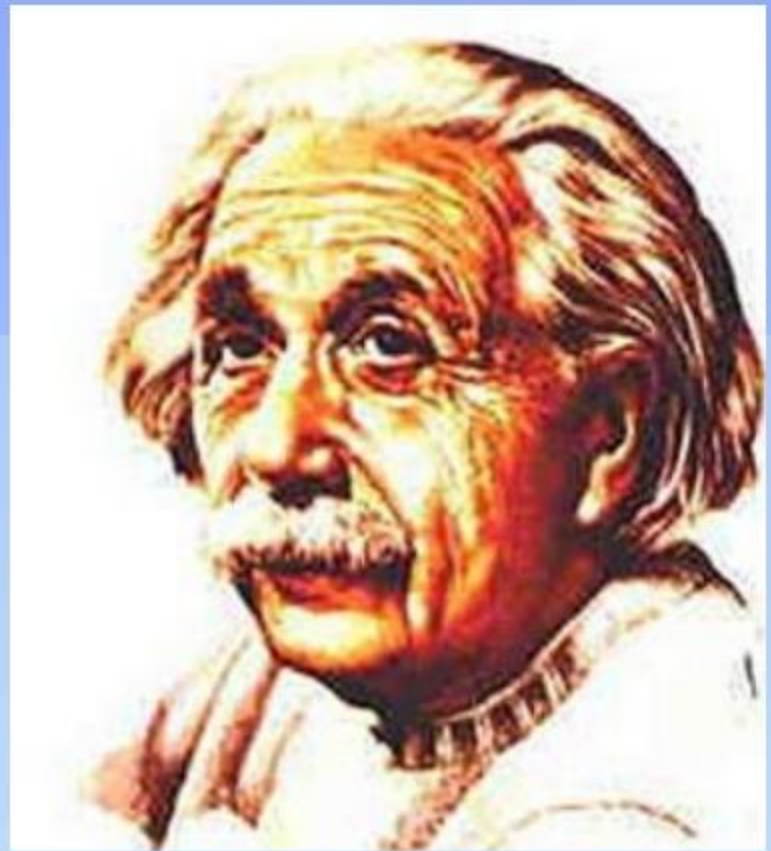


Показательные неравенства

« Мне приходится делить своё время между политикой и решением уравнений и неравенств . Однако решение уравнений и неравенств , по-моему, гораздо важнее , потому что политика существует только для данного момента , а уравнения и неравенства будут существовать вечно .»



Альберт Эйнштейн

Цель урока:

**Формирование знаний об основных
методах решения показательных
неравенств**

Вспомним:

1. Какие уравнения называются показательными?

2. Какие основные способы решения показательных уравнений вы знаете?

Показательные неравенства – ?

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

неизвестное содержится в показателе

степени

Примеры: $3^x \leq 9;$ $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

**Простейшие показательные
неравенства – это неравенства вида:**

$$a^x > a^b$$

$$a^x < a^b$$

$$a^x \geq a^b$$

$$a^x \leq a^b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – *любое число.*

Решением неравенства с неизвестным

x называют число x_0 , при подстановке

которого в неравенство получается

верное числовое неравенство

Решить неравенство –

**значит, найти все его решения или
показать, что их нет.**

При $a > 1$ функция возрастает

$$a^x < a^b$$

$$a^x > a^b$$

$$x < b$$

$$x > b$$

При $0 < a < 1$ функция убывает

$$a^x < a^b$$

$$a^x > a^b$$

$$x > b$$

$$x < x_0$$

Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

1) $y = 5^x$ *возрастающая, т.к. $5 > 1$*

2) $y = 0,5^x$ *убывающая, т.к. $0 < 0,5 < 1$*

3) $y = 10^x$ *возрастающая, т.к. $10 > 1$*

4) $y = \pi^x$ *возрастающая, т.к. $\pi > 1$*

**Какие из функций являются возрастающими,
а какие убывающими?**

$$5) y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \text{убывающая, т.к. } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6) y = 49^{-x} \quad \text{убывающая, т.к. } 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

Способы решения показательных неравенств:

1. Уравнивание оснований правой и левой частей

Стр. 81, задача 1

Решите неравенство:

$$2^x < 8,$$

$$2^x < 2^3, \quad y = 2^t (2 > 1)$$

$$x < 3.$$

возрастает на всей
области определения,

$$x \in (-\infty; 3)$$

Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

т.к. $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ возрастающая

$$x > 4 \quad x \in (4; +\infty)$$

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3},$$

$$x < -3.$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(0 < \frac{1}{3} < 1\right)$$

убывает на всей области определения,

$$x \in \left(\overset{(-\infty; -3)}{-\infty}; -3\right)$$

Решите неравенства:

$$1). \quad 3^