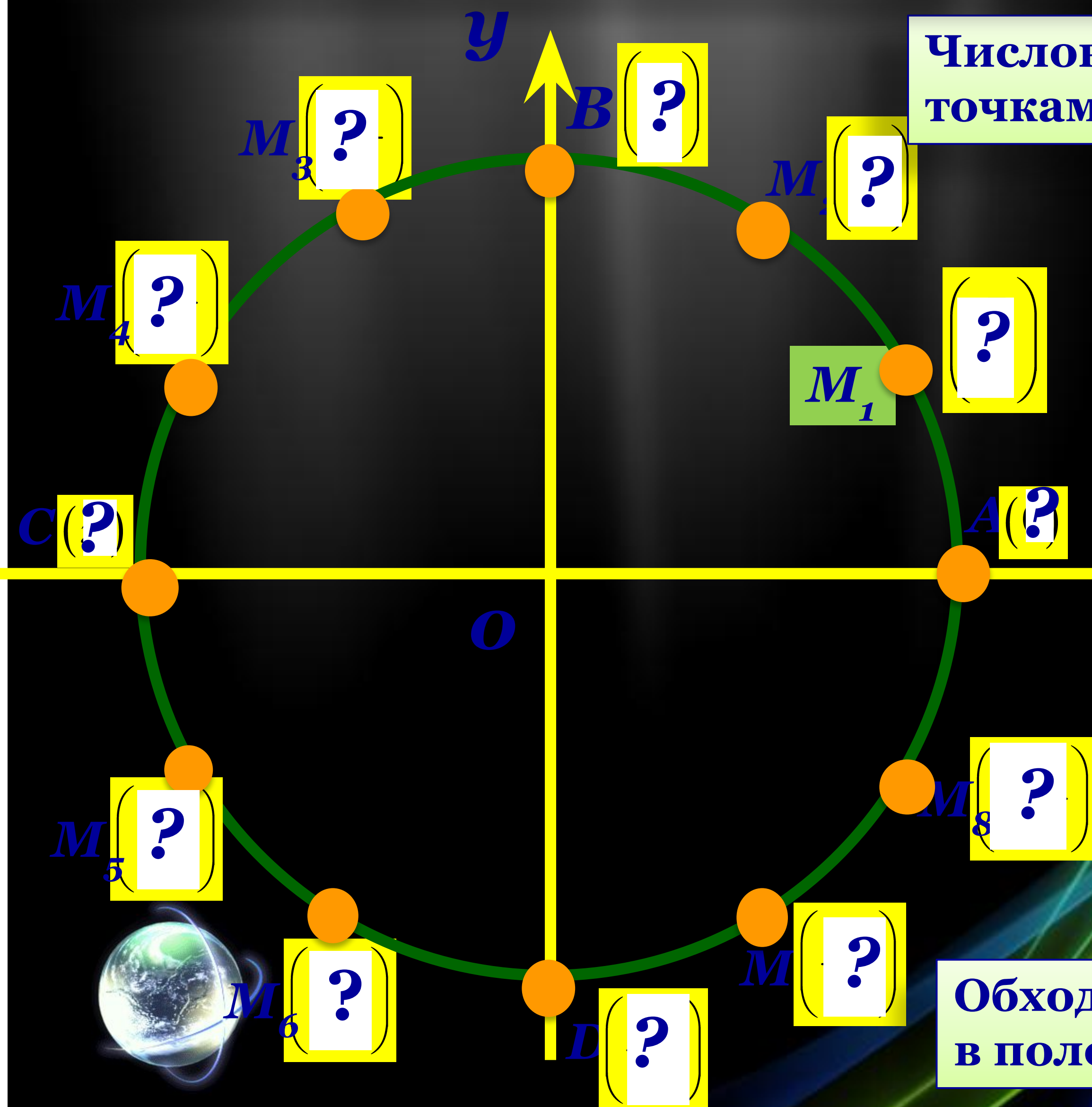
$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Назовите числа t, соответствующее точкам числовой окружности:

Числовая окружность разделена точками на 12 равных частей

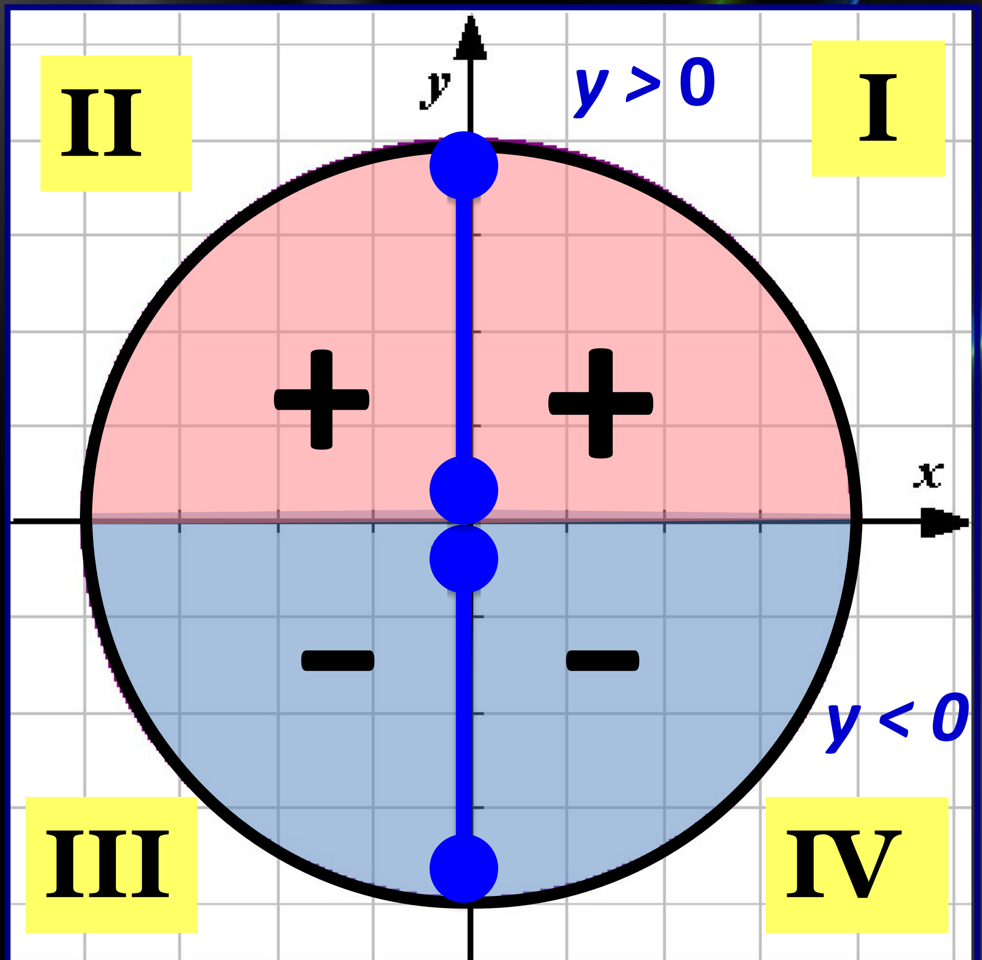
$$0 \le t \le 2\pi$$



Обход окружности совершается в положительном направлении

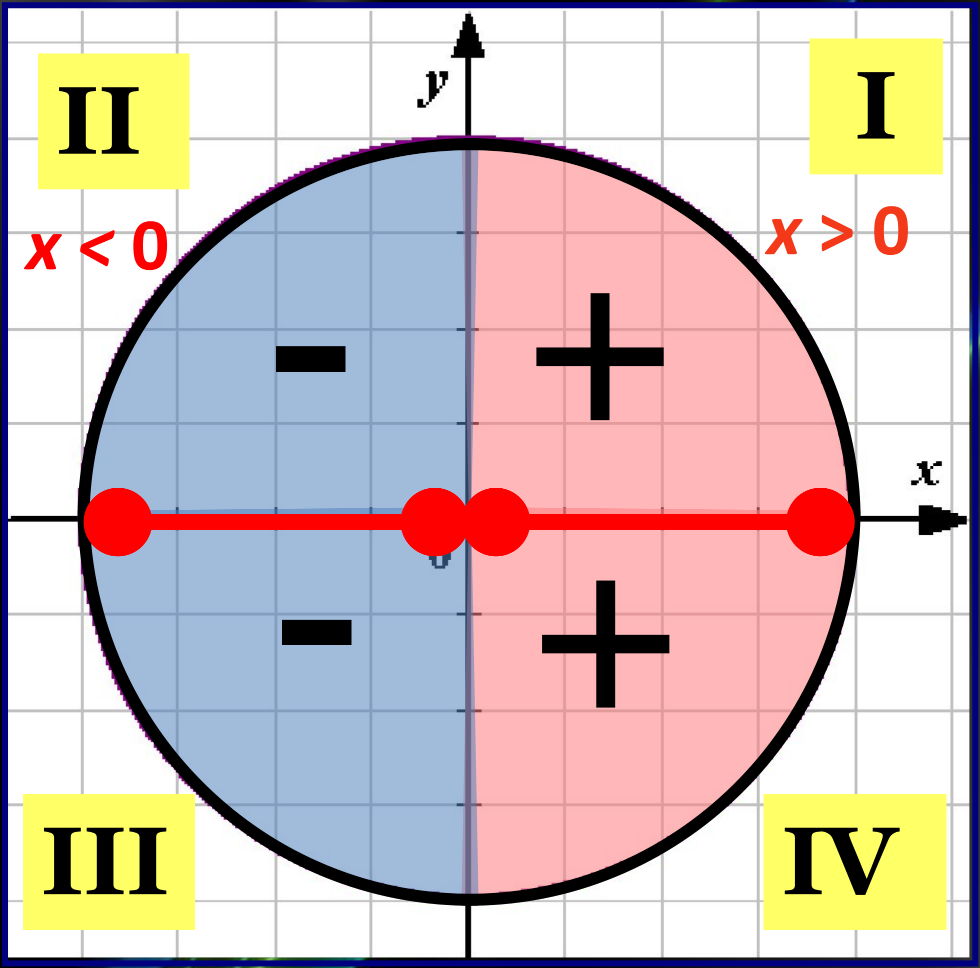
Знаки синуса и косинуса по четвертям

$\sin\alpha = y$

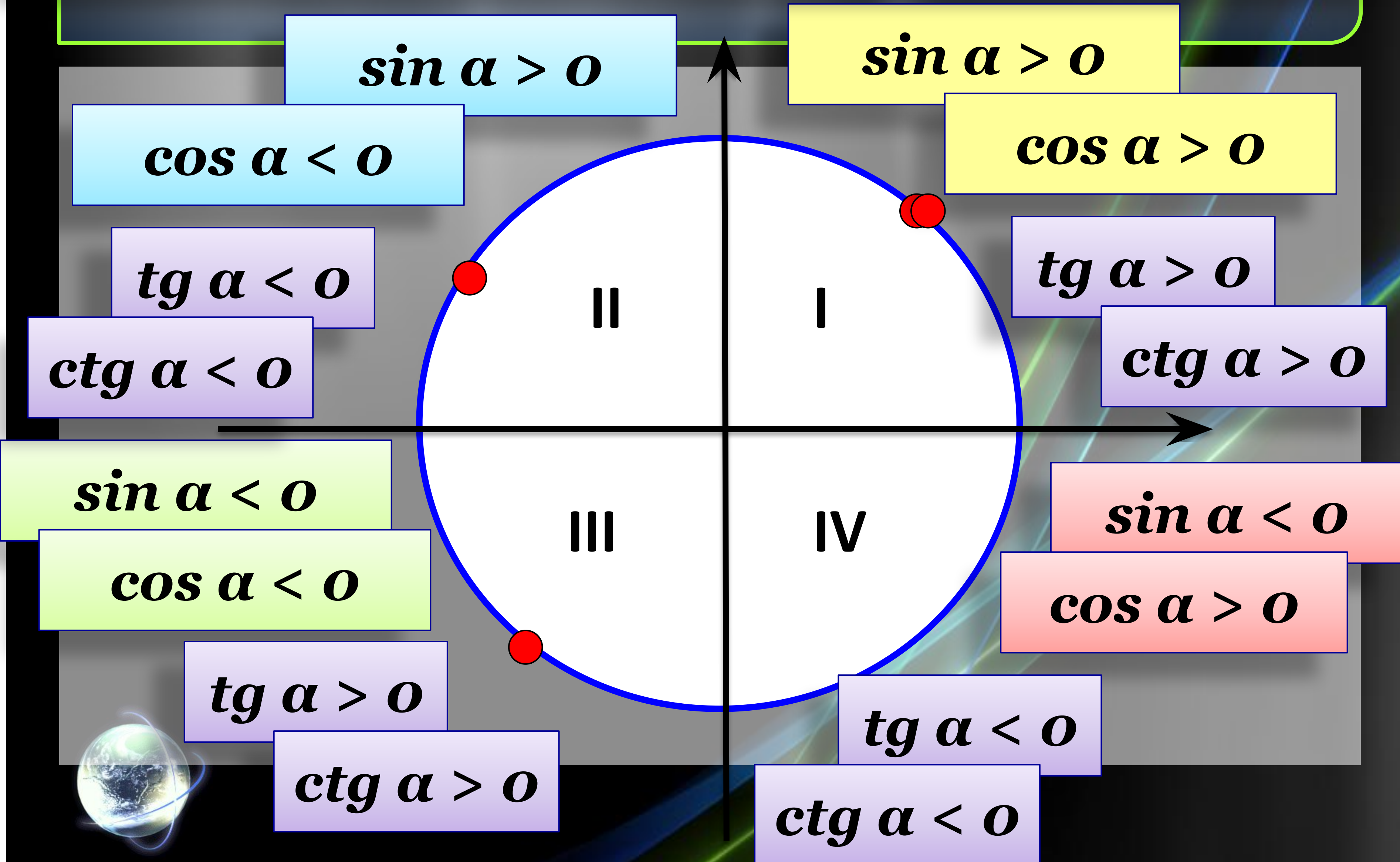


Знаки синуса и косинуса по четвертям

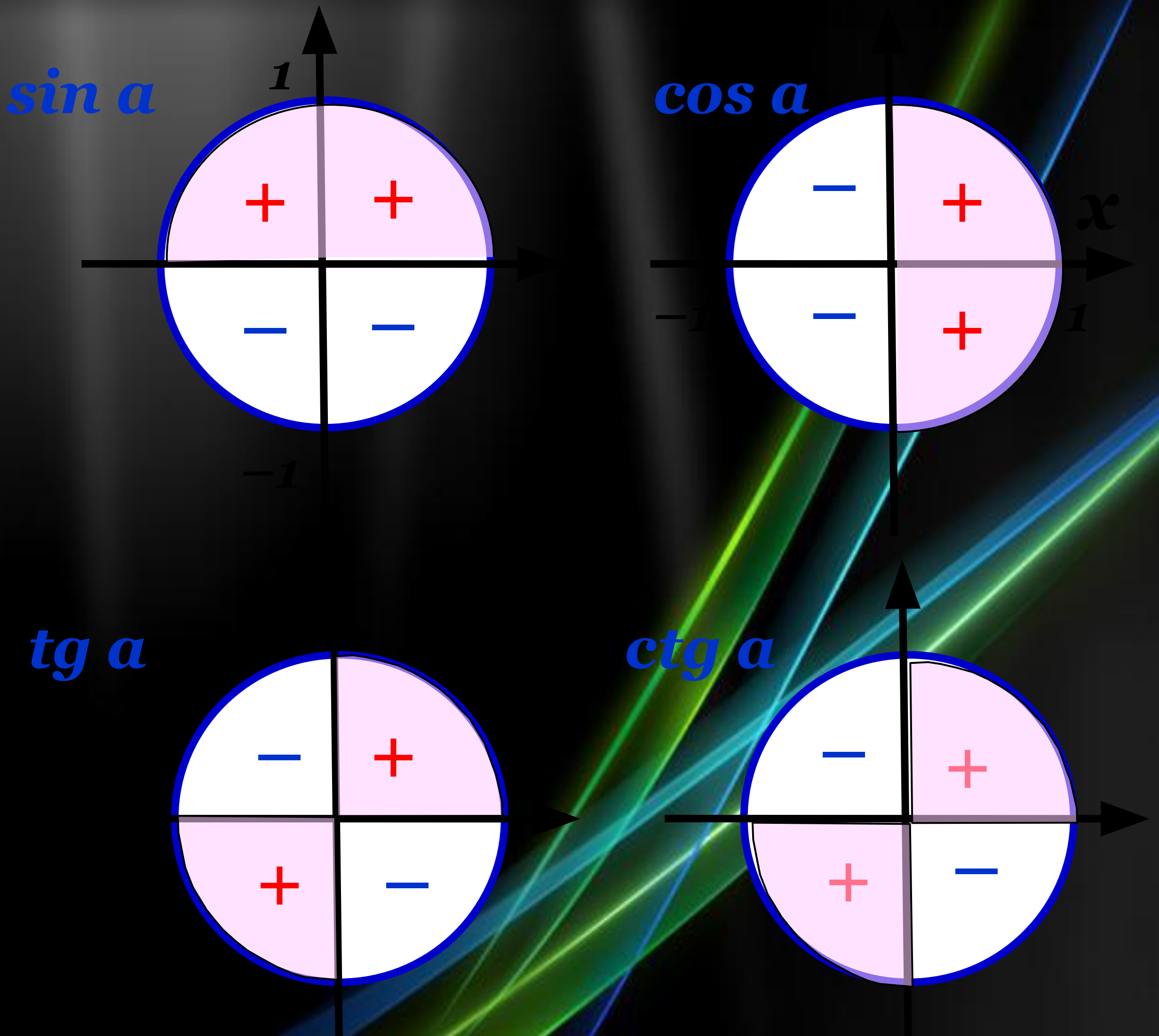
$\cos\alpha = x$

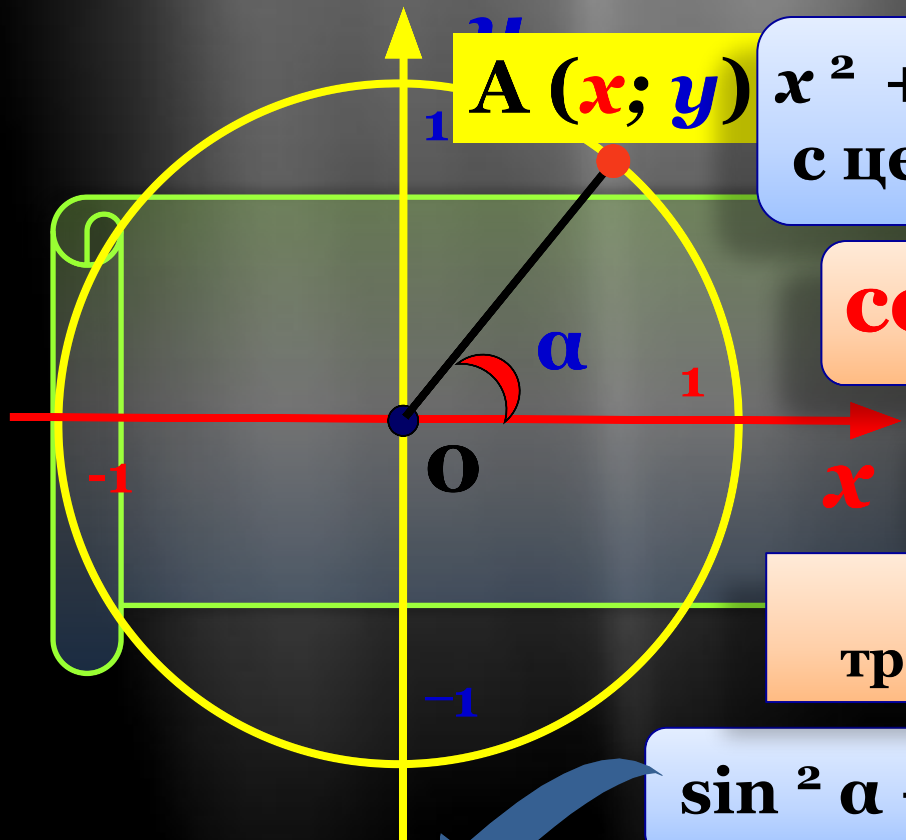


Знаки синуса и косинуса по четвертям



Знаки тригонометрических функций





$x^2 + y^2 = 1$ – ур - е окружности с центром в начале координат

$\cos\alpha = x$

$\sin\alpha = y$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ или

Это основное тригонометрическое тождество

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

Для любого угла α справедливы неравенства

$-1 \le \sin\alpha \le 1$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

или

$|\sin\alpha| \le 1$

$|\cos\alpha| \le 1$

Справедливы формулы

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

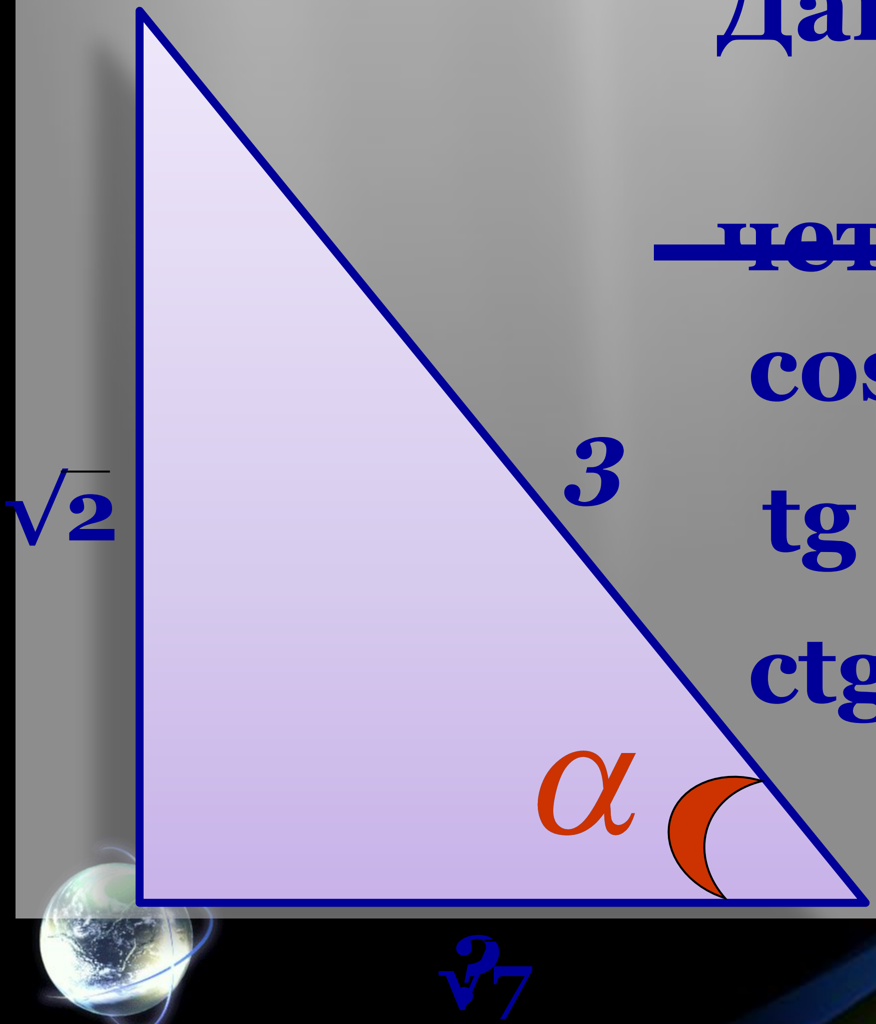
Посчитаем устно! Устный счет – «ум в порядок приводит»!

А, слабо решить задачу?

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

Дано: $\sin\alpha = \sqrt{2}/3$

$\alpha \in$ I четверти



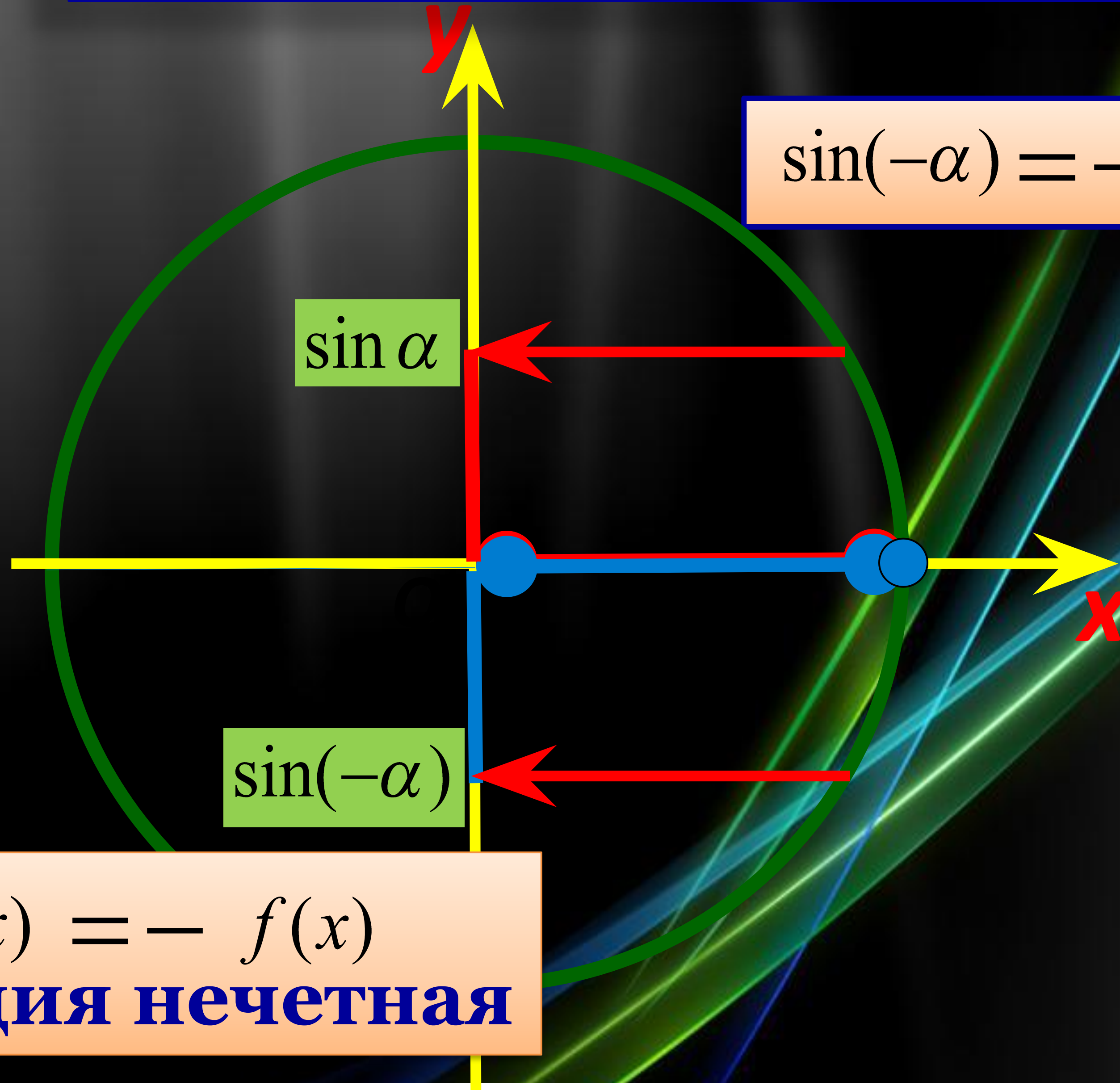
$\cos\alpha = \sqrt{7}/3$

$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}/\sqrt{7}$

$\text{ctg}\,\alpha = \sqrt{7}/\sqrt{2}$

Синус углов α и – α

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

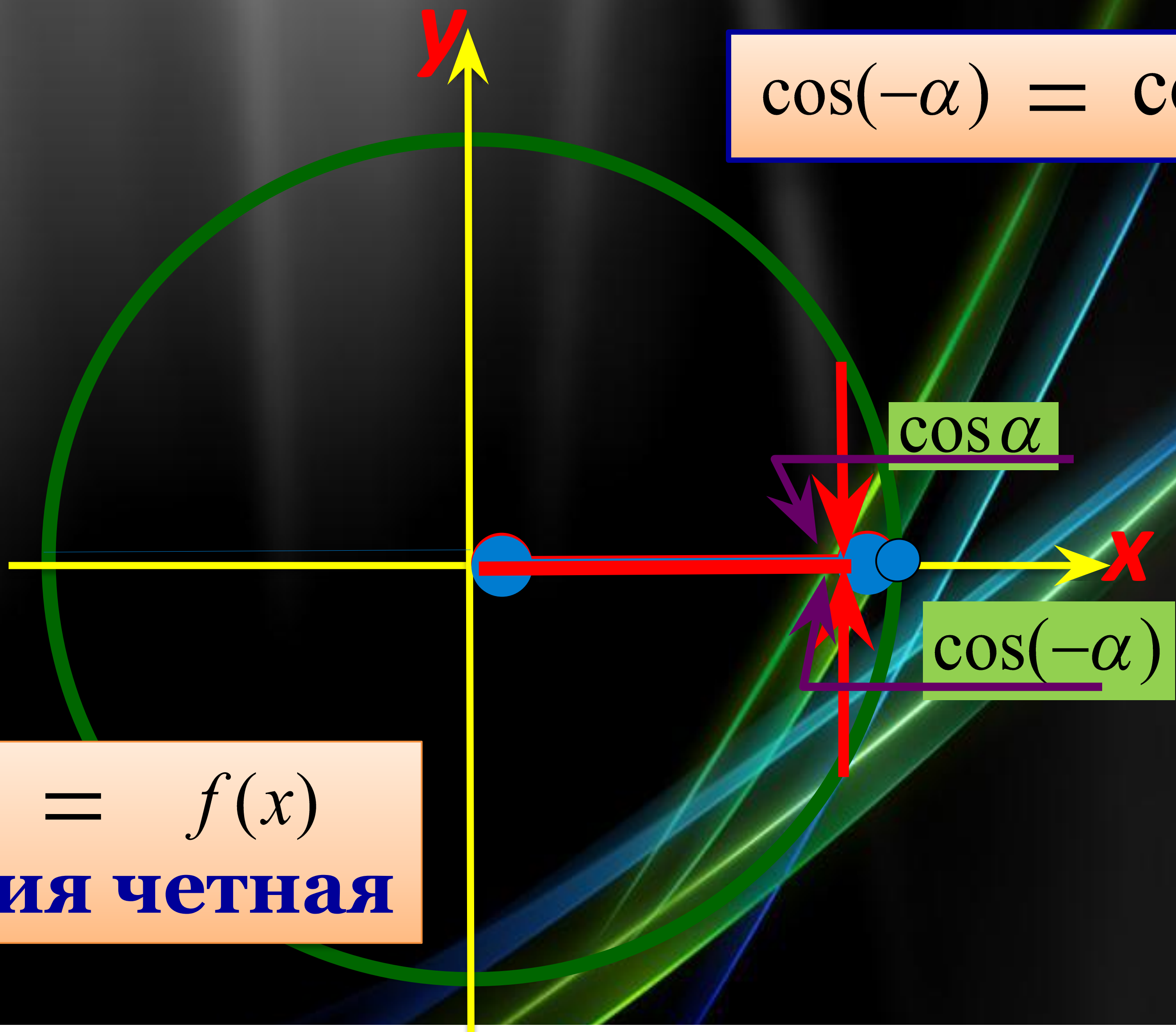


$$f(-x) = -f(x)$$

Функция нечетная

Косинус углов α и – α

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$



$$f(-x) = f(x)$$

Функция четная

Свойство нечетности тангенса

Тангенсы противоположных углов - противоположны

$$tg(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-tg\alpha$$

$$\mathbf{tg\,(-\alpha)=-tg\,\alpha}$$

$$\mathbf{ctg(-\alpha)=-ctg\,\alpha}$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и – α:

$f(-x) = f(x)$

Функция четная

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$f(-x) = -f(x)$

Функция нечетная

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -tg\alpha$

$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -ctg\alpha$

Формулы приведения

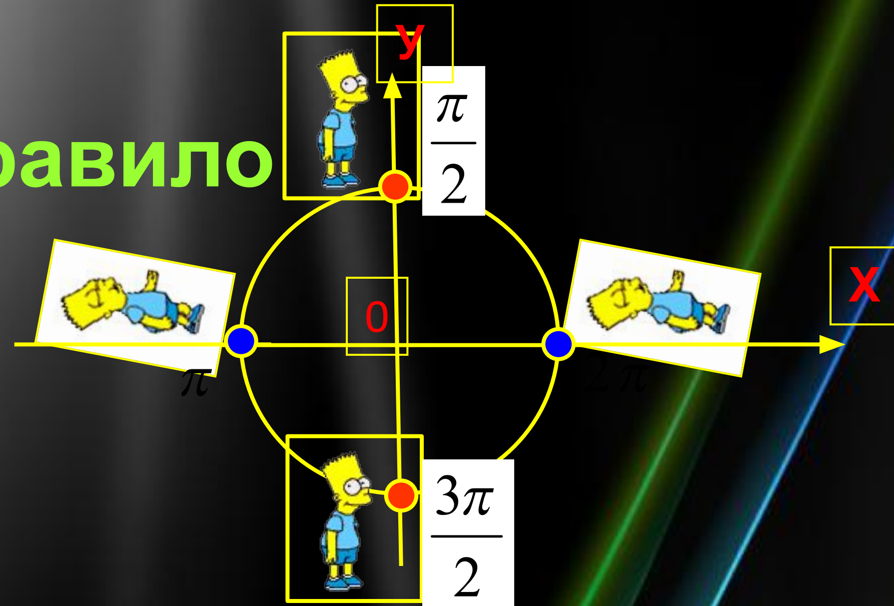
Не изменяют наименовании функции.

Изменяют наименовании

Примеры:

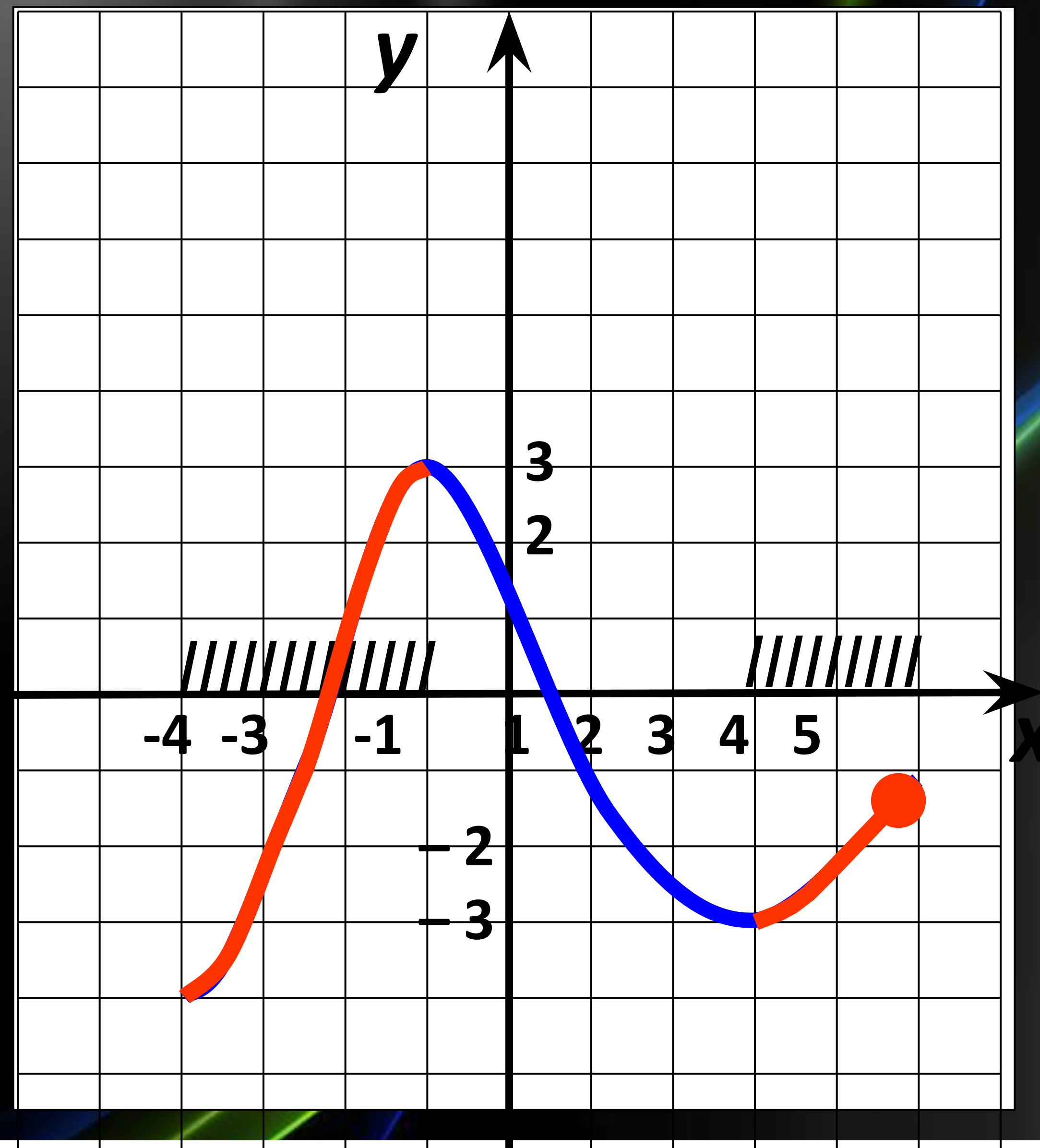
Знак и четверть определяем по той функции , которая была дана изначально.

Правило

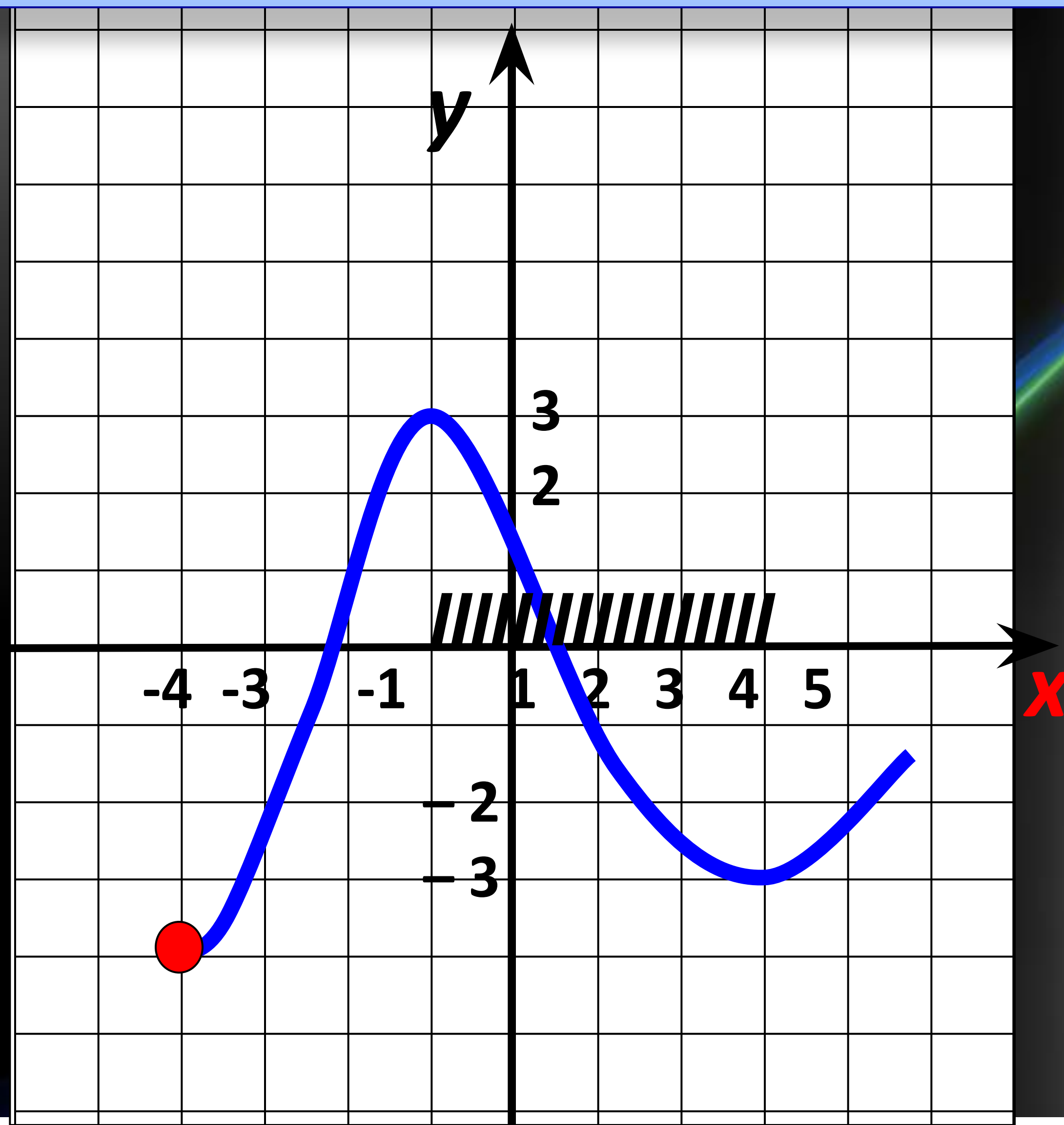


	Приведение через **«рабочие»** углы: $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \ldots$ 	Приведение через **«спящие»** углы: $\pi; 2\pi; 3\pi; \ldots$ 
Название функции	**Меняется на конфункцию**	**Не меняется**
Знак	**Определяется по знаку функции в левой части формулы**	

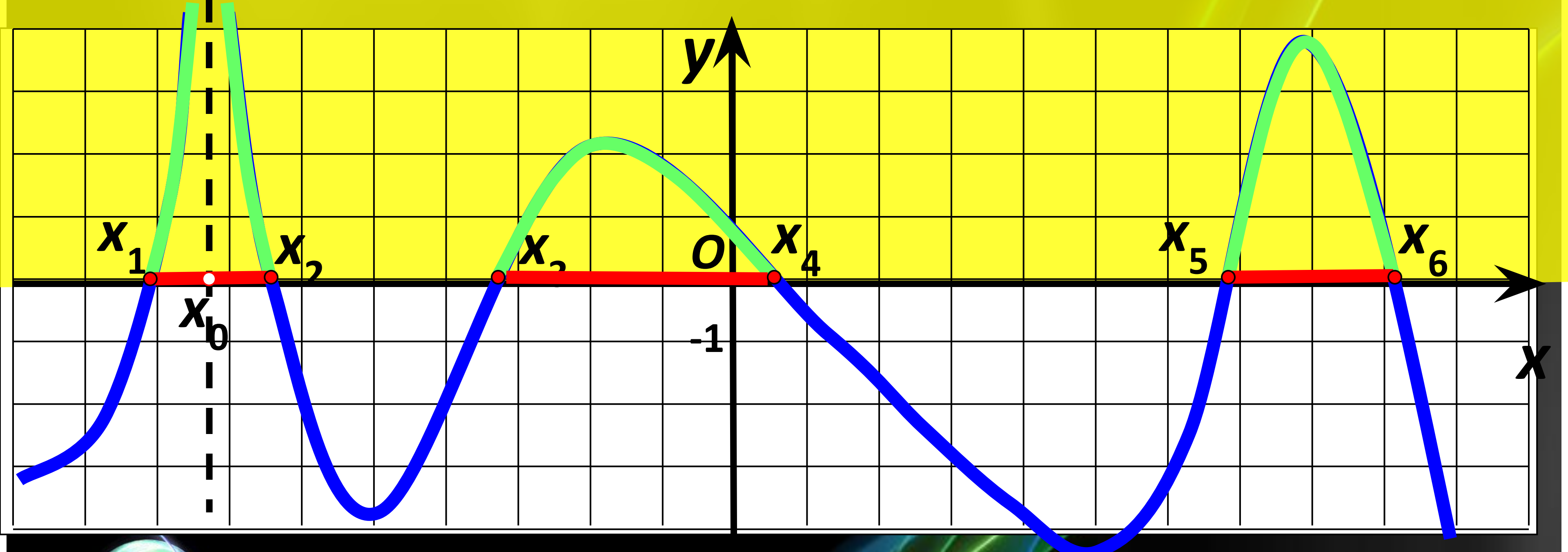
А теперь подумай! Функция y = f(x) задана графиком. Укажите промежуток возрастания этой функции.



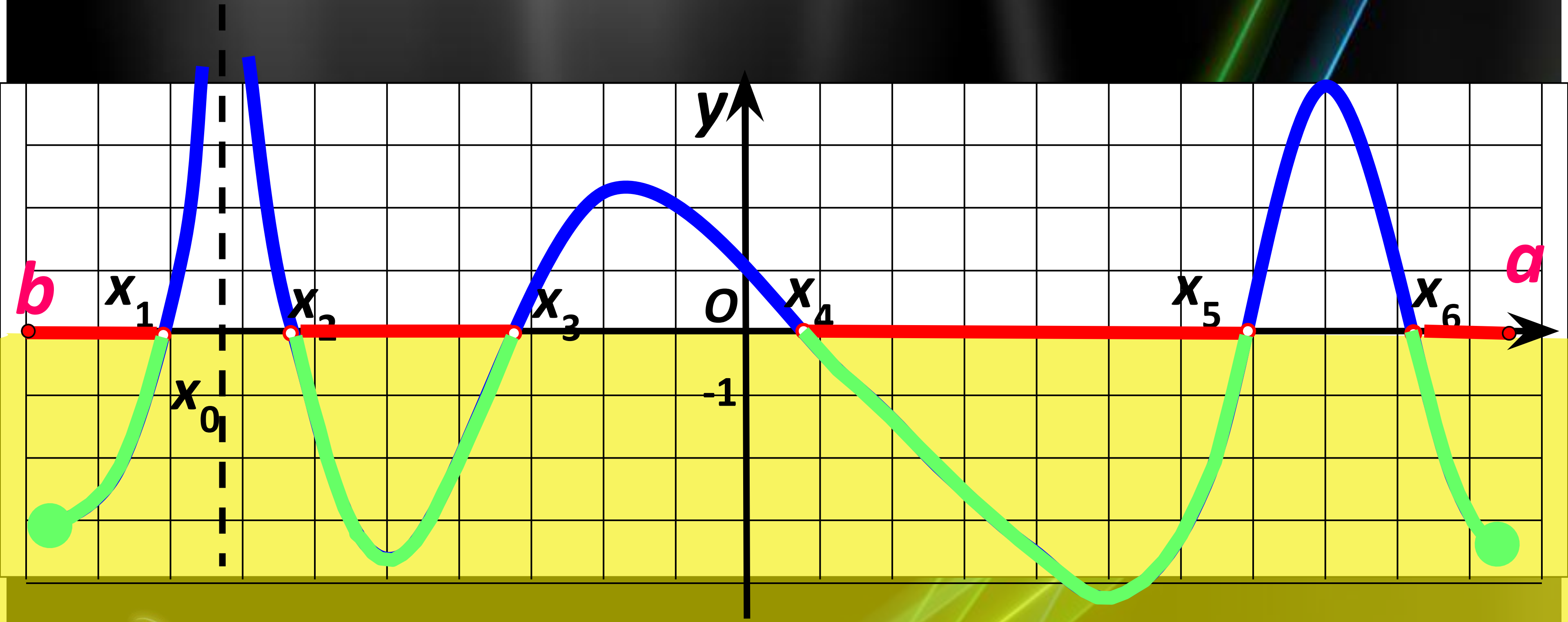
Функция у = f(x) задана графиком. Укажите промежуток убывания этой функции.



Функция y = f(x) задана графиком. Найдите значения x, при которых y ≥ 0

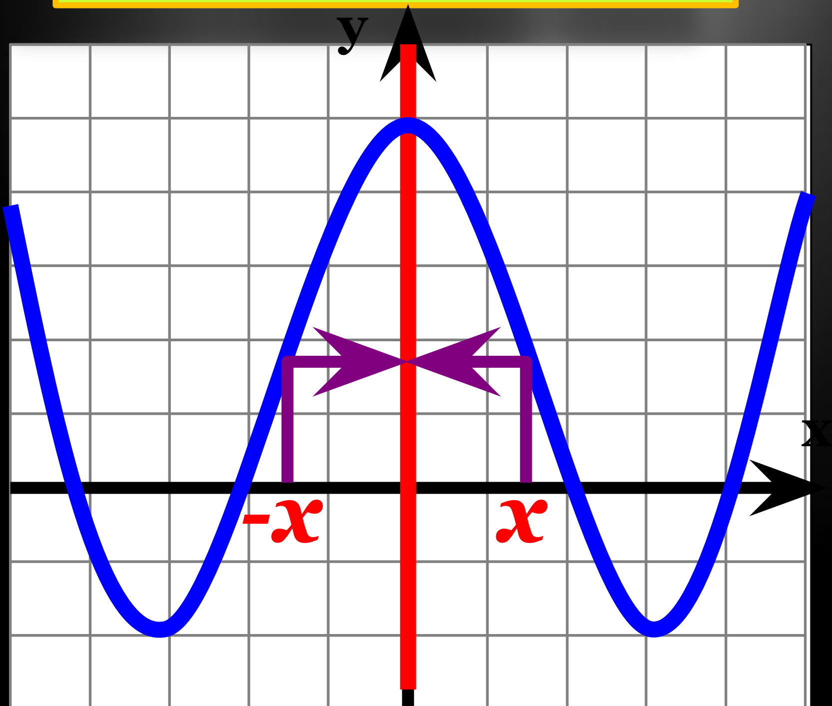


Функция y = f(x) задана графиком. Найдите значения x, при которых y < 0



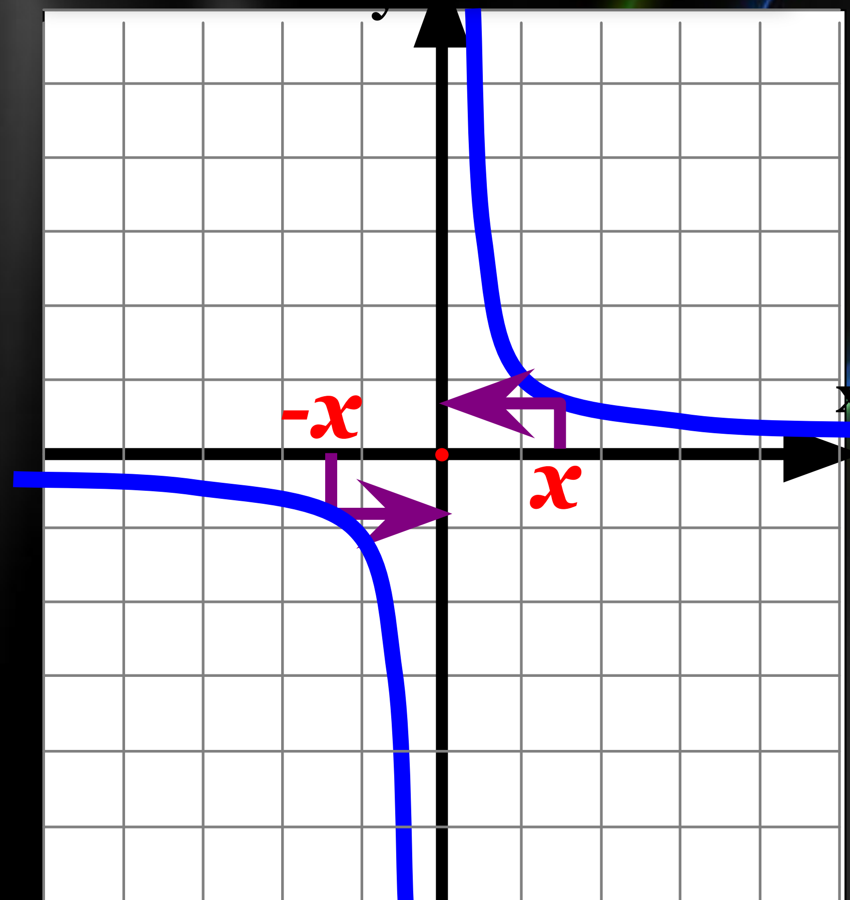
А теперь четность и нечетность!

Четная функция



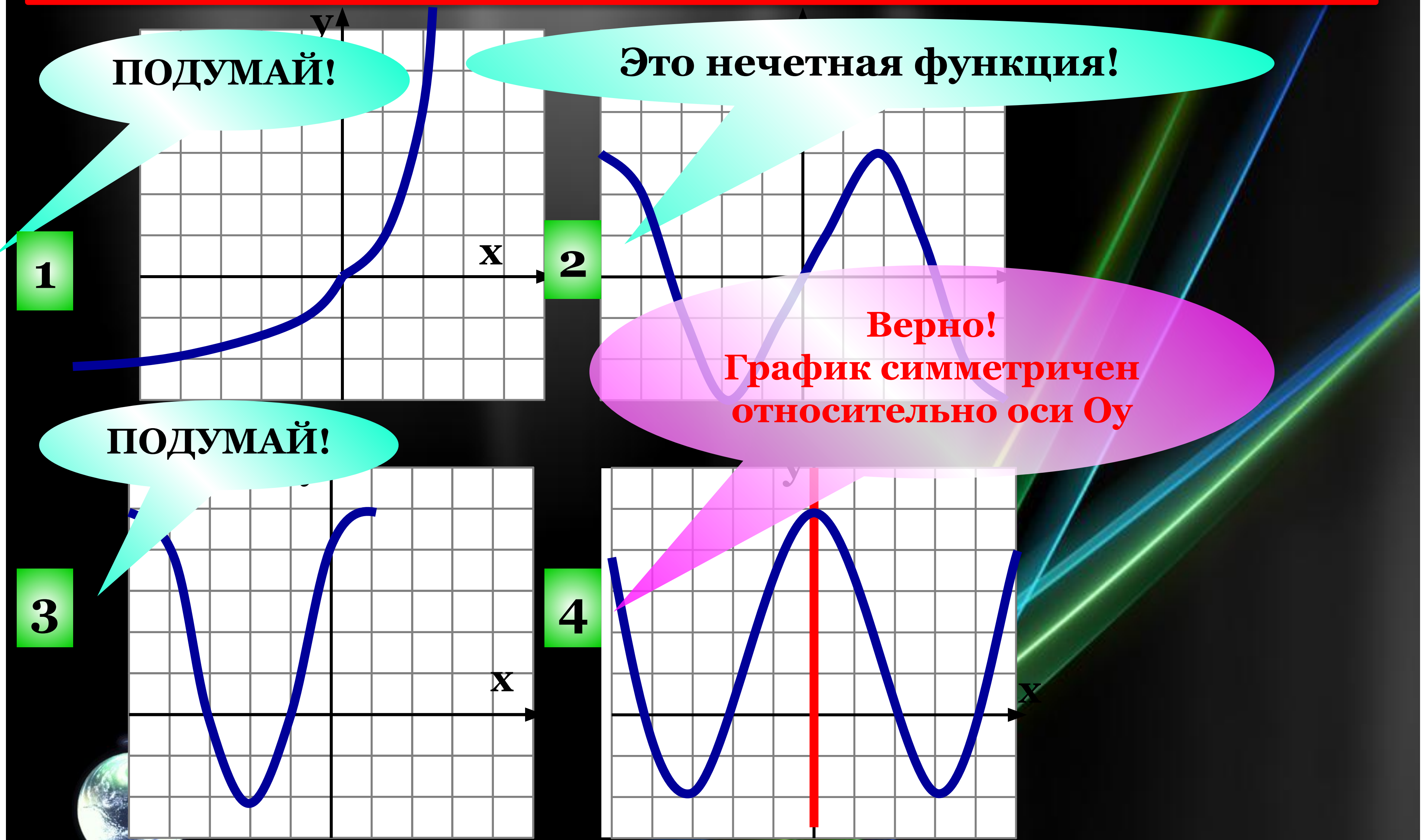
$$f(-x) = f(x)$$

Нечетная функция

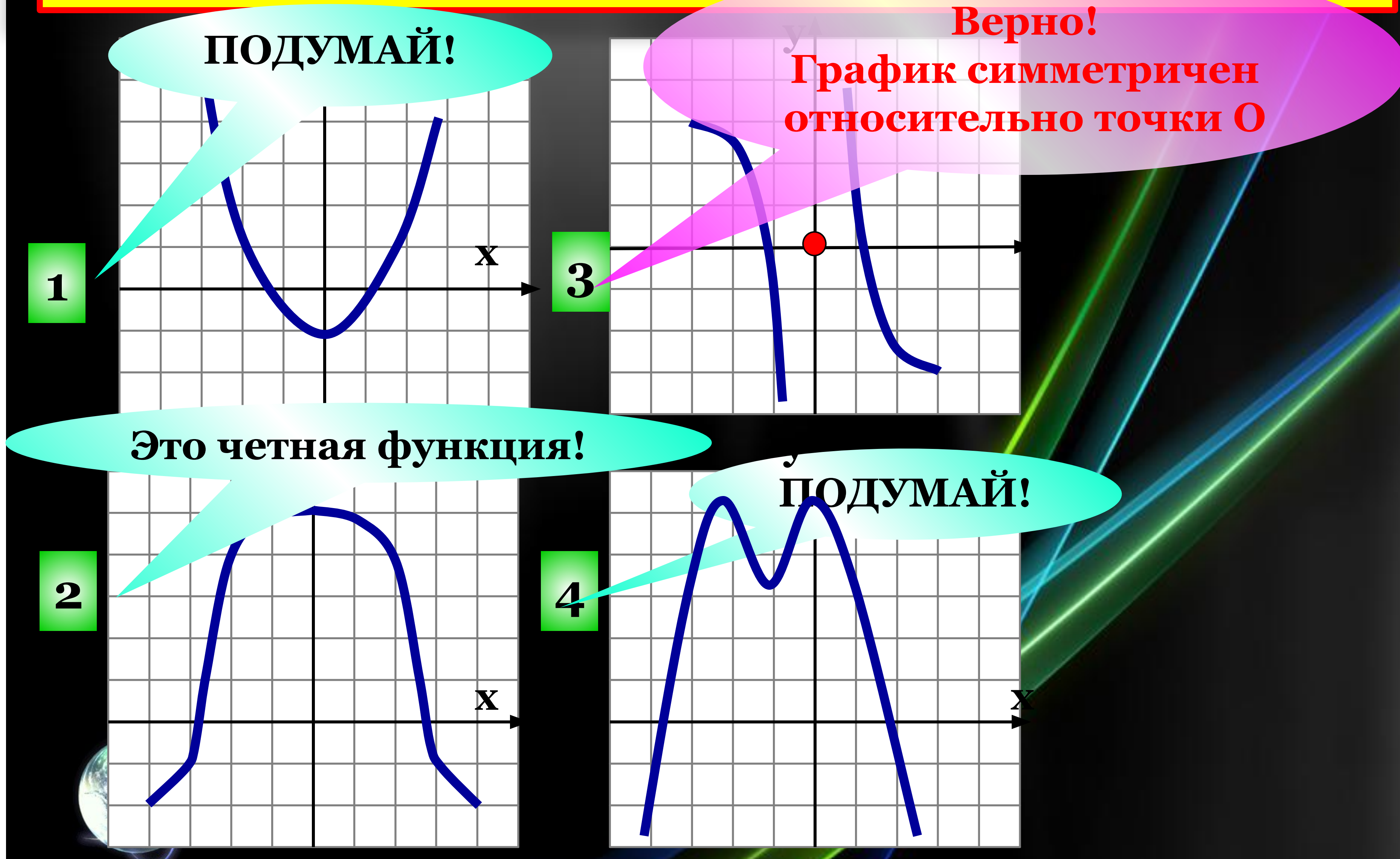


$$f(-x) = -f(x)$$

На одном из следующих рисунков изображен график четной функции. Укажите этот график.



На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот график.



Свойства функции

Функция называется периодической, если существует такое число Т≠ 0, что для любого х из области определения этой функции выполняется равенство:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

число T называют периодом функции $y = f(x)$

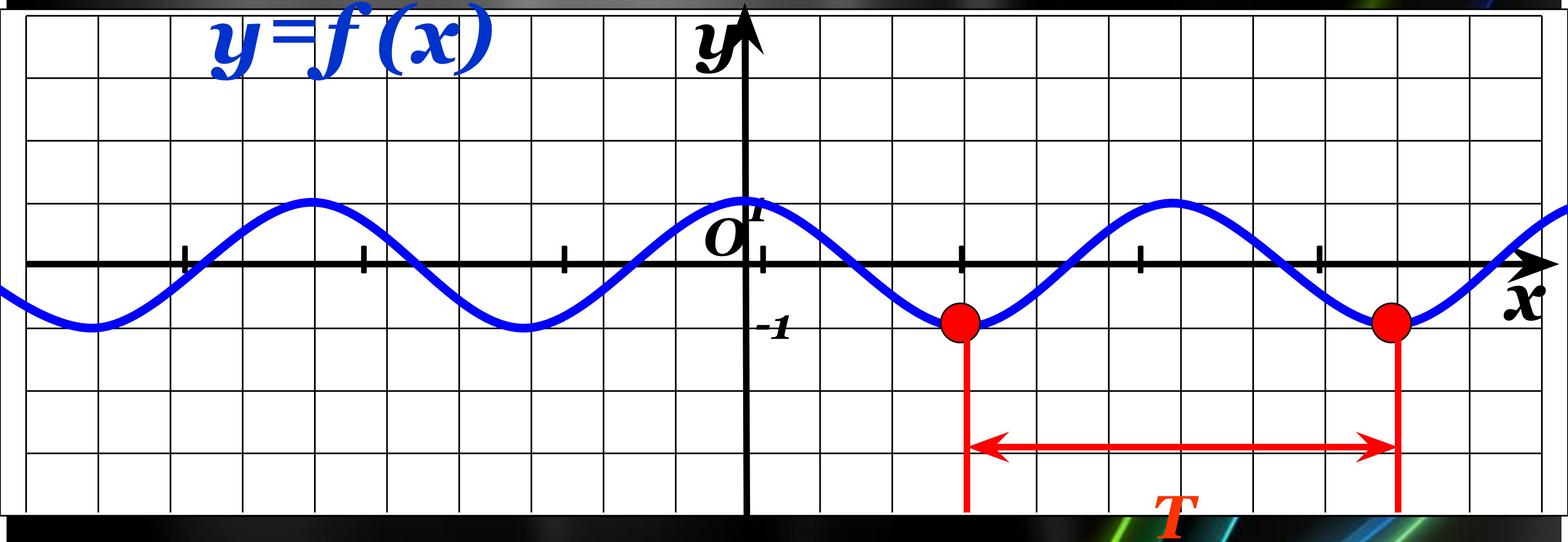


график периодической функции $y = f(x)$

T – период функции

Периодичность sinα, cosα, tgα и ctgα.

Формулы сложения

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta}$$

Вычислить:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 240^\circ = \cos(\underbrace{180^\circ + 60^\circ}_{240^\circ}) =$$

$$= \cos180^\circ\cos60^\circ - \sin180^\circ\sin60^\circ =$$

$$= (-1)\cdot\boxed{\frac{1}{2}} - \overset{=0}{0\cdot\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

α	sin(α)	cos(α)	tg(α)	ctg(α)
0° (0 рад)	0	1	0	***
30° (π/6)	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45° (π/4)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60° (π/3)	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90° (π/2)	1	0	***	0
180° (π)	0	-1	0	***
270° (3π/2)	-1	0	***	0
360° (2π)	0	1	0	***

Упростить выражение:

cos 3α cosα – sinα sin3α =

cos*x*cos*y* – sin*x*sin*y* = cos(*x* + *y*)

= cos(3α + α) = cos 4α.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)=$$

cos*x*cos*y* + sin*x*sin*y* = cos(*x* – *y*)

$$=\cos\left(\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)-\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha-\frac{2\pi}{5}-\alpha\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{7\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\pi=-1$$

Формулы двойного аргумента

Формулы преобразования произведения функций в сумму и обратно

Формулы преобразования суммы функций в произведение и обратно

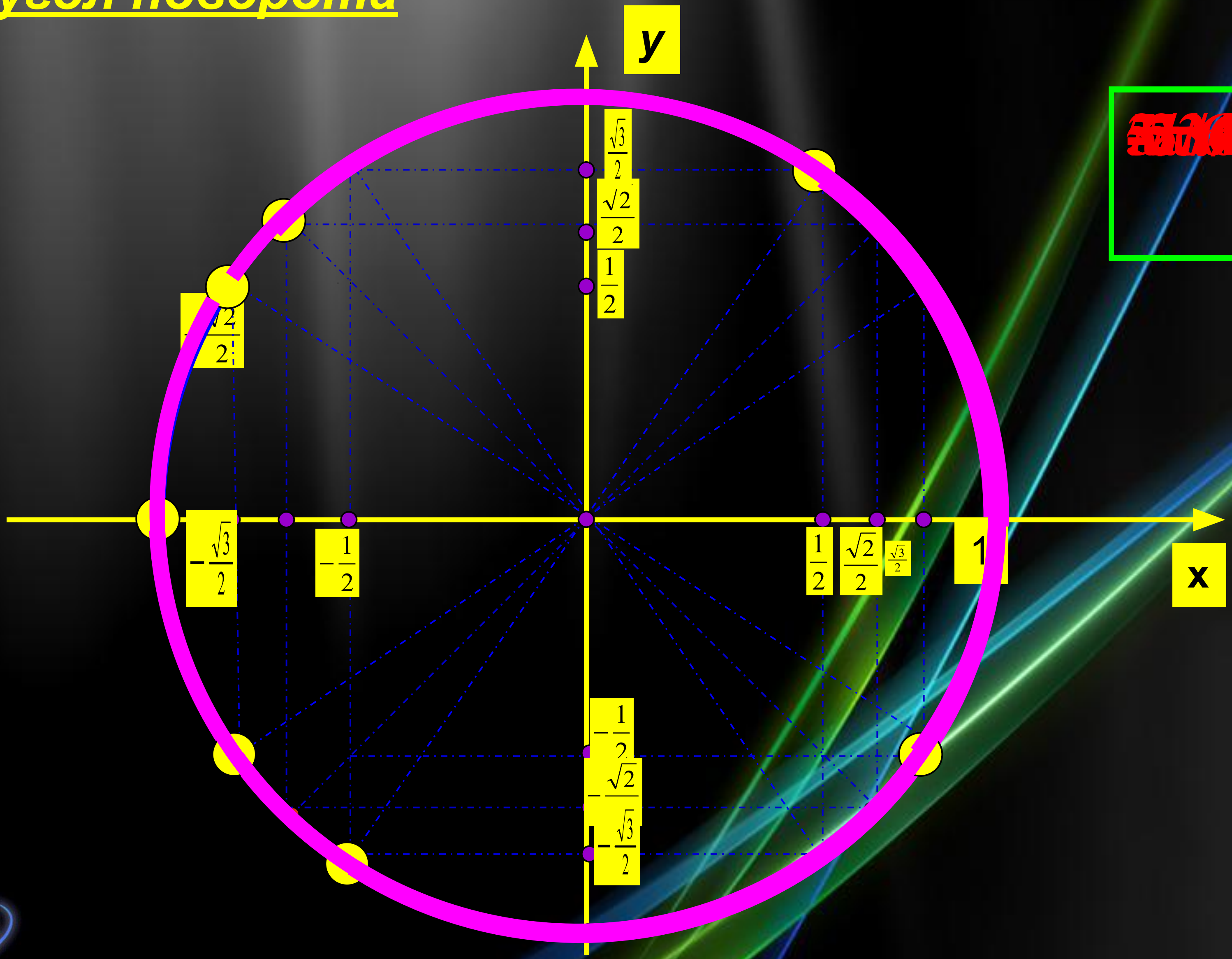
Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь. А Фуше

А теперь тригонометрические уравнения! Вспомним, что изучали ранее.

Тригонометр, то есть отметим точку на тригонометрической окружности и укажем угол поворота.

Тригонометр

укажи угол поворота



Учимся решать как элементарные, так и достаточно сложные тригонометрические уравнения.

Вы в курсе, что тригонометрические уравнения могут быть моделями задач физики, астрономии, сейсмологии, архитектуры, экономики, компьютерной графики и многих других сфер жизни и деятельности человека.

Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения, необходимо:

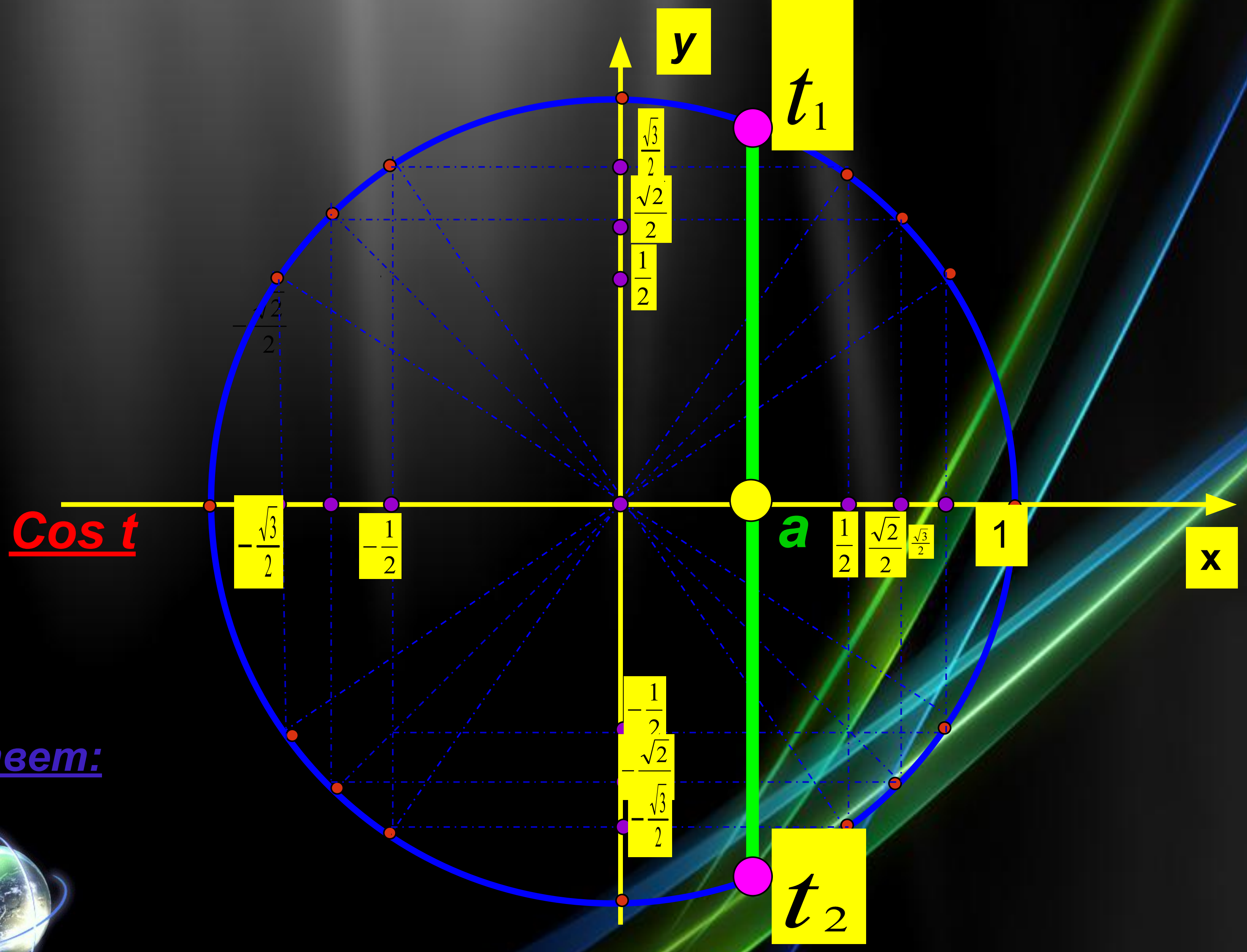
1) уметь отмечать точки на числовой окружности;

2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;

3) знать свойства основных тригонометрических функций;

4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.

• Решение уравнения вида cos t = a



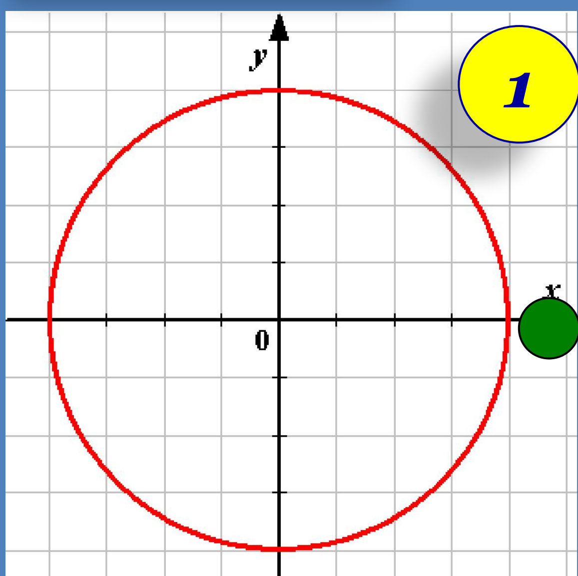
Ответ:

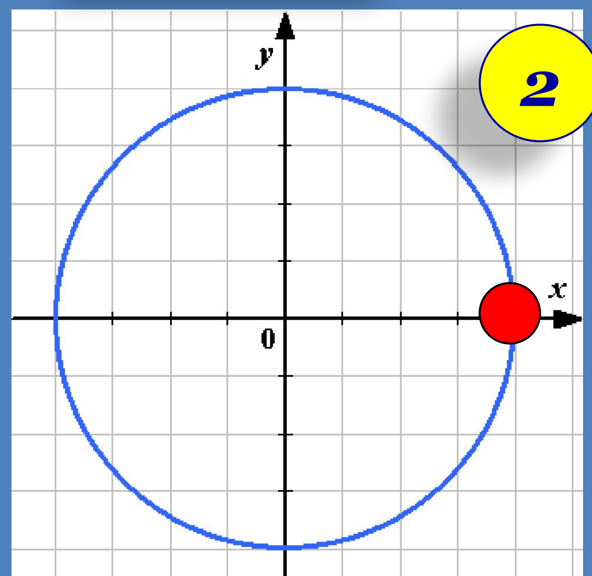
Решим уравнение:

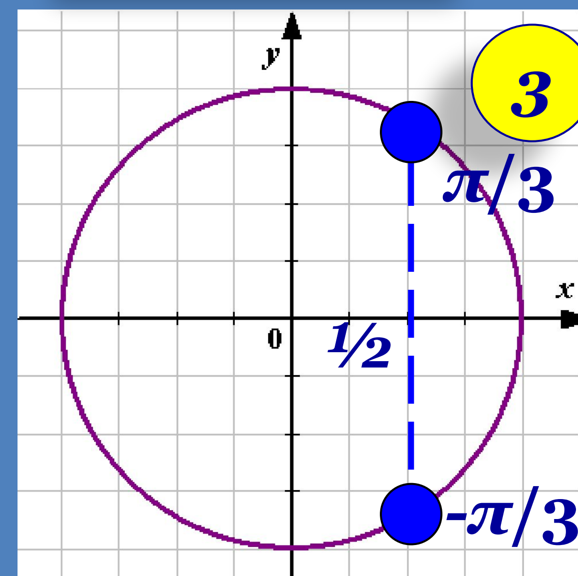
$\cos x = 1{,}5$

$\cos x = 1$

$\cos x = 0{,}5$







Решений нет

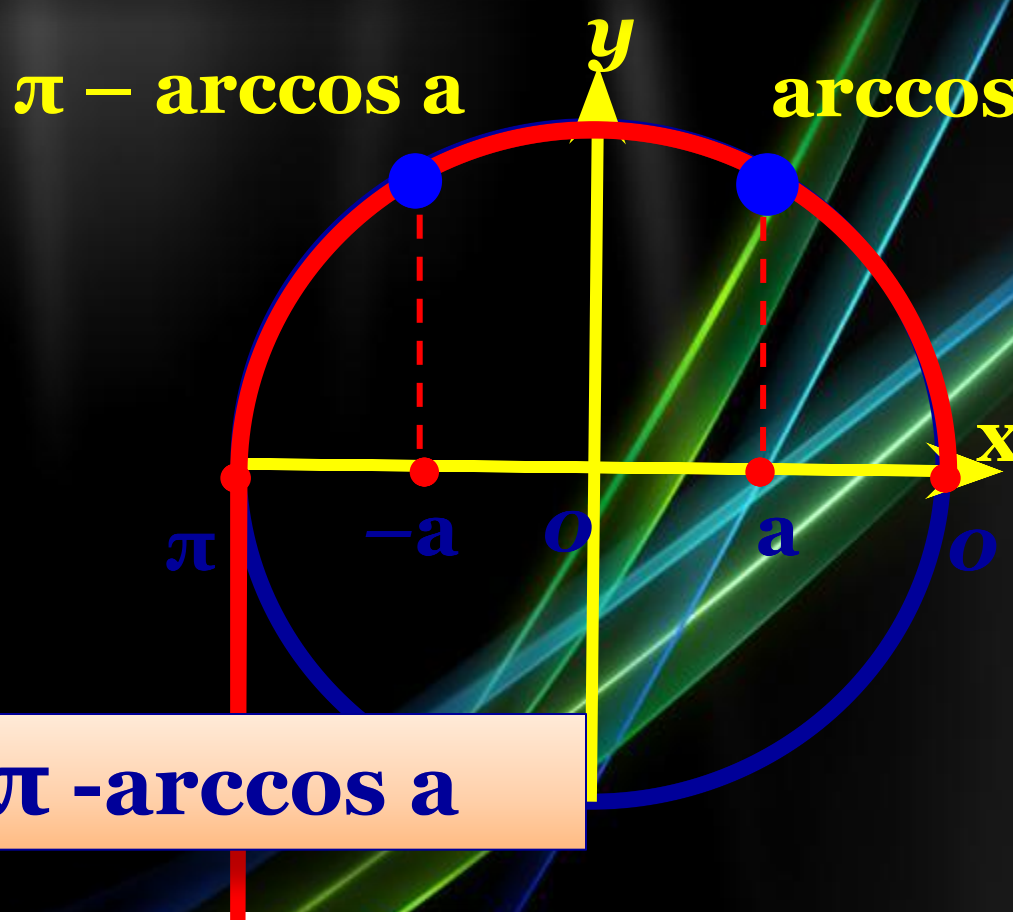
$x = 2\pi n$, $n \in Z$

$x_1 = \pi/3 + 2\pi n$,

$x_2 = -\pi/3 + 2\pi n$,

Определение:

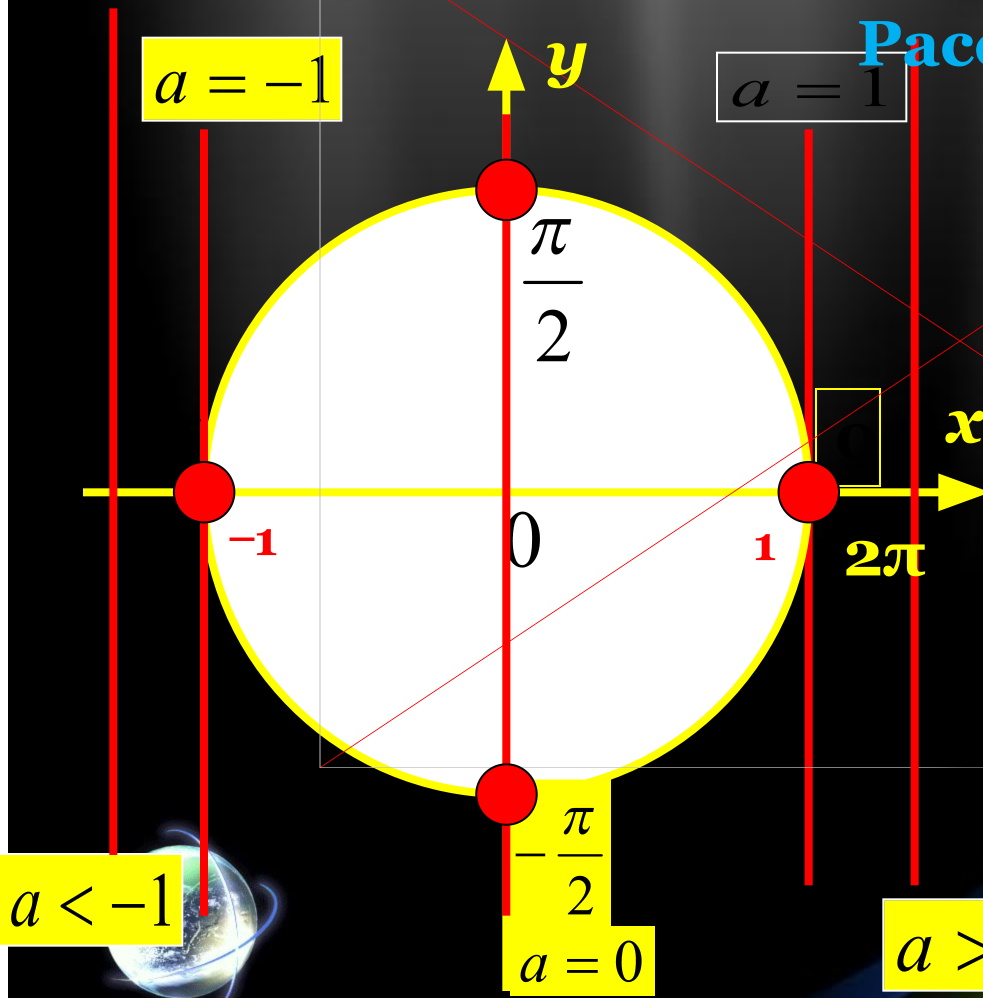
Арккосинусом числа $a \in [-1;1]$ называют такое число x из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен a



arccos (-a)= π -arccos a

Решения уравнения $\cos x = a$ удобно иллюстрировать с помощью единичной окружности

Если $a > 1$ или $a < -1$, то **решений нет**



Рассмотрим частные случаи

1) $\cos x = 1$, тогда

$x = 2\pi n, n \in Z$

2) $\cos x = 0$, тогда

$x = \pi/2 + \pi n, n \in Z$

3) $\cos x = -1$, тогда

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Вы должны знать:

$$\cos x = a$$

1) Если $|a| > 1$, то решений нет.

2) Частные случаи:

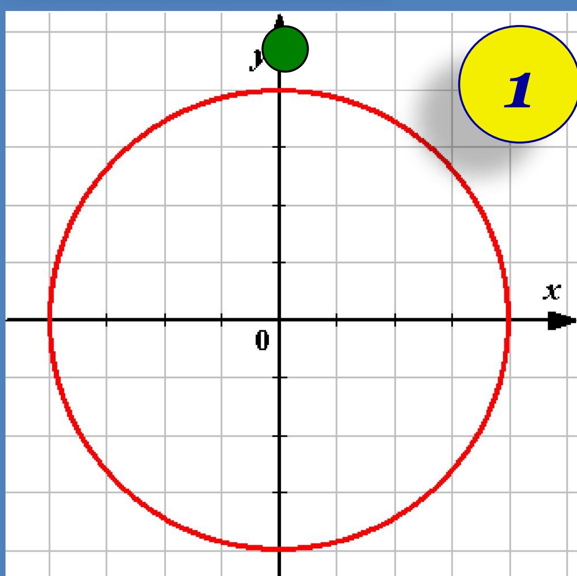
$\cos x = 1$	$\cos x = -1$	$\cos x = 0$
$x = 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

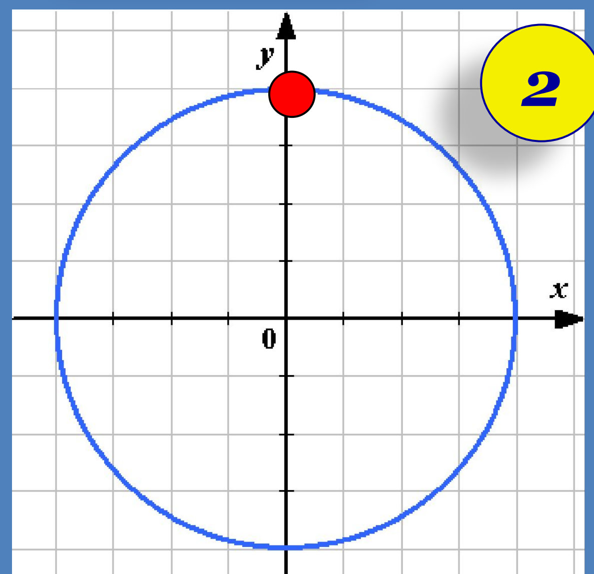
3) Общая формула для $\cos x = a$ $\quad -1 < a < 1$

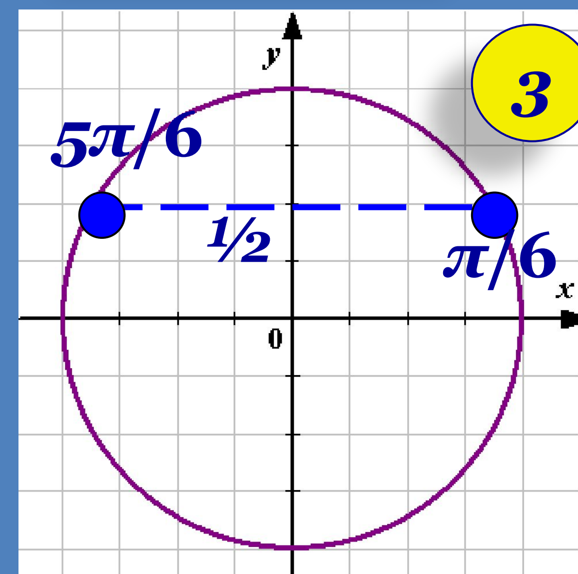
$$x = \pm\arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

Решим уравнение:

$\sin x = 1{,}5$ | $\sin x = 1$ | $\sin x = 0{,}5$







Решений нет

$x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$

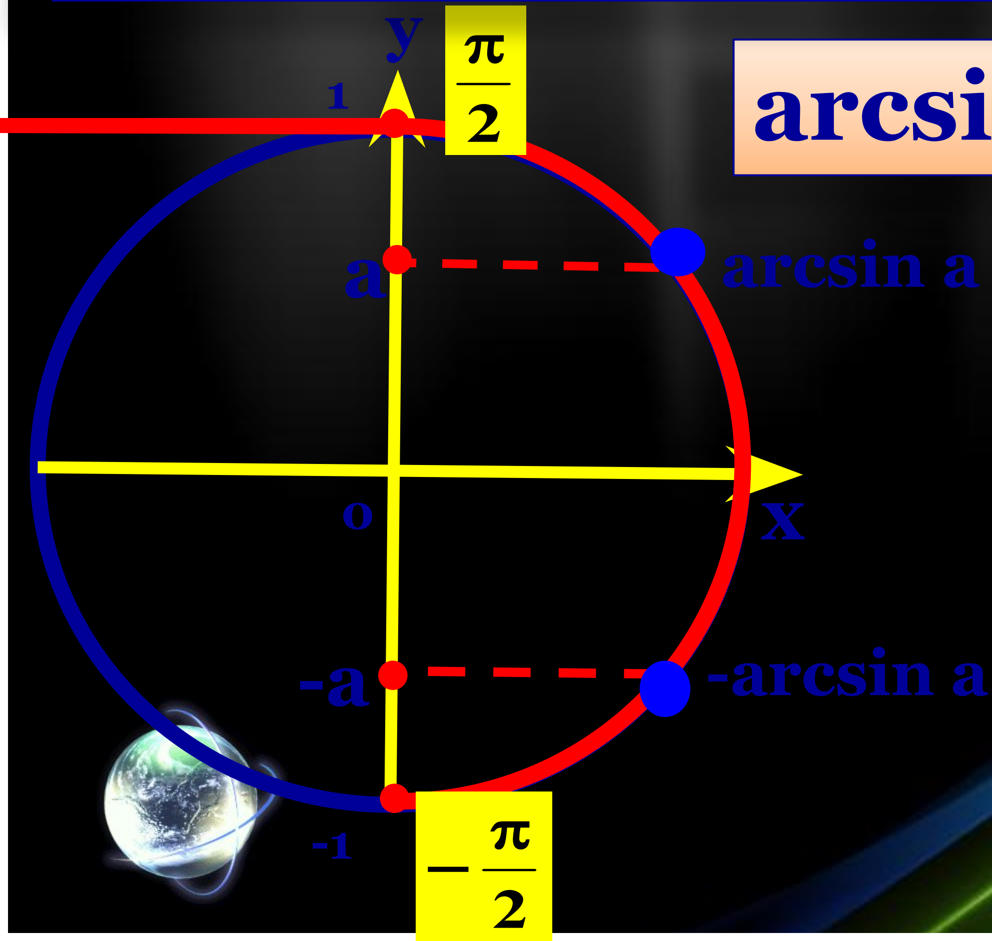
$x_1 = \pi/6 + 2\pi n$,

$x_2 = 5\pi/6 + 2\pi n$,

Определение:

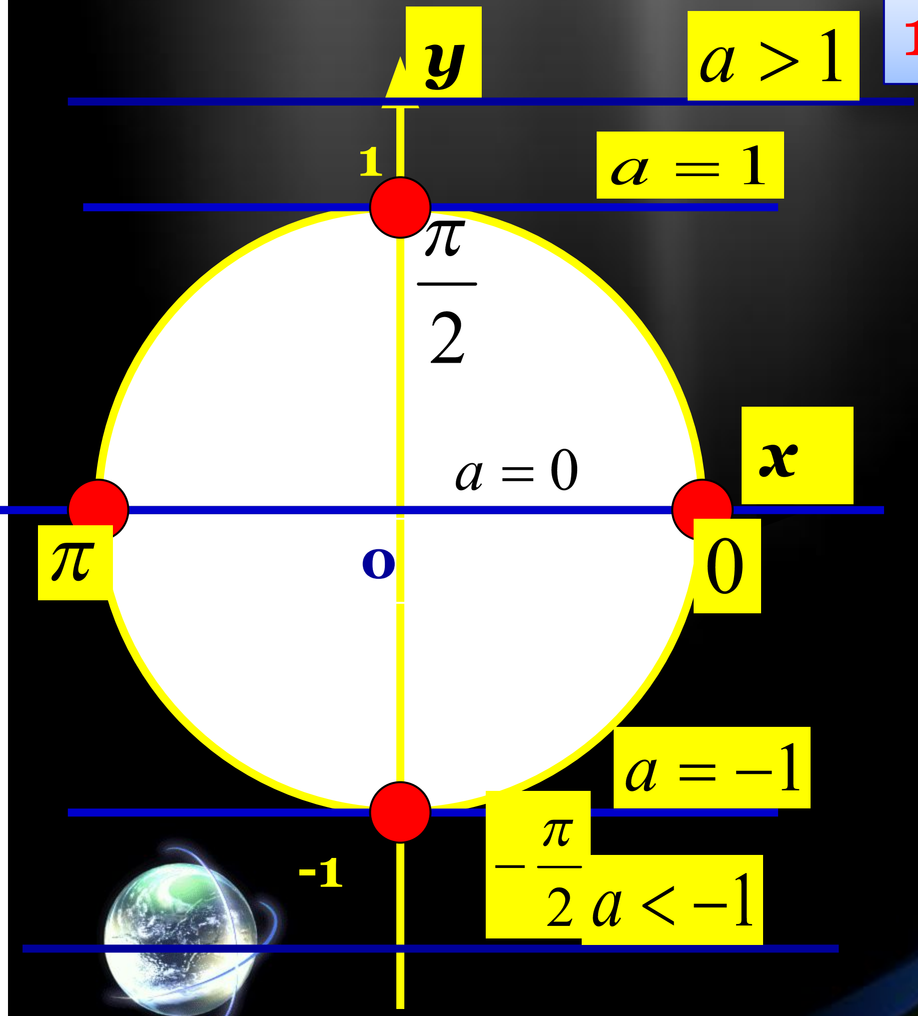
Арксинусом числа $a \in [-1;1]$ называют такое число x из промежутка $[-\pi/2;\pi/2]$, синус которого равен a

arcsin (-a)= –arcsin a



Решения уравнения $\sin x = a$ удобно иллюстрировать с помощью единичной окружности

Рассмотрим частные случаи



1) Если a > 1 или a < − 1, то

решений нет

2) Если a = 1, то

$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in Z$

3) Если a = −1, то

$x = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z$

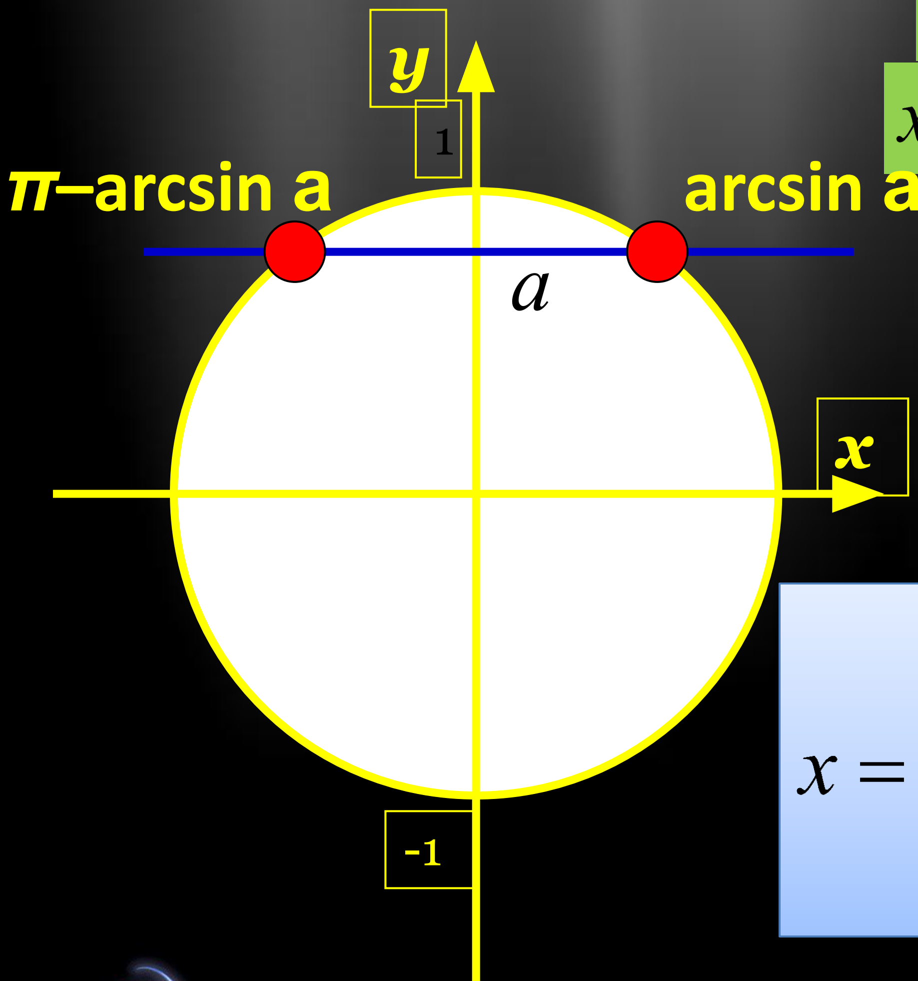
4) Если a = 0, то

$x = \pi n, n \in Z$

Решения уравнения $\sin x = a$, если $-1 < a < 1$

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$$



Это две формулы, которые дают все решения уравнения

Их записывают так:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in Z; \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in Z. \end{array}\right.$$

$$\mathbf{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z}$$

А это стоит запомнить!

$\sin x = a$

1) Если $|a| > 1$, то решений нет.

2) Частные случаи:

$\sin x = 1$

$\sin x = -1$

$\sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \pi n, n \in Z$

3) Общая формула для $\sin x = a$ $\quad -1 < a < 1$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$$

Потренируемся в решении уравнений?

$$2\cos x + \sqrt{2} = 0$$

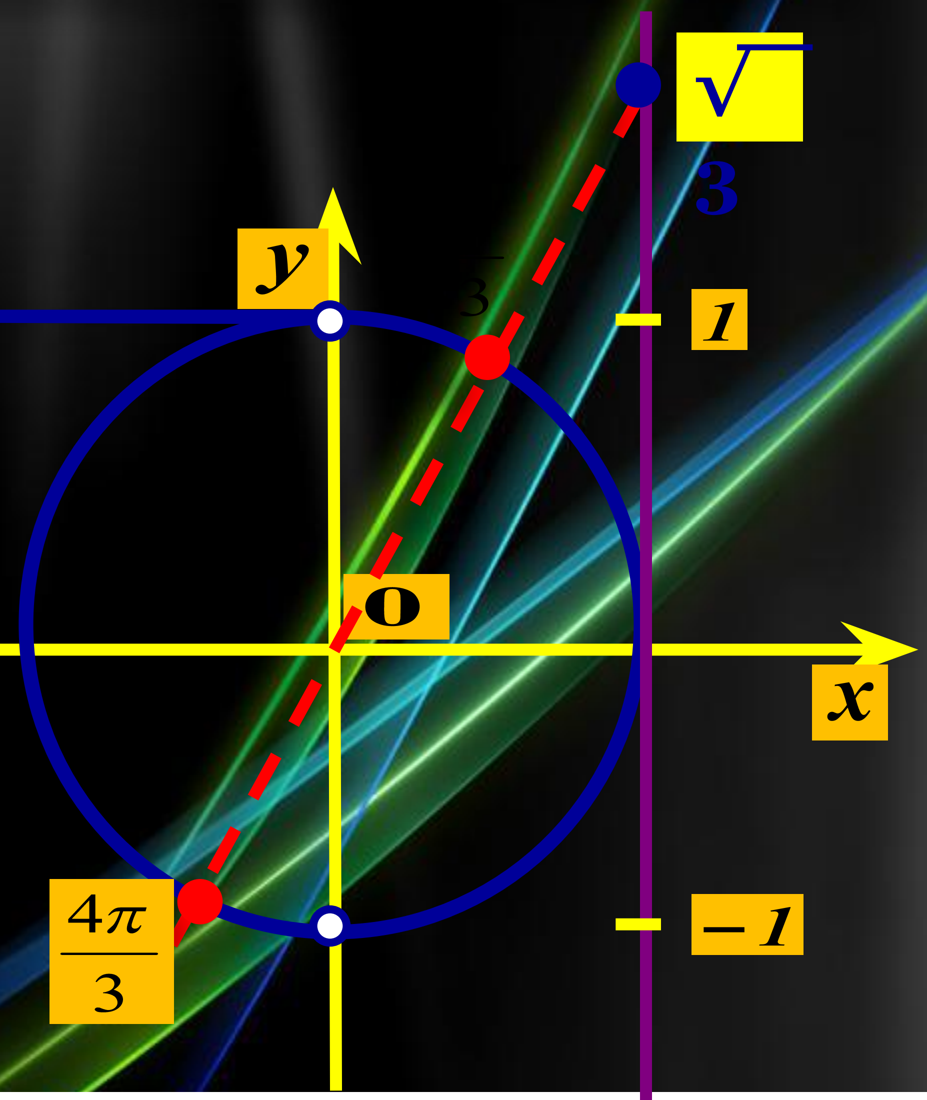
Решим при помощи числовой окружности уравнение tg x=√3

tg

$x_1 = \pi/3+2\pi n,\ n\in Z$

$x_2 = 4\pi/3+2\pi n,\ n\in Z$

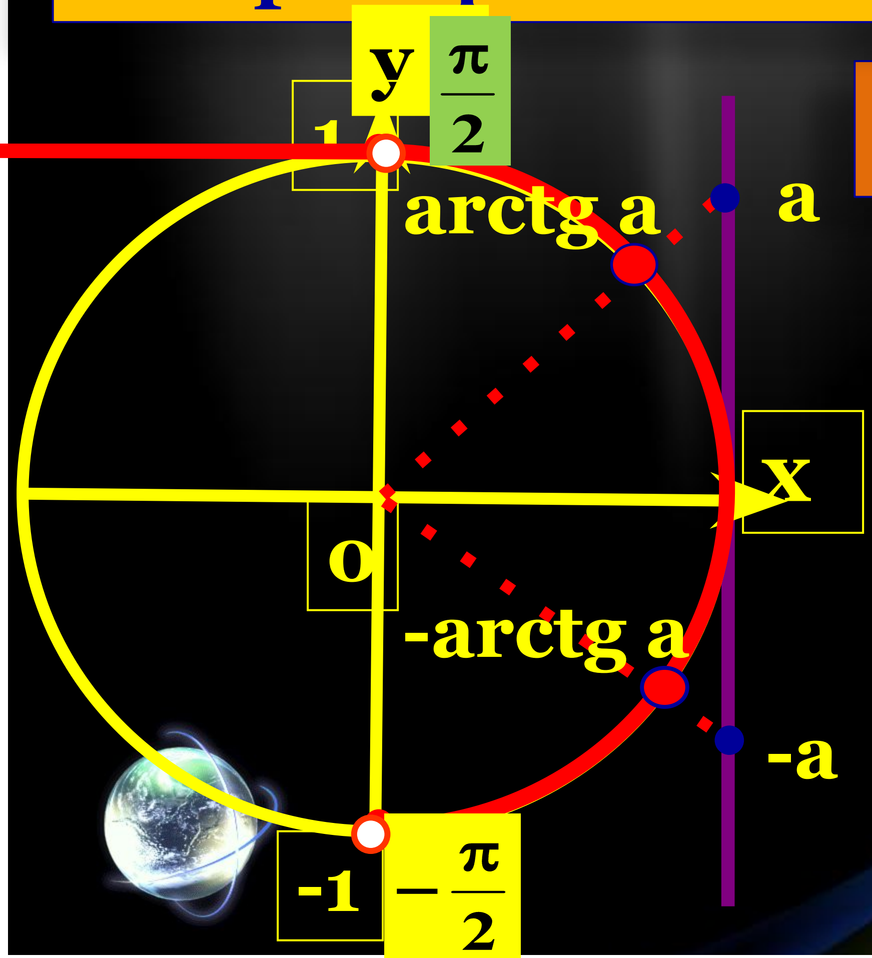
$x = \pi/3+\pi n,\ n\in Z$



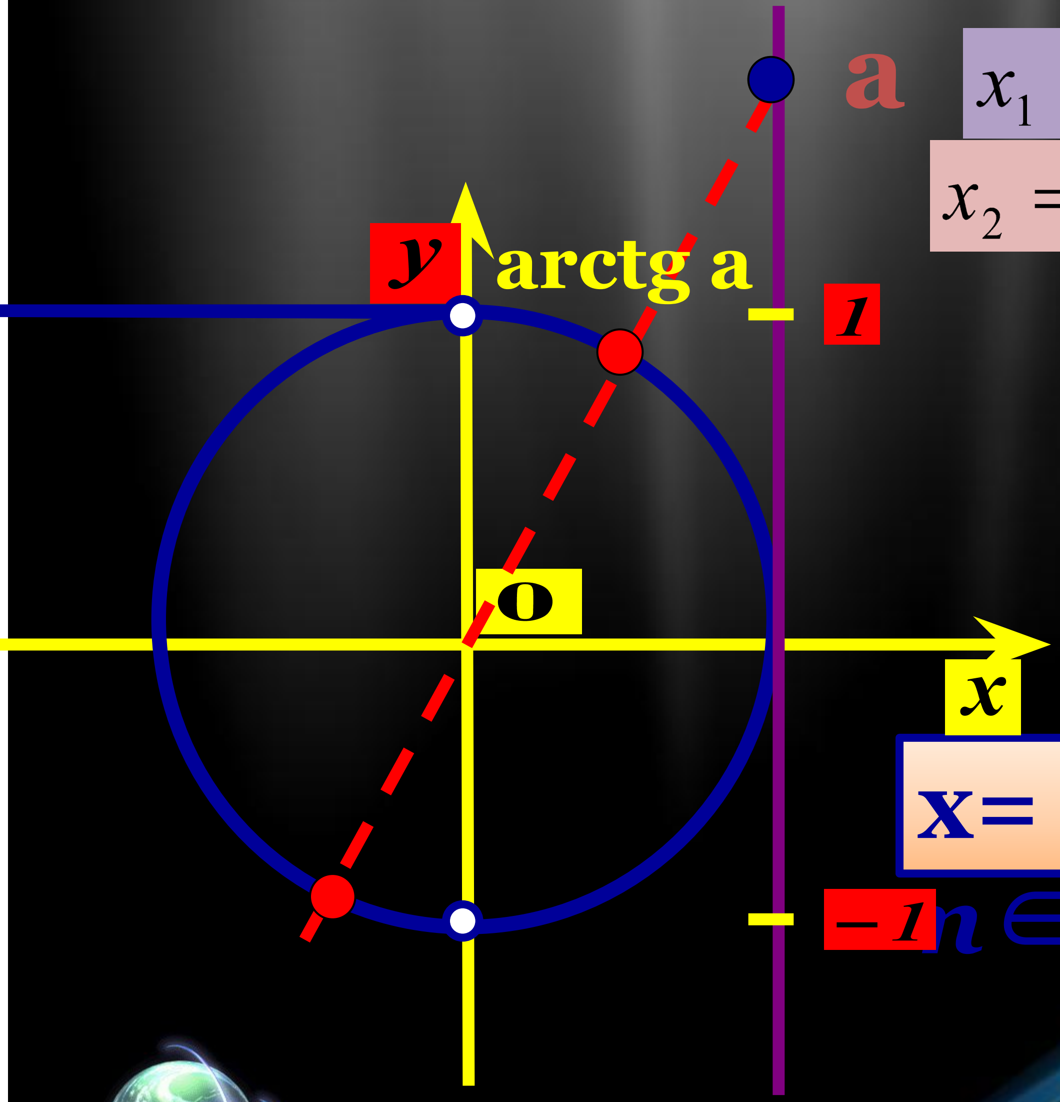
Определение:

Арктангенсом числа а∈R называют такое число х из промежутка $(-\pi/2;\pi/2)$, тангенс которого равен а

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$



Запомним!Решения уравнения $tg\ x = a$, если $a \in R$



$$x_1 = arctga + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi + arctga + 2\pi n, n \in Z$$

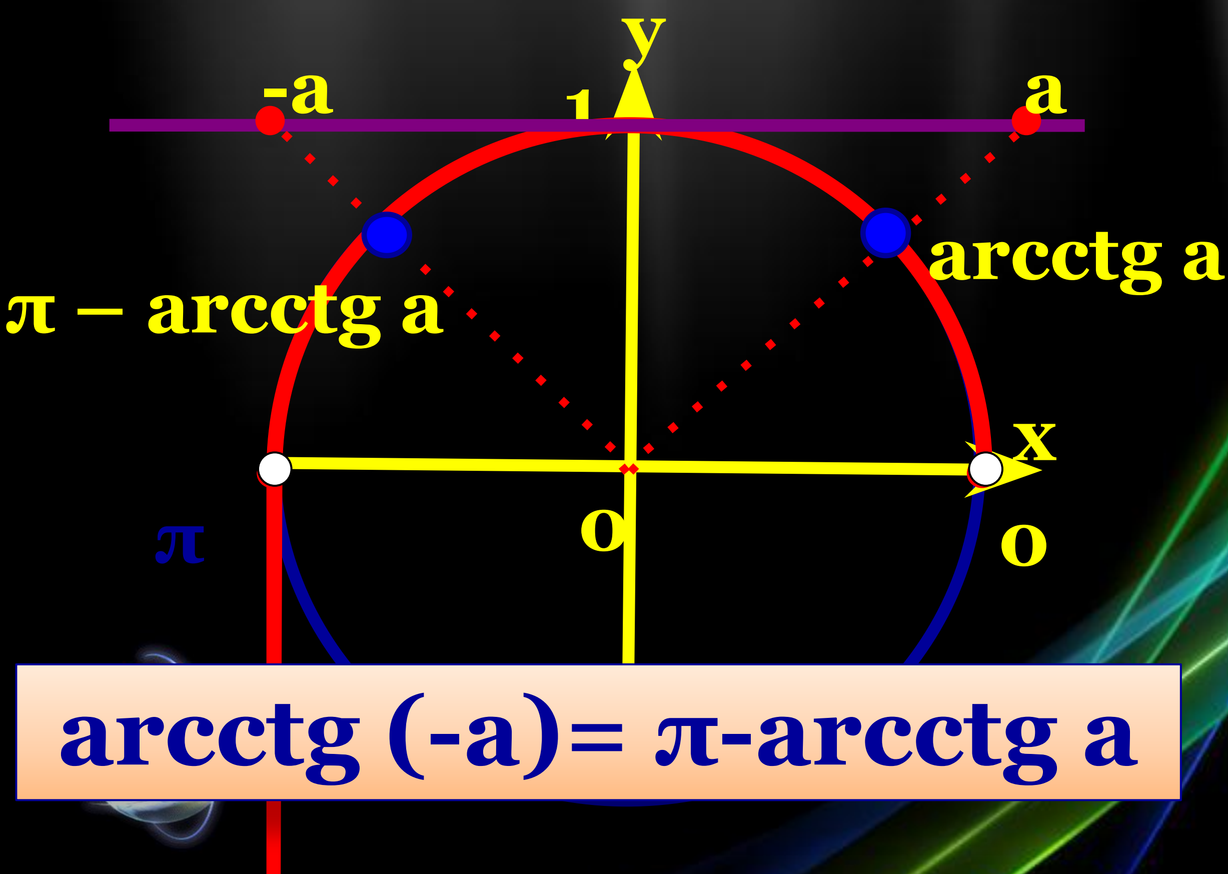
Это две формулы, которые дают все решения уравнения

Их записывают так:

$$x = arctg\ a + \pi n,\ n \in Z$$

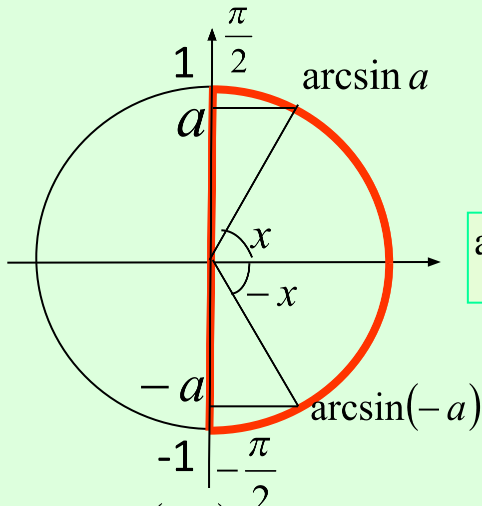
<u>Определение:</u>

Арккотангенсом числа a∈R называют такое число x из промежутка (0;π), котангенс которого равен a



arcctg (-a)= π-arcctg a

Арксинус,арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

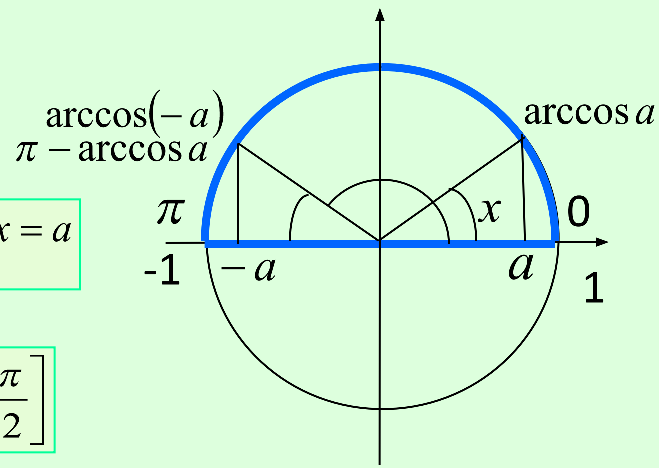


$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

$\arcsin a = x, \quad \sin x = a$

$a \in [-1;1]$

$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

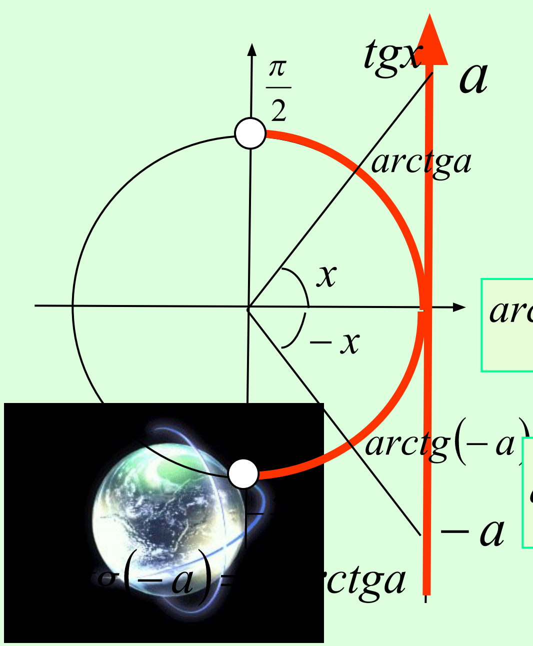


$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\arccos a = x, \quad \cos x = a$

$a \in [-1;1]$

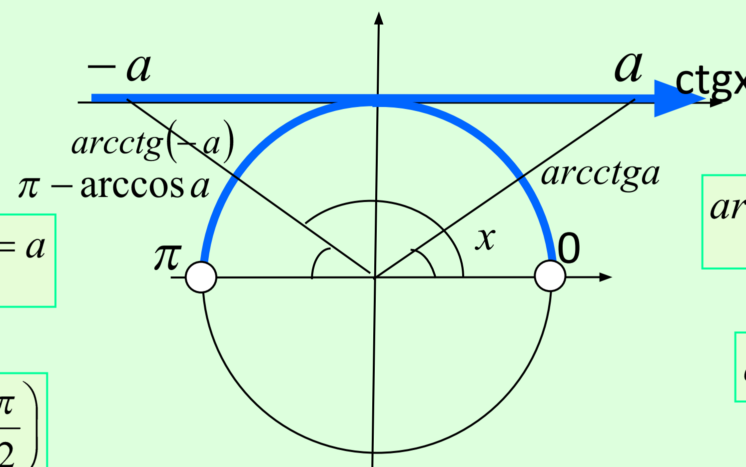
$\arccos a \in [0;\pi]$



$arctga = x, \quad tgx = a$

$a \in R$

$arctga \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



$arcctg(-a) = \pi - arcctga$

$arcctga = x, \quad ctgx = a$

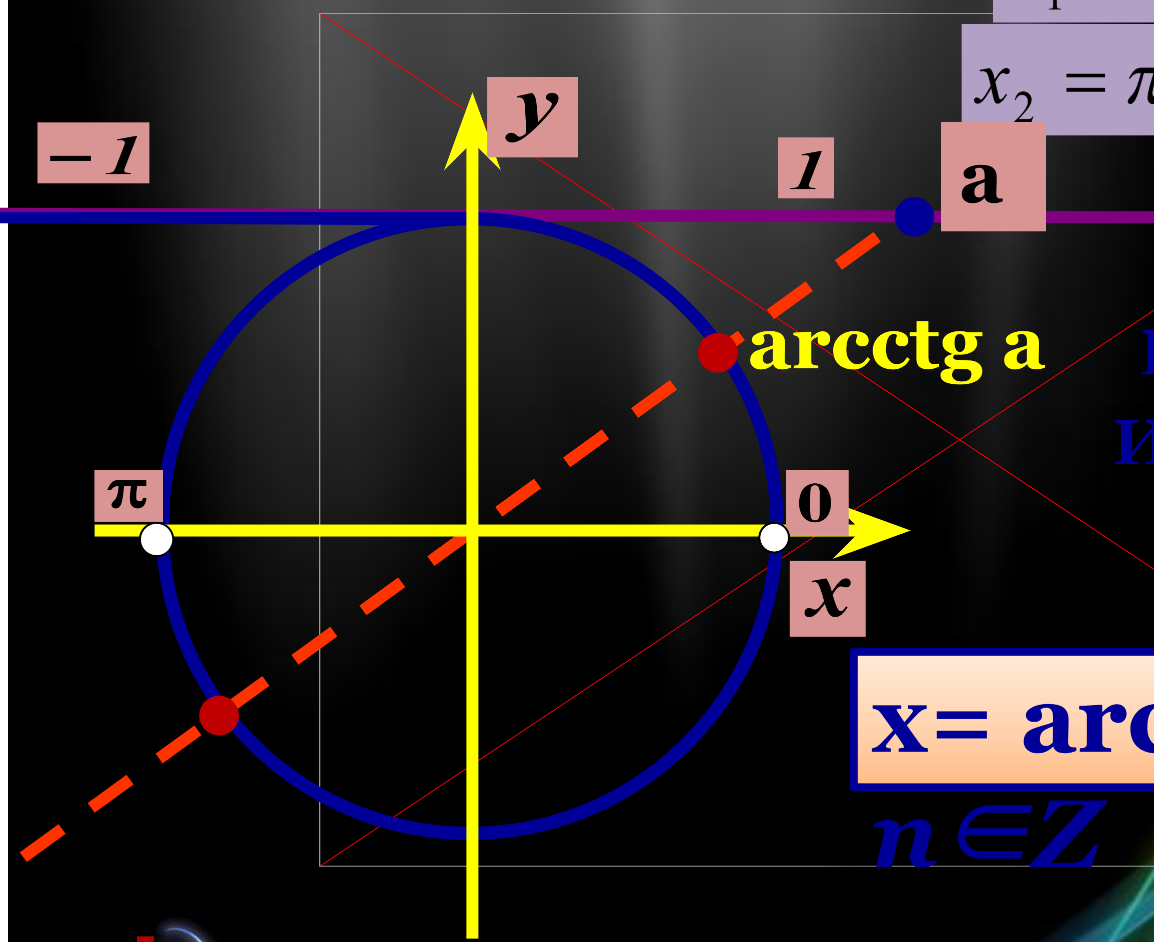
$a \in R$

$arcctga \in (0;\pi)$

Решения уравнения $ctg\ x = a$, если $a \in R$

$$x_1 = arc\,ctg a + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi + arc\,ctg a + 2\pi n, n \in Z$$



Это две формулы, которые дают все решения уравнения

Их записывают так:

x= arcctg a+πn, $n \in Z$

ctg x=a

Потренируемся?

$$ctgx = \sqrt{3}$$

$$ctgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$8\mathrm{ctg}\,x = 0$$

$$ctg3x = 0$$

Укажите на единичной окружности все точки с данной ординатой и запишите все числа, соответствующие этим точкам:

$y_0 = 1;$

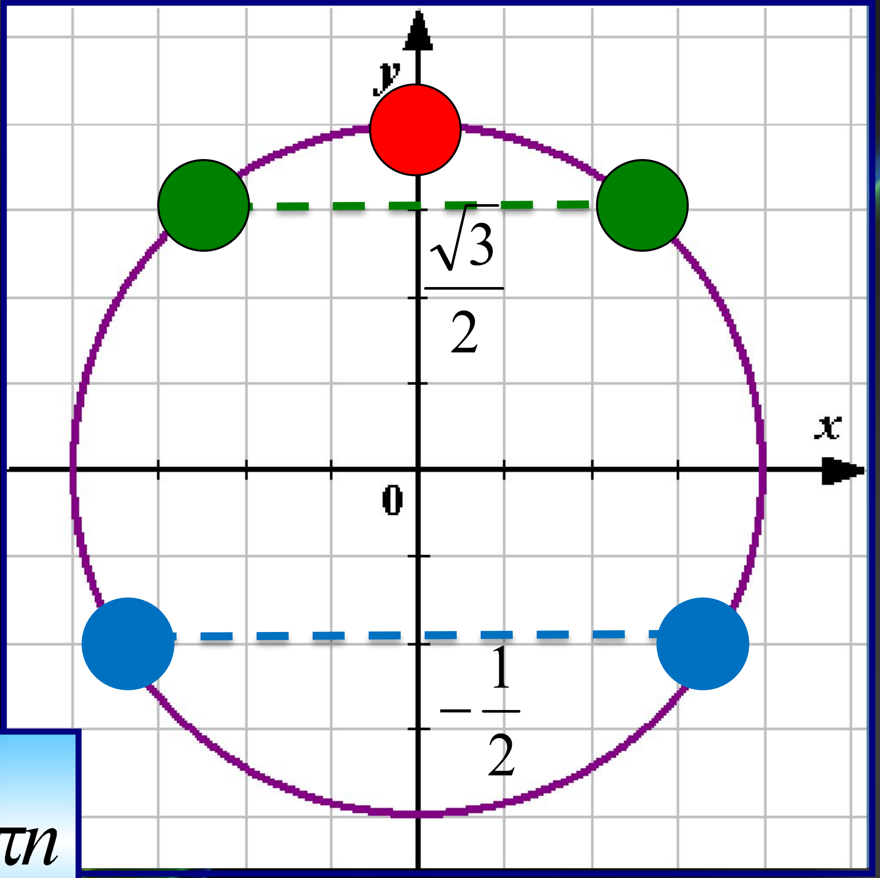
$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$\alpha = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$

$y_0 = -\frac{1}{2};$

$\alpha = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$



Укажите на единичной окружности все точки с данной ординатой и запишите все числа, соответствующие этим точкам:

$y_0 = 1;$

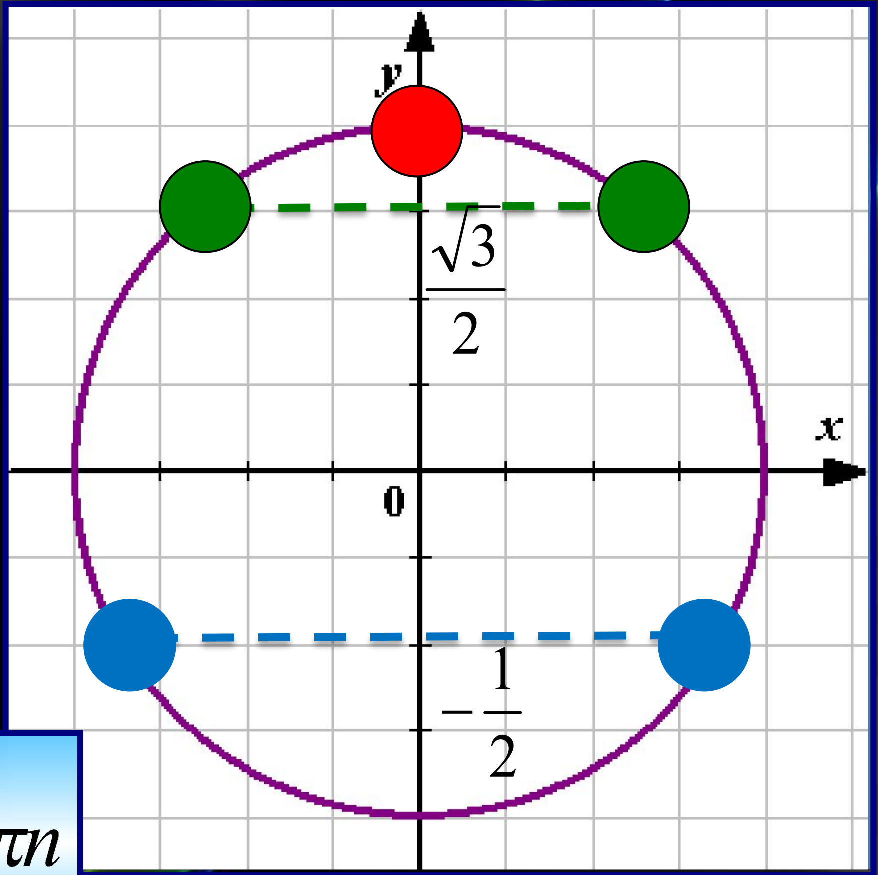
$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$\alpha = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$

$y_0 = -\frac{1}{2};$

$\alpha = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$



Решить уравнение:

1 $$\cos\frac{4\pi x}{3}=\frac{1}{2}$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень

2 $$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$$

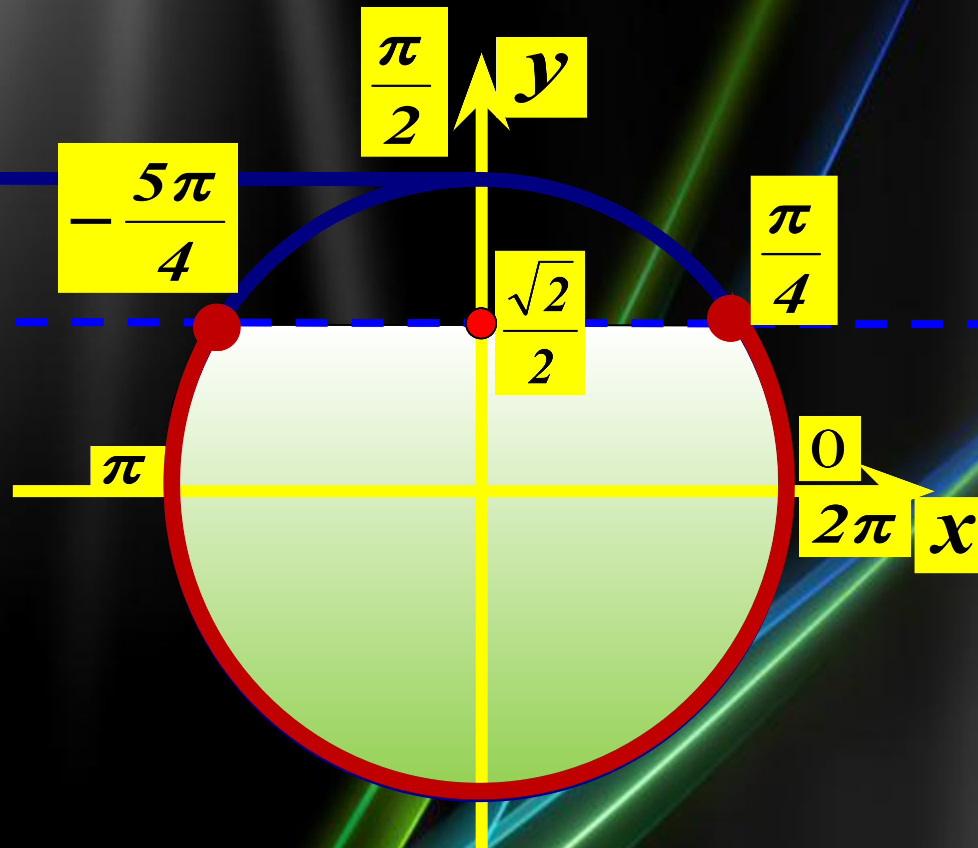
В ответе запишите наибольший отрицательный корень

3 $$\cos\frac{\pi(8x+1)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень

Решение тригонометрических неравенств

$$\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$



На Оу отмечаем значение

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$

и соответствующие точки на окружности

Выделяем нижнюю часть окружности (обход совершаем против часовой стрелки).

Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.

Ответ:

$$x \in \left[-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\,;\, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right] k \in Z$$

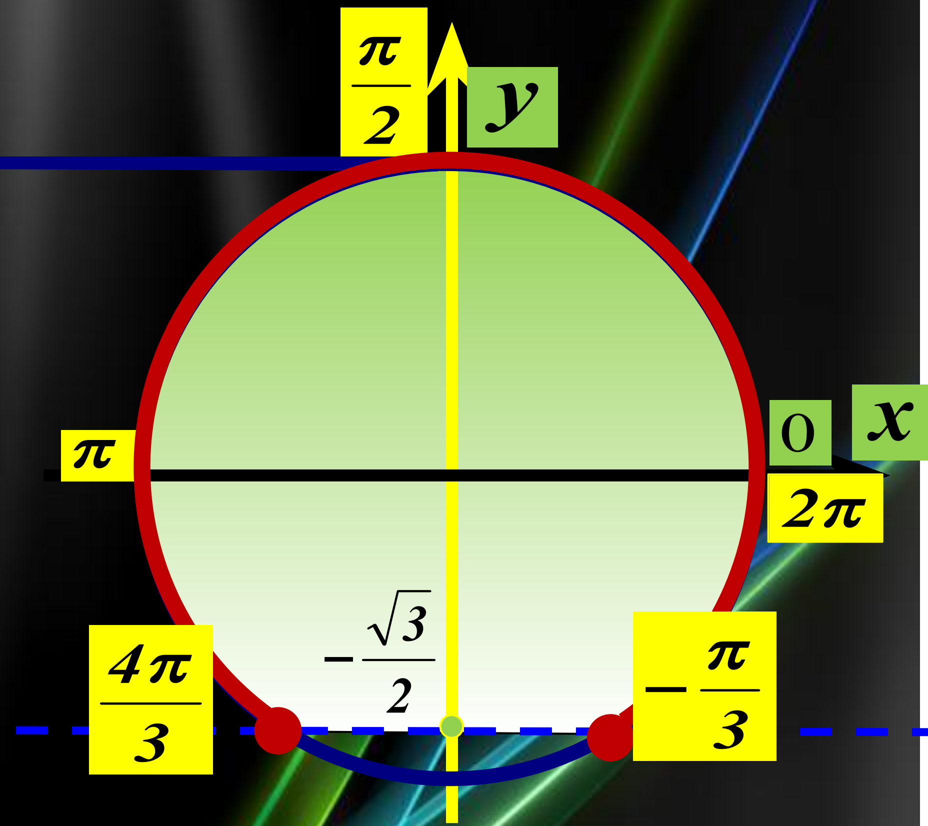
Решение тригонометрических неравенств

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

На Оу отмечаем значение

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}8$$

и соответствующие точки на окружности



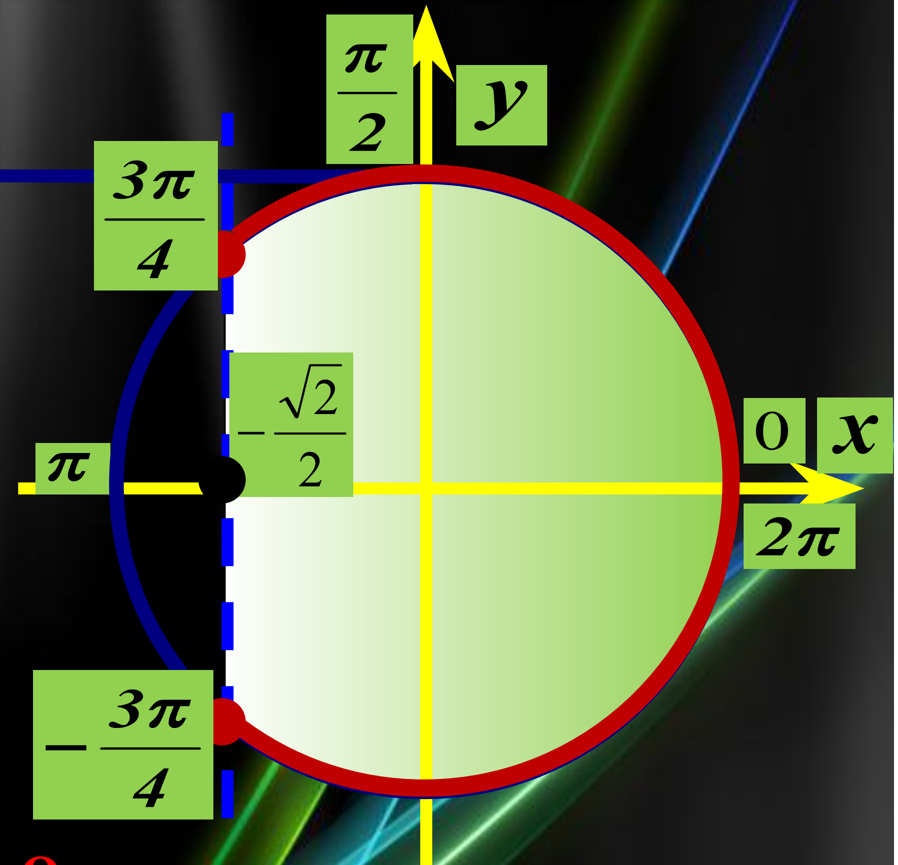
Выделяем верхнюю часть окружности (обход совершаем против часовой стрелки). Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.

Ответ:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right] k \in Z$$

Решение тригонометрических неравенств

$$\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



На Ох отмечаем значение

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}7$$

и соответствующие точки на окружности

Выделяем правую часть окружности (обход совершаем против часовой стрелки).

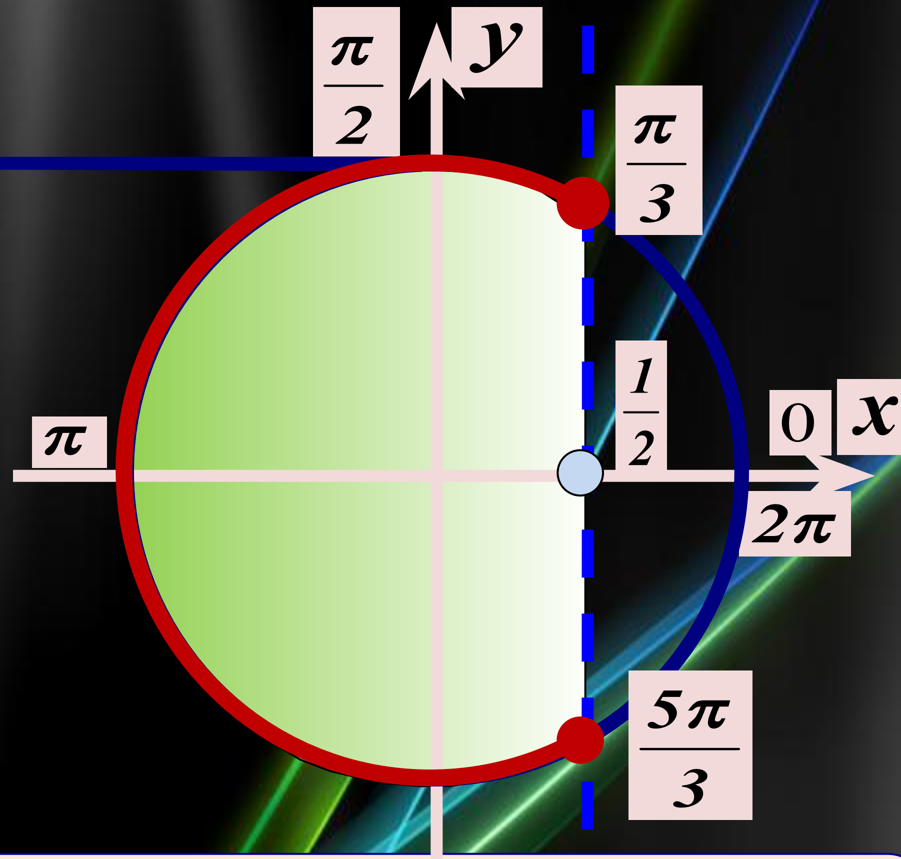
Ответ:

Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\,;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right],\ k \in Z$$

Решение тригонометрических неравенств

$$\cos x \le \frac{1}{2}$$



На Ох отмечаем значение $\frac{1}{2}$

и соответствующие точки на окружности

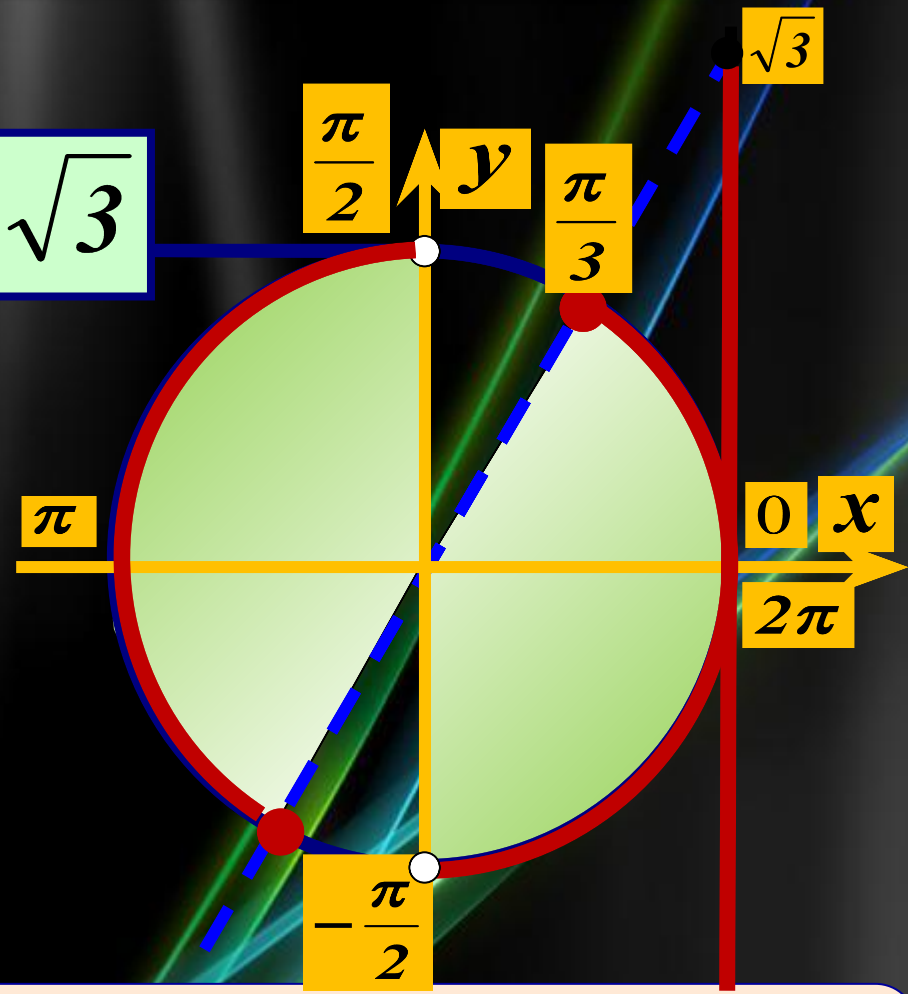
Выделяем левую часть окружности (обход совершаем против часовой стрелки). Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.

Ответ:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k\,;\, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]\ k \in Z$$

Решение тригонометрических неравенств

$$tgx \leq \sqrt{3}$$



На линии тангенсов отмечаем значение $\sqrt{3} \approx 1{,}7$

Выделяем нижнюю часть линии тангенсов, поскольку решаем неравенство со знаком ≤

Выделяем соответствующую часть окружности (обход совершаем против часовой стрелки).

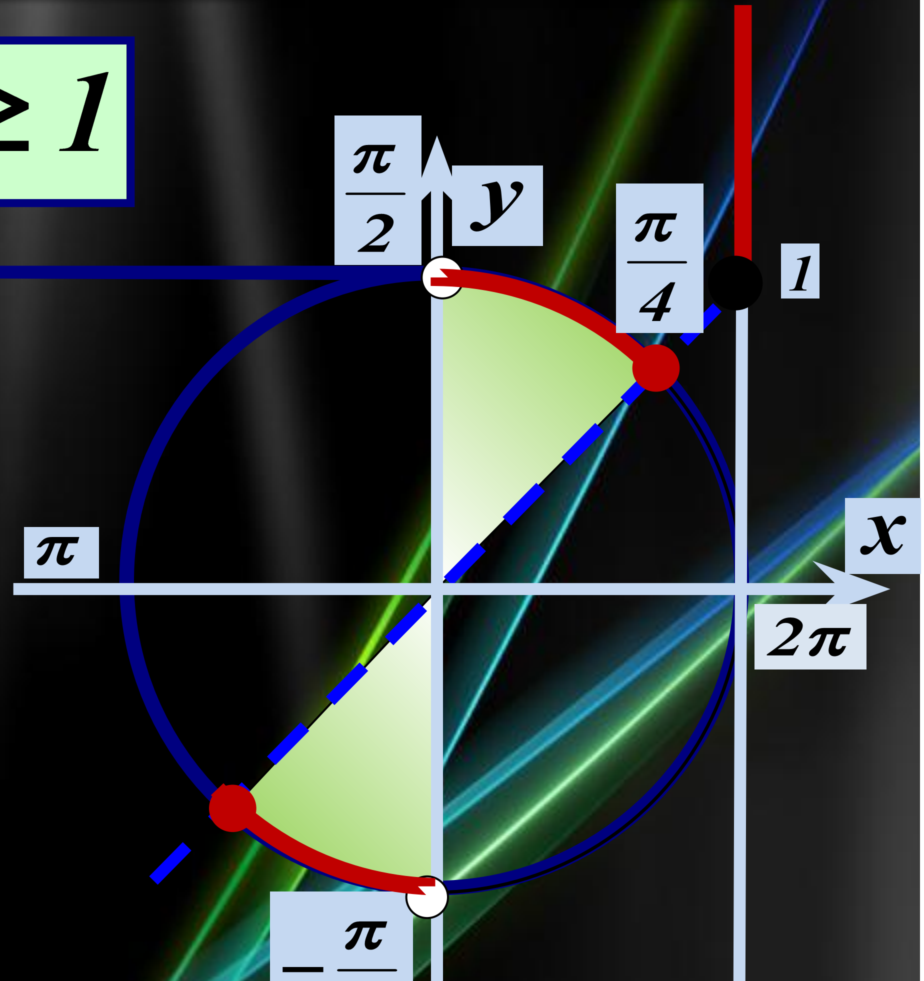
Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.

Ответ:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k ; \frac{\pi}{3}+\pi k\right] k \in Z$$

Решение тригонометрических неравенств

$$tgx \geq 1$$



На линии тангенсов отмечаем значение 1.

Выделяем верхнюю часть линии тангенсов, поскольку решаем неравенство со знаком ≥

Выделяем соответствующую часть окружности (обход совершаем против часовой стрелки).

Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.

Ответ:

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right) \quad k \in Z$$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

Метод разложения на множители

Метод введения новой переменной

Функционально - графический

Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \qquad \sin x = t$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25, \qquad t_1 = -2, \qquad t_2 = \frac{1}{2}.$$

$\sin x = -2,$ нет решений

$$\mathrm{sinx} = \frac{1}{2}, \qquad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$$

Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0,$ сгруппируем слагаемые $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$

Применим формулу $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, получаем

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x = 0$$

$$2\sin 2x\cdot\cos(-x) + \sin 2x = 0, \qquad \sin 2x\cdot(2\cos x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0, \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$2\text{x} = \pi\text{n}, \qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z, \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2}n, \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения

Пример.

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

Используем формулы понижения степени $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2$$

$$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$$

$$2\cos 5x \cdot \cos 3x + 2\cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$$2\cos 5x \cdot (\cos 3x + \cos x) = 0, \qquad 2\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 5x = 0; \qquad \cos 2x = 0; \qquad \cos x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \qquad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

общее решение: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n, \ n \in Z$ или $\text{x} = \frac{\pi}{5}\left(\frac{1}{2} + n\right), \ n \in Z$

Решение однородных тригонометрических уравнений

Определение: ***Тригонометрическое уравнение называется однородным, если показатели степени слагаемых равны.***

Пример.

$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$

Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0,$ разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0,$

$5tg^2 x - 3tgx - 2 = 0, \qquad tgx = a$

$5a^2 - 3a - 2 = 0, \qquad D = 9 + 40 = 49, \qquad a_1 = -0,4; \quad a_2 = 1$

$tgx = -0,4; \qquad tgx = 1$

$x_1 = -arctg0,4 + \pi n; \qquad x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in Z$

Ответ: $-\mathrm{arctg}0,4 + \pi\, \mathrm{n}, \qquad \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in Z$

Ну, а теперь – графики! На первый взгляд сложные и непонятные графики тригонометрических функций.

Знакомьтесь! График функции синус!

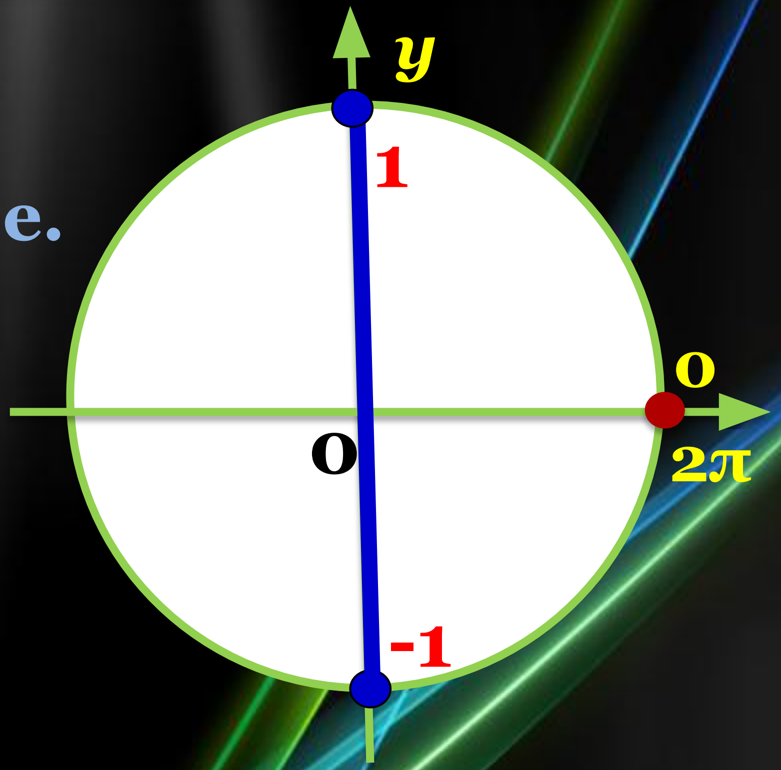
Область определения.
Область значений функции.

1) Область определения функции синус – любое действительное число, т. е.

$D(y) = (-\infty; +\infty)$

2) Область значений функции синус – отрезок от -1 до 1, т. е.

$E(y) = [-1; 1]$

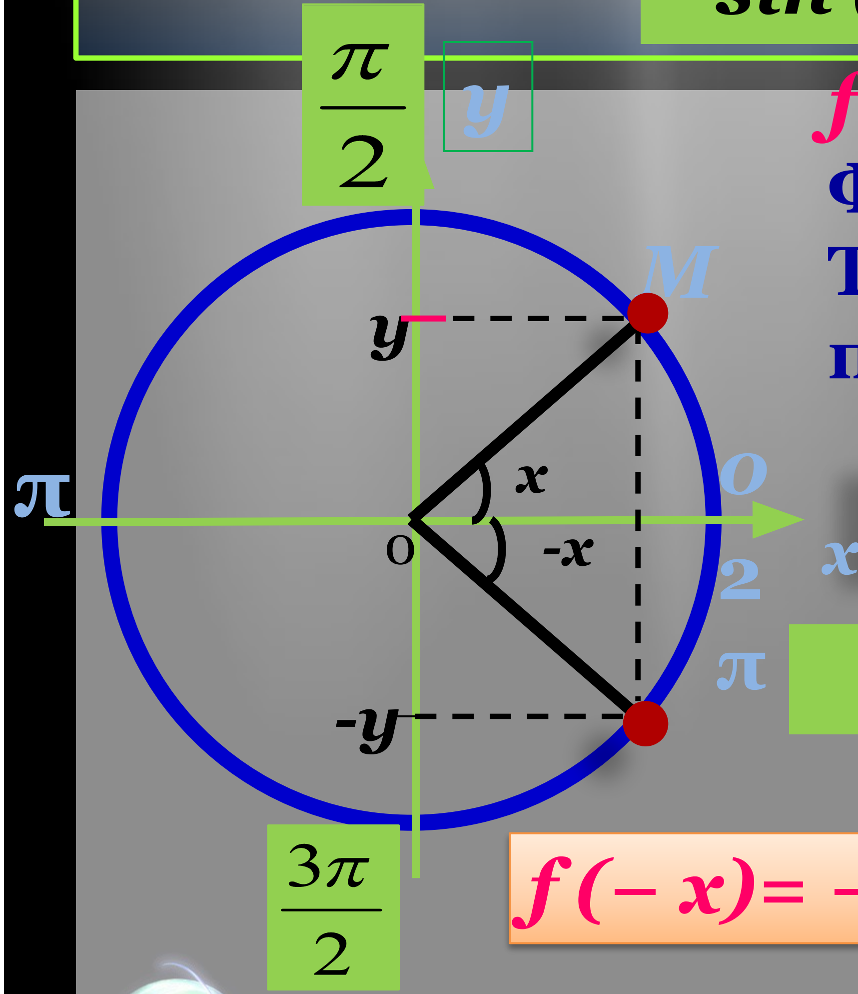


Периодичность

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x,\ \ n \in Z$$

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

Функция периодическая, T = 2π – наименьший положительный период



Чётность, нечётность

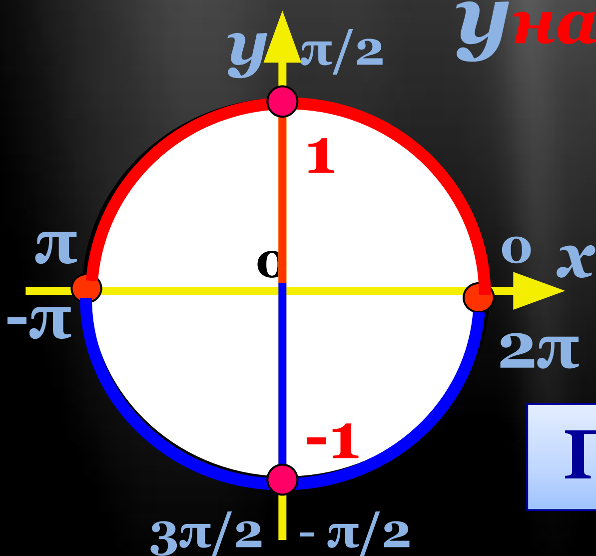
$$\sin(-x) = -\sin x,\ \text{т. е.}$$

$f(-x) = -f(x)$ **функция нечетная**

Наибольшее и наименьшее значение функции

yнаиб.$= 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

yнаим.$= -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$



Нули функции

$y = 0$ при $x = 0 + \pi n,\ n \in Z$

Промежутки знакопостоянства

$y > 0$ при $0 < x < \pi$

$y > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n),\ n \in Z$

$y < 0$ при $-\pi < x < 0$

$y < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n),\ n \in Z$

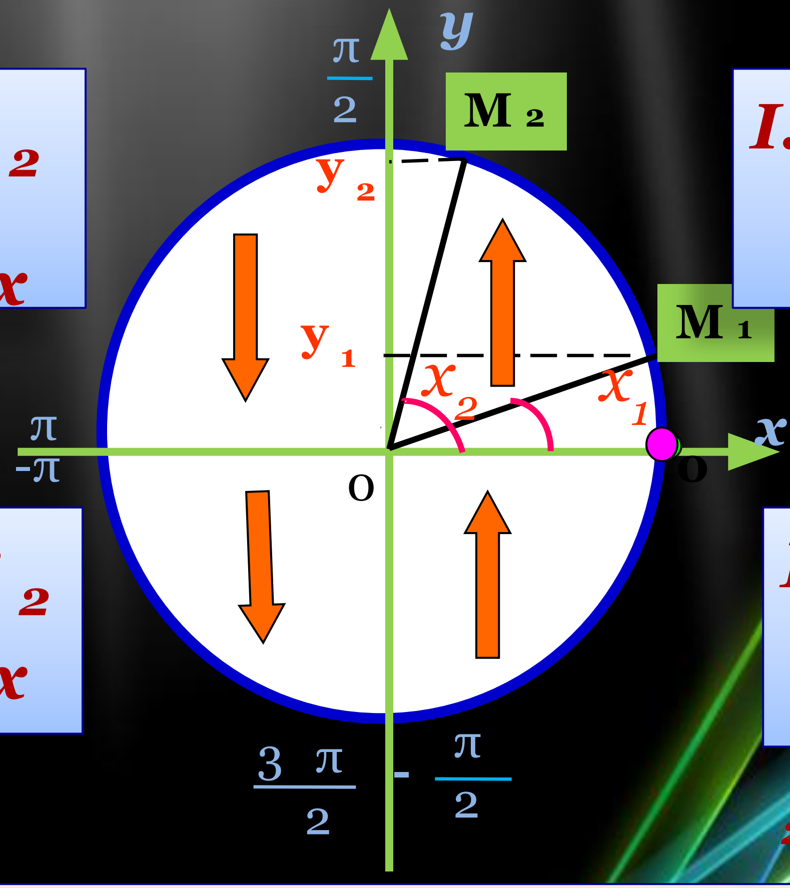
Промежутки монотонности

I. $x_1 < x_2$

$\sin x_1 < \sin x_2$

II. $x_1 < x_2$

$\sin x_1 > \sin x_2$



III. $x_1 < x_2$

$\sin x_1 > \sin x_2$

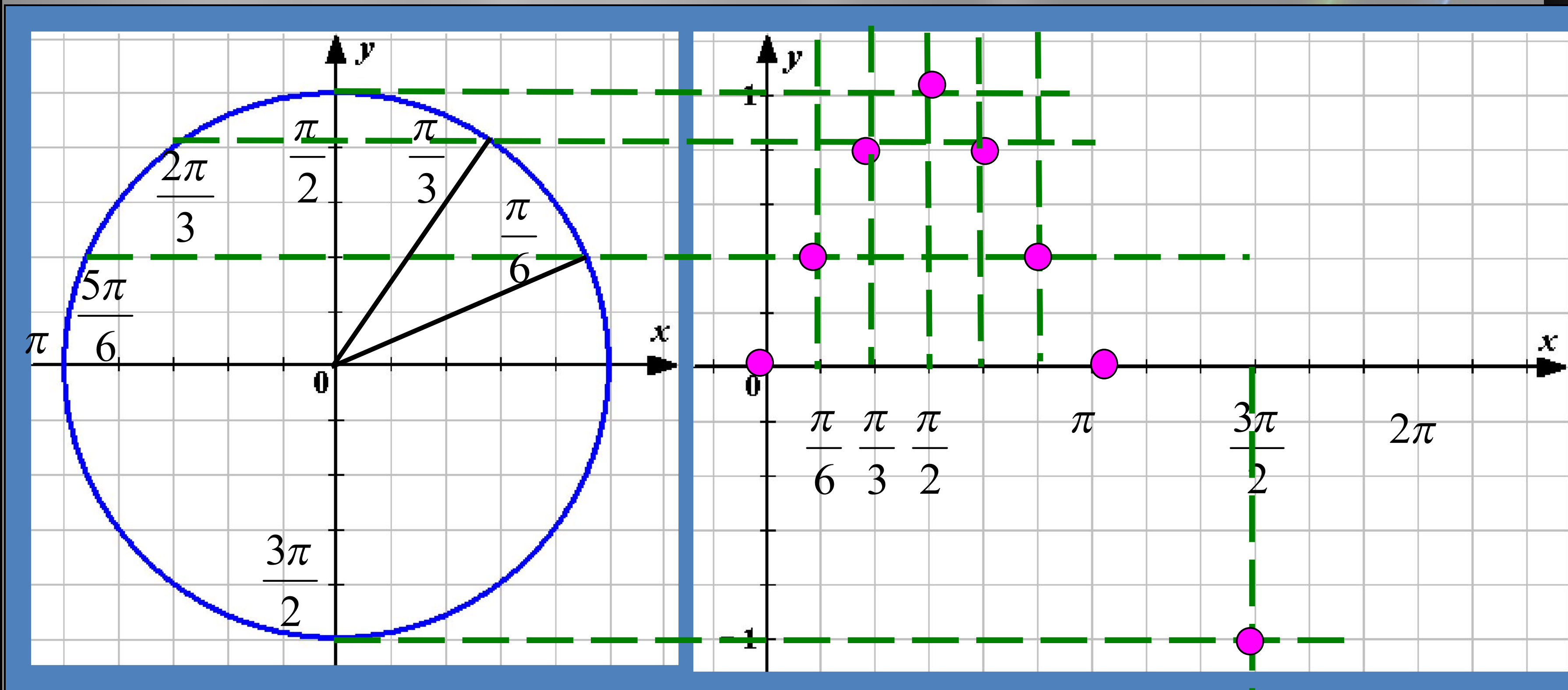
IV $x_1 < x_2$

$\sin x_1 < \sin x_2$

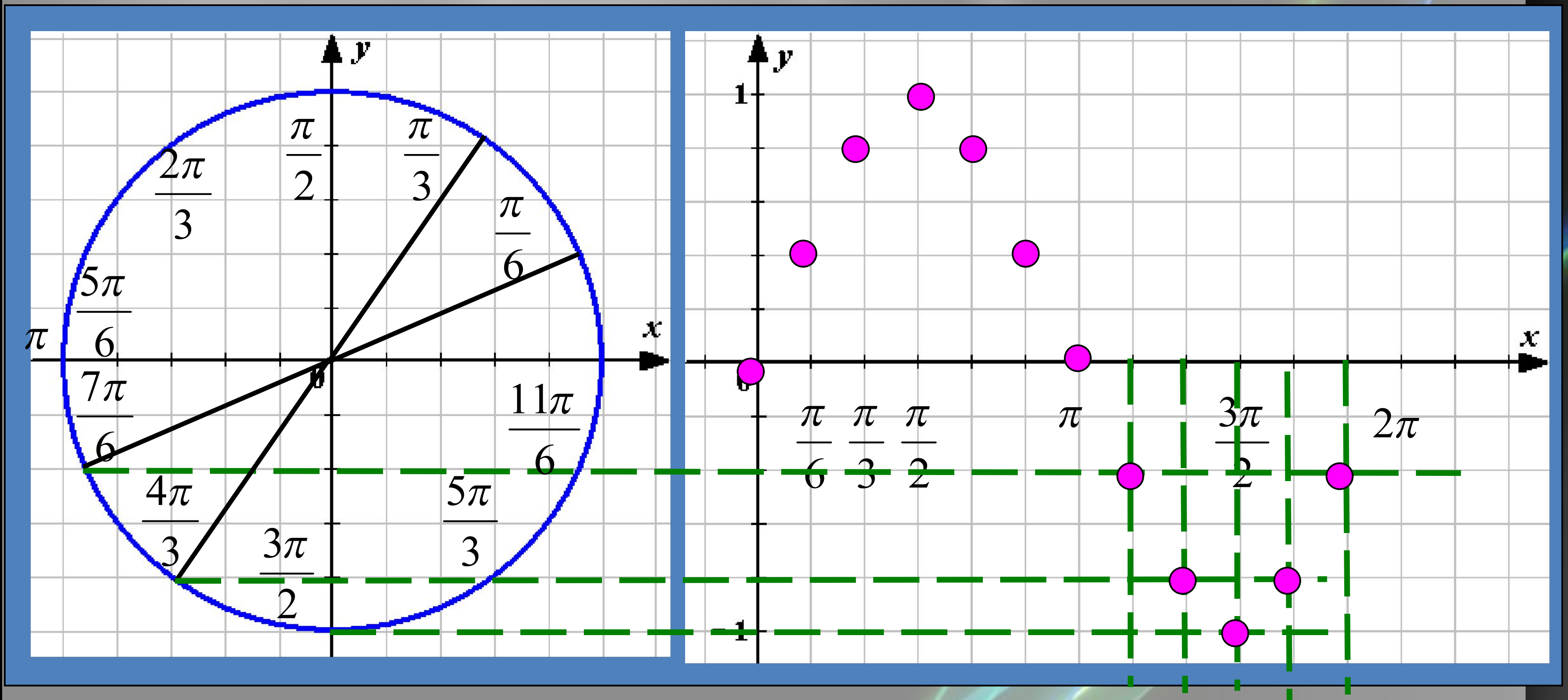
Функция возрастает на [- π/2 + 2πn; π/2 + 2πn] , n ∈ Z

Функция убывает на [π/2 + 2πn; 3π/2 + 2πn] , n ∈ Z

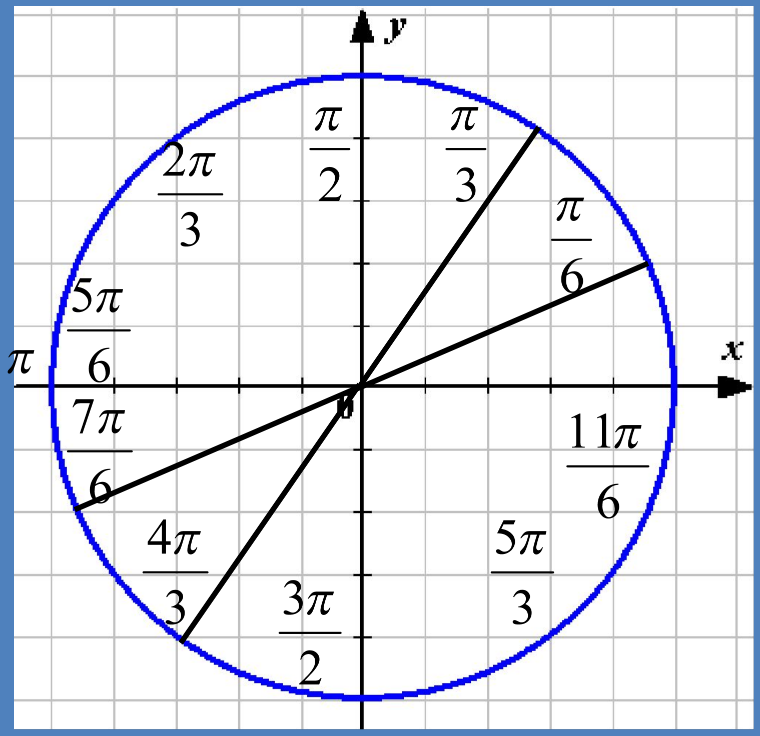
Построение графика функции y = sin x.

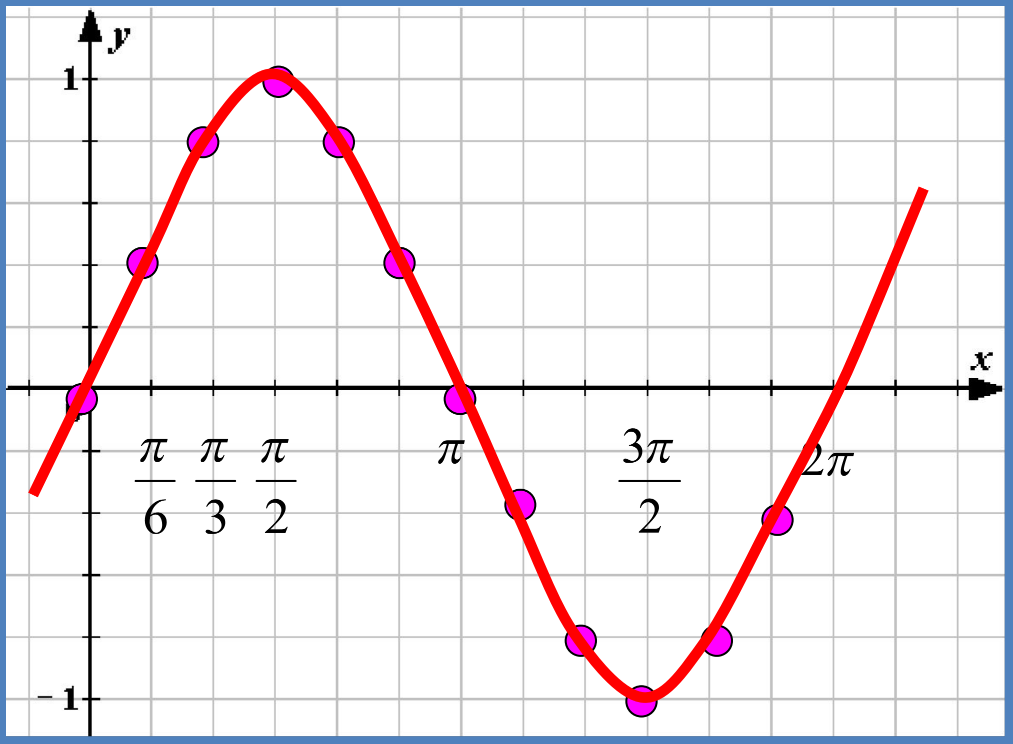


Построение графика функции y = sin x.



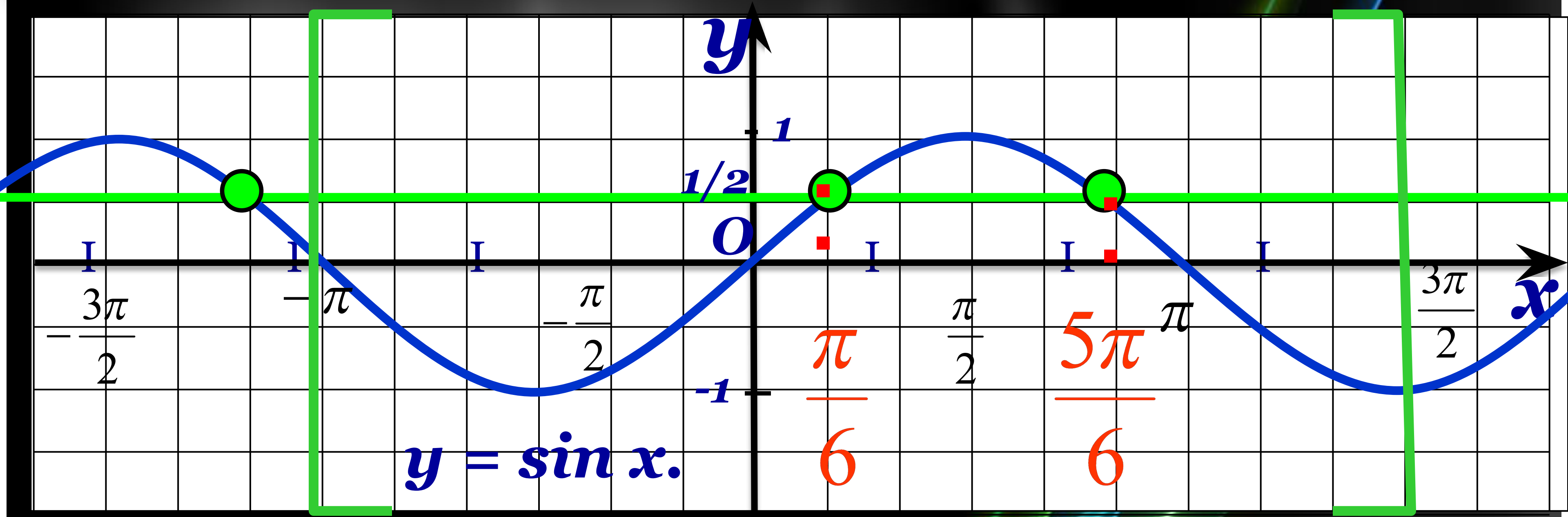
Построение графика функции y = sin x.





Пример №1

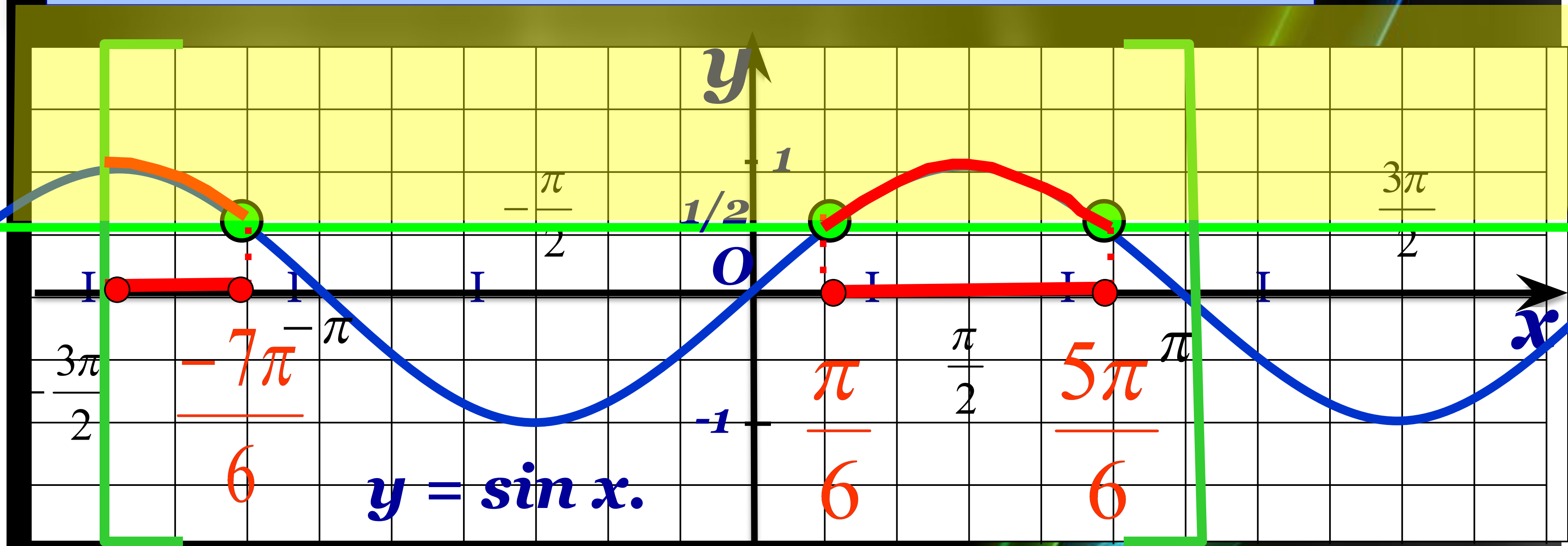
Найти все корни уравнения sin x = 1/2 принадлежащих промежутку –π ≤ x ≤ 3π/2.



Ответ: *x = π/6; x = 5π/6*

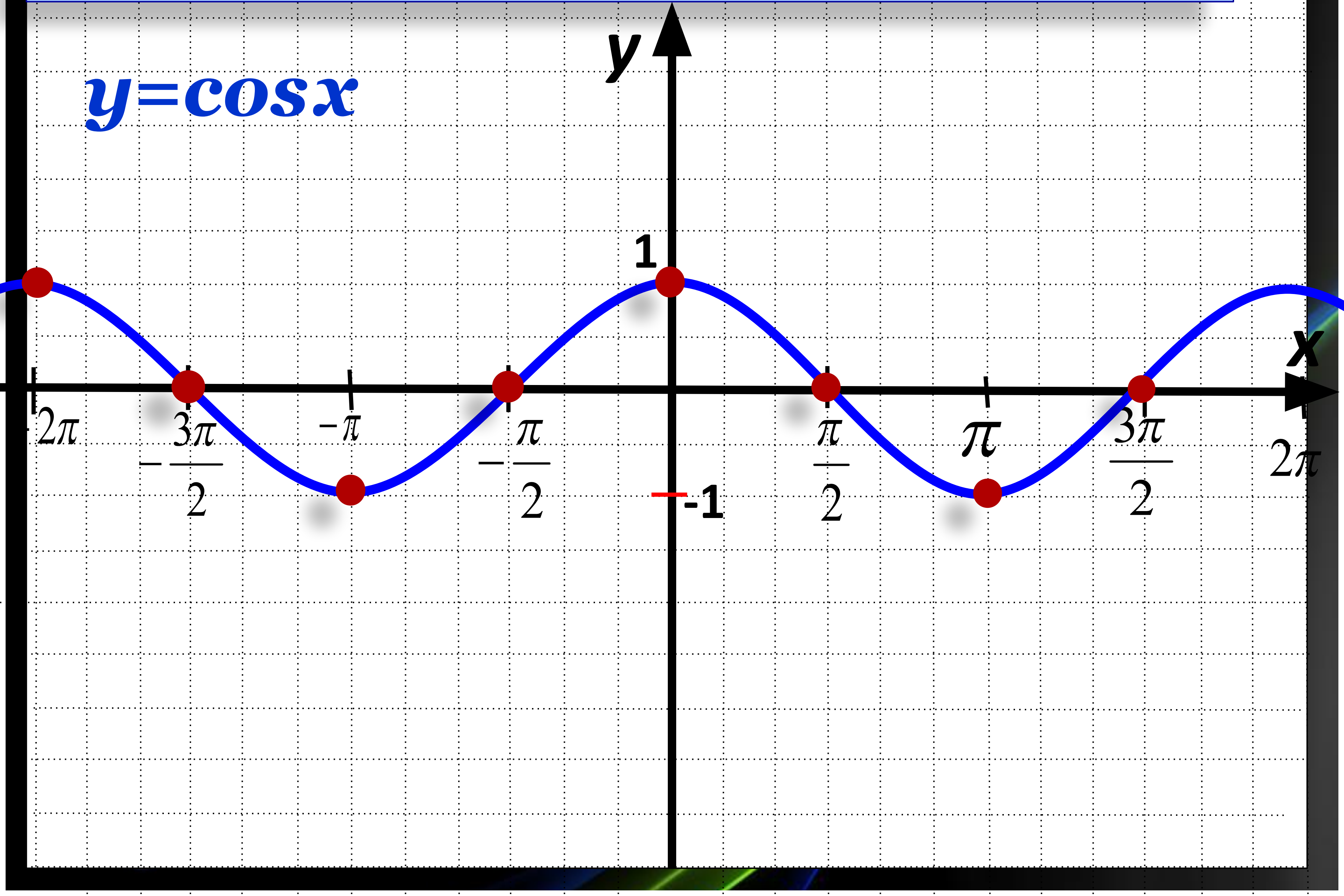
Пример №2

Найти все решения неравенства sin x ≥ 1/2 принадлежащих промежутку –3π/2 ≤ x ≤ π .



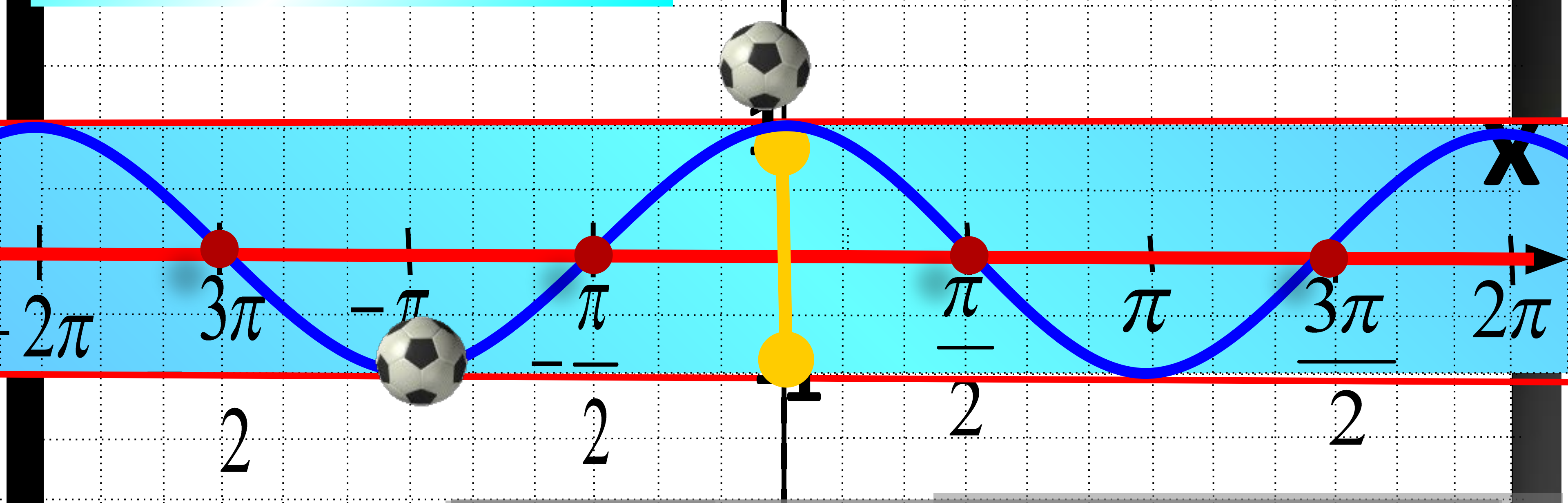
Ответ: $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}; \frac{-7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

Построение графика функции:



Свойства функции y = cos x:

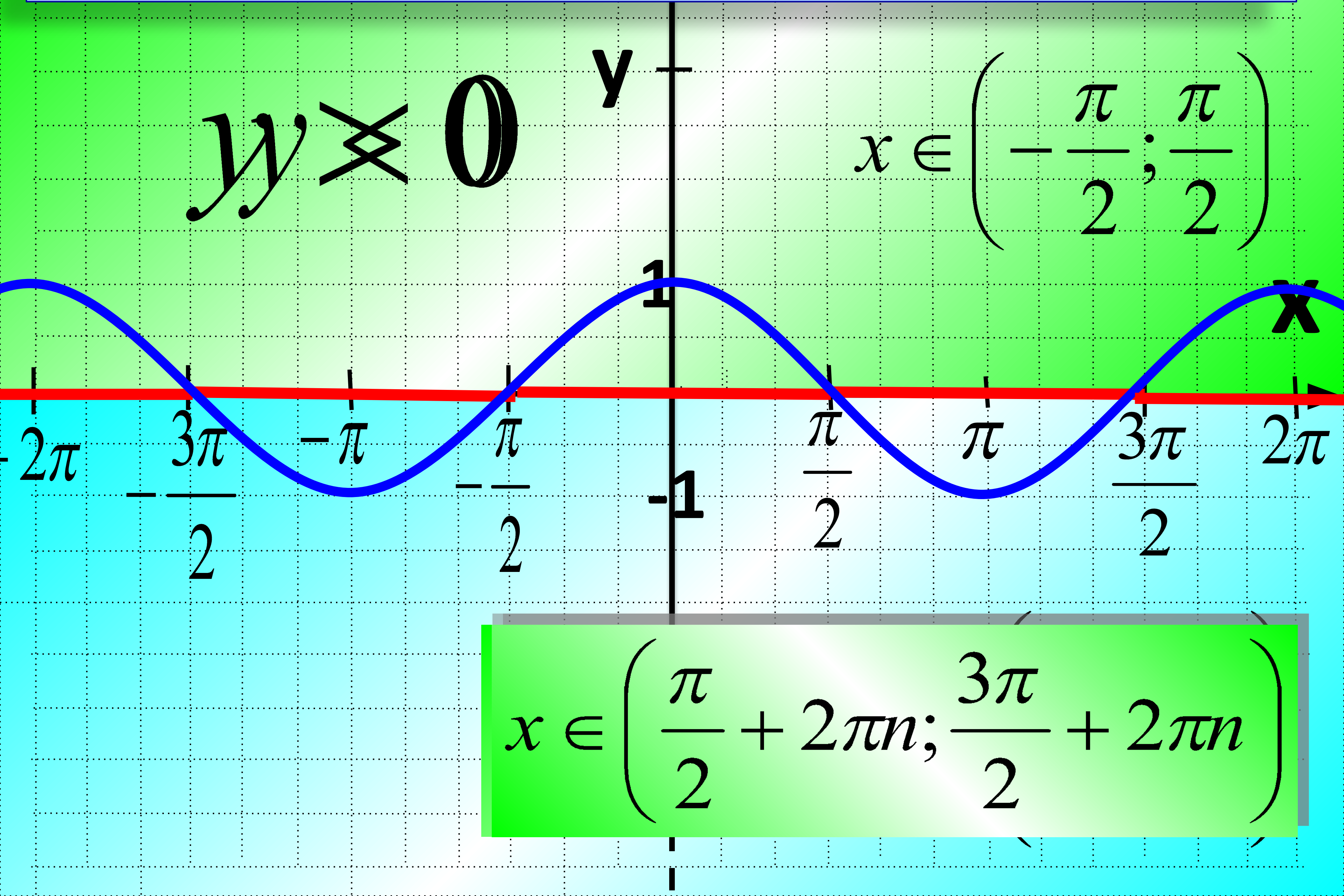
$$E(y): y \in [-1;+1]$$



$$x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$$

z

Свойства функции y = cos x:

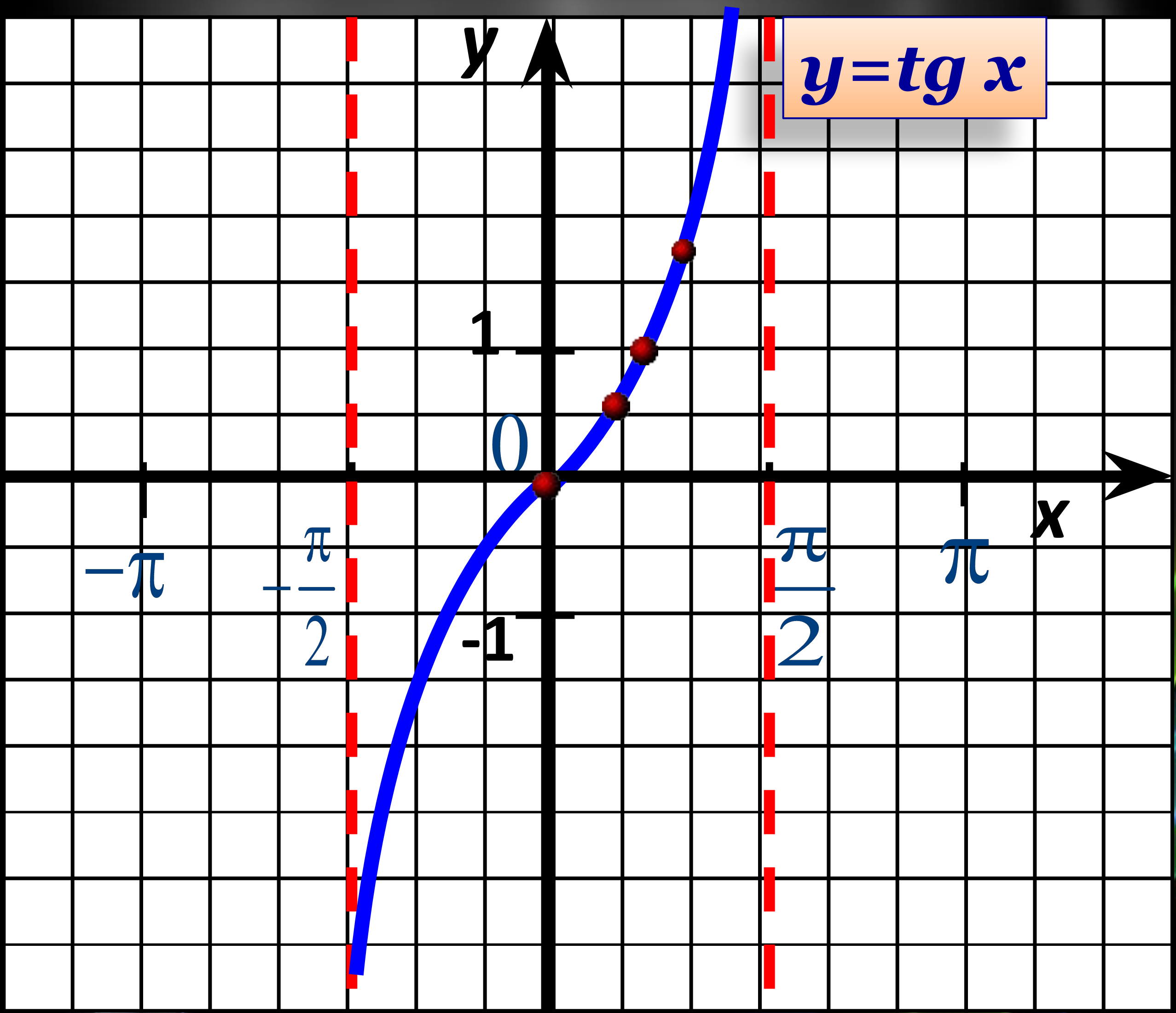


$$y \gtrless 0$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

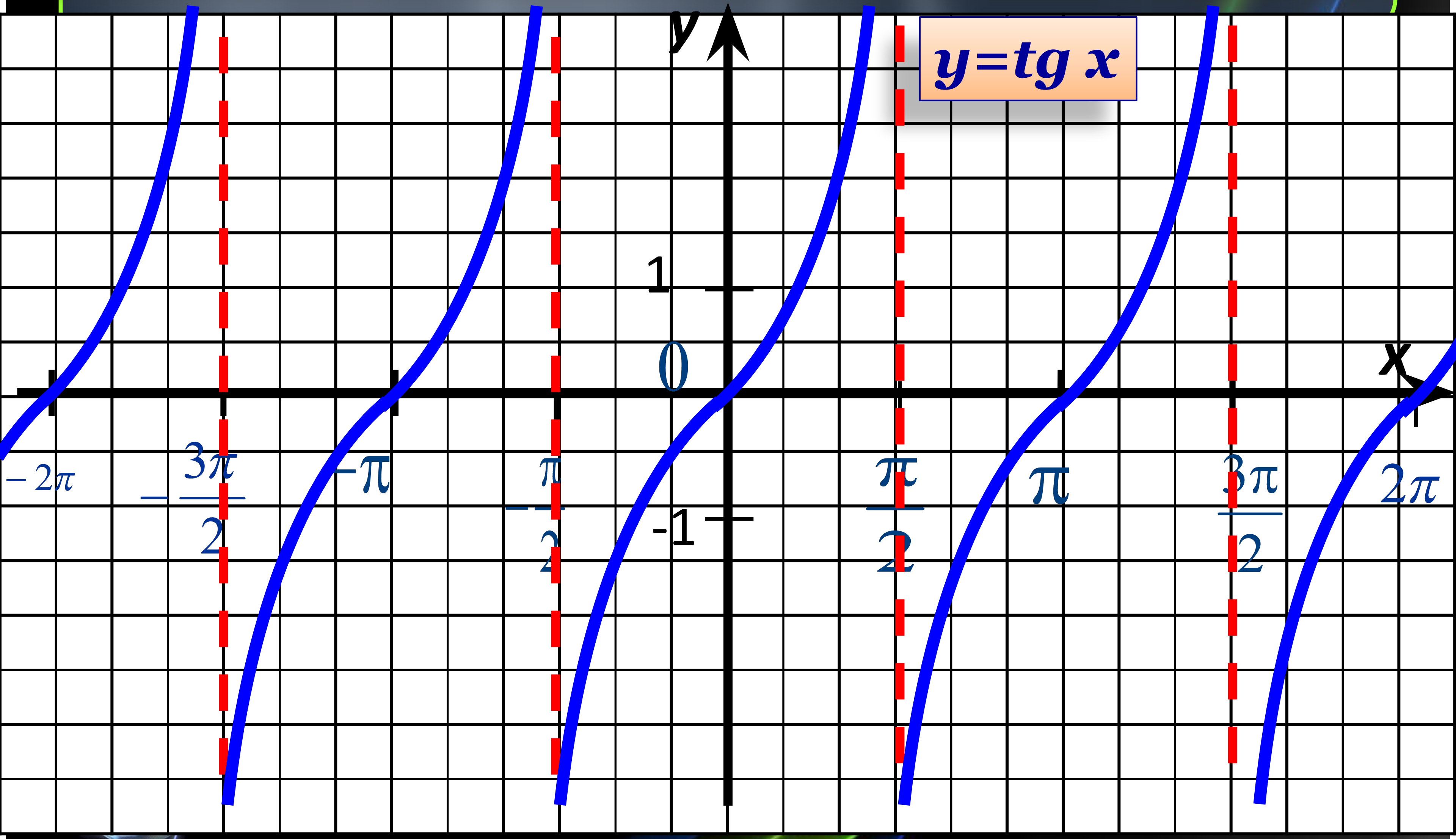
$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$$

Построение графика функции $y = tg\ x$.



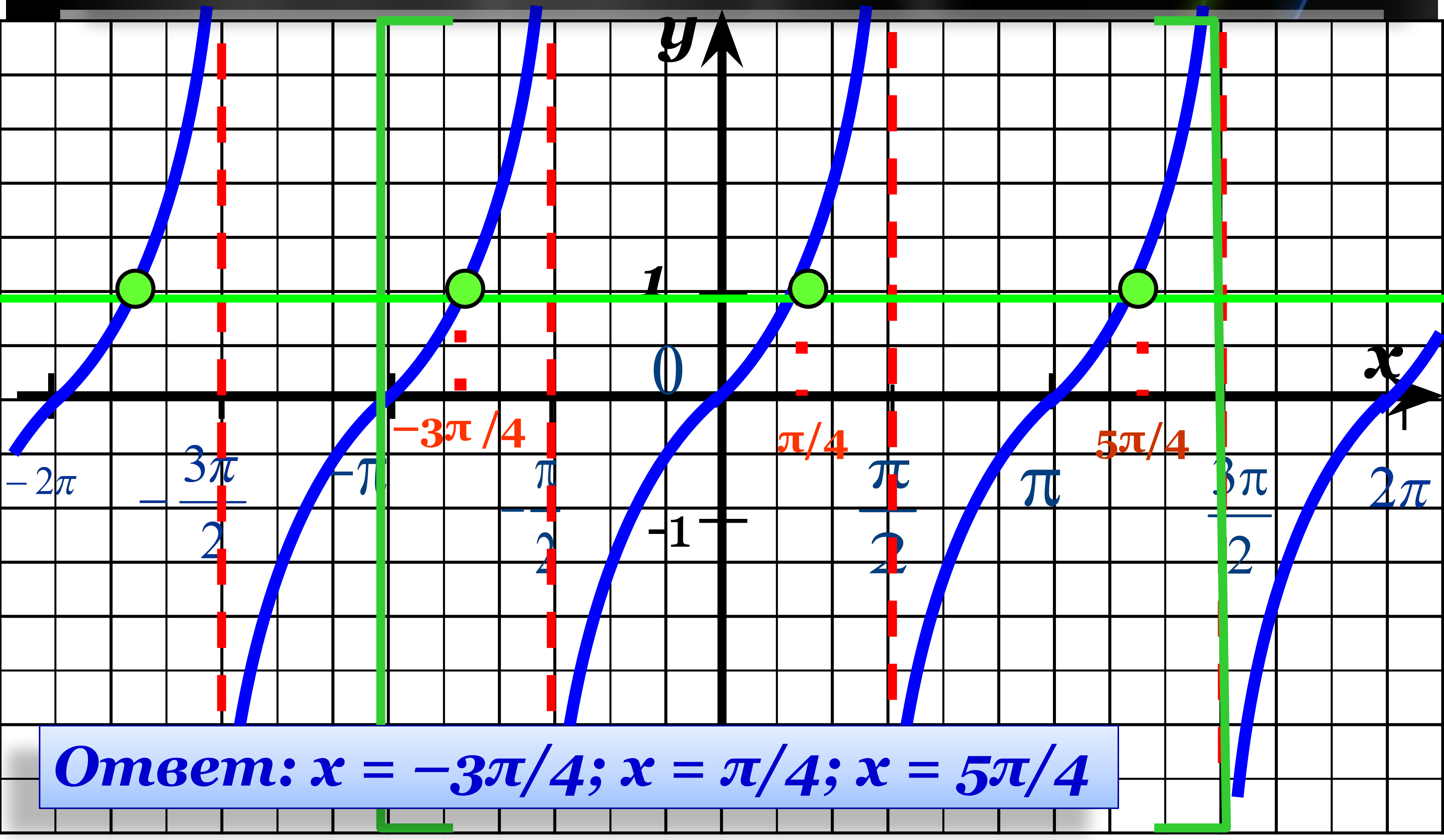
x	$y=tg\ x$
	] .

Построение графика функции $y = tg\ x$.



Пример №1

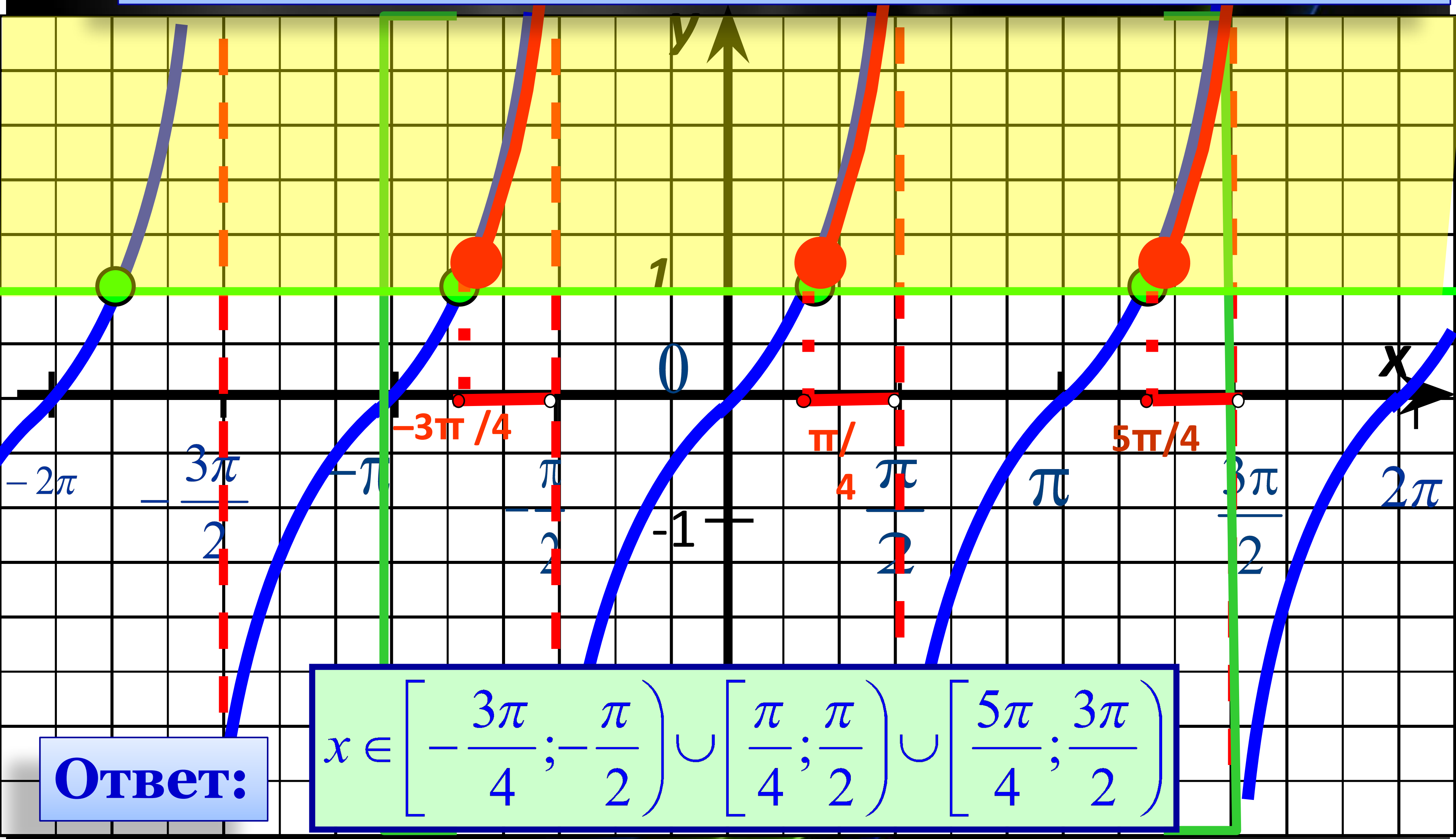
Найти все корни уравнения tg x = 1 принадлежащих промежутку $-\pi \le x \le 3\pi/2$.



Ответ: $x = -3\pi/4$; $x = \pi/4$; $x = 5\pi/4$

Пример №2

Найти все решения неравенства tg x ≥ 1 принадлежащих промежутку $-3\pi/2 \le x \le \pi$.



Ответ:

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

Проверь себя в знании формул!

$1)\ \sin 2\alpha$

$2)\ tg 2\alpha$

$3)\ tg(\alpha+\beta)$

$4)\ \sin(\alpha+\beta)$

$5)\ \cos(\alpha+\beta)$

$6)\ \cos 2\alpha$

$7)\ \cos\alpha-\cos\beta$

$8)\ \sin\alpha+\sin\beta$

$9)\ \cos(\alpha-\beta)$

$10)\ \sin(\alpha-\beta)$

$11)\ tg\alpha - tg\beta$

$12)\ \sin\alpha-\sin\beta$

Ох, уж эта тригонометрия! Опять ЕГЭ! Решаем задания из ЕГЭ!

$$\cos \pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение.

$$\pi\sqrt{x} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \quad \text{или} \quad \pi\sqrt{x} = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, \text{ где } n \in Z;$$

$$\sqrt{x} = \frac{5}{6} + 2n, \ \ n \in Z \qquad \sqrt{x} = -\frac{5}{6} + 2n, \ n \in Z.$$

$$x = \left(\frac{5}{6} + 2n\right)^2, \ n = \ 0, \ 1, \ 2, \ldots, \ \text{так как} \ \frac{5}{6} + 2n \geq 0.$$

$$x = \left(-\frac{5}{6} + 2n\right)^2, \ n = \ 1, \ 2, \ldots, \ \text{так как} \ -\frac{5}{6} + 2n \geq 0.$$

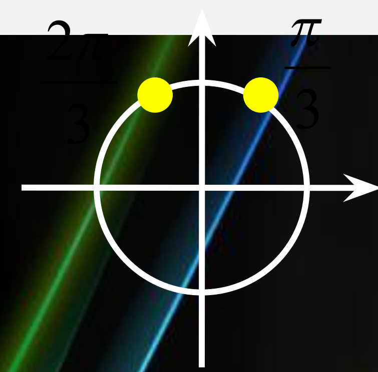
По мнению многих учеников, запись «*n € Z*» - избыточная. А как думаете, Вы?

Учимся решать!

Тригонометрия на ЕГЭ **Задания В5**

Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi(8x-7)}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

В ответе напишите наибольший отрицательный корень.



Решение

Задания В7

Найдите значение выражения $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}$.

Решение.

$$\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{4}\cos^2\frac{5\pi}{12}-1\right)=\sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{5\pi}{12}-1\right)=$$

$$=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1,5.$$

Задания В7

Найдите $\dfrac{10\cos\alpha + 4\sin\alpha + 15}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3}$, *если* $tg\alpha = -2{,}5$.

Решение.

Если $tg\alpha = -2{,}5$, *то* $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2{,}5$, *значит,* $\sin\alpha = -2{,}5\cos\alpha$.

Получим: $\dfrac{10\cos\alpha + 4(-2{,}5\cos\alpha) + 15}{2(-2{,}5\cos\alpha) + 5\cos\alpha + 3} = \dfrac{10\cos\alpha - 10\cos\alpha + 15}{-5\cos\alpha + 5\cos\alpha + 3} =$

Задания В14

Найдите точку минимума функции $y=(0,5-x)\cos x+\sin x$,

принадлежащую промежутку $(0;\ \frac{\pi}{2})$.

Решение

$y=(0,5-x)\cos x+\sin x,\quad D(y)=R.$

$y'=(0,5-x)'\cos x+(0,5-x)(\cos x)'+\cos x=-\cos x-(0,5-x)\sin x+\cos x=$

$=(x-0,5)\sin x.\qquad y'=0,\quad$ *если* $\ (x-0,5)\sin x=0.$

$x=0 \qquad \qquad \sin x \qquad \qquad$ *на промежутке*

$x_{min}=0,5.$

Ответ:

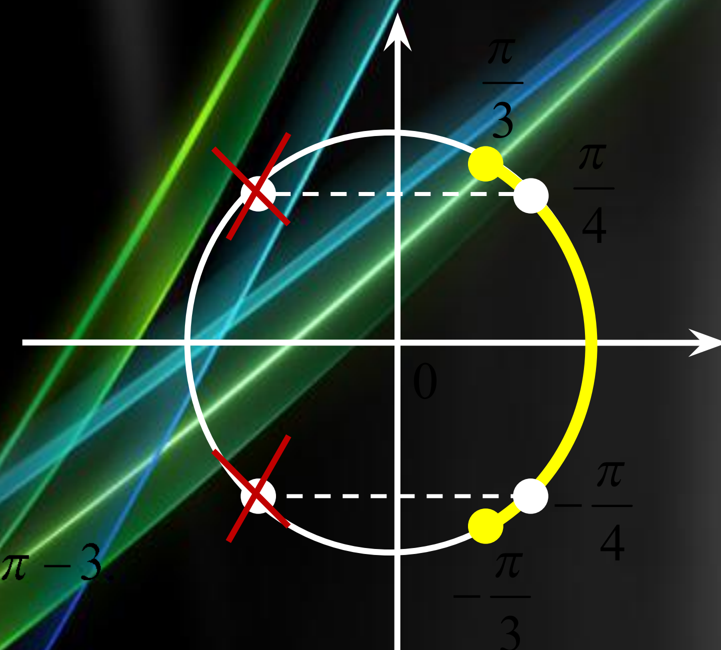
Тригонометрия на ЕГЭ   Задания В14

Найдите наибольшее значение функции $y=-2tgx+4x-\pi-3$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

Решение.

$y=-2tgx+4x-\pi-3,\qquad D(y):\ \cos x\neq 0.$



Проработали весь материал?

М о л о д ц ы ! ! !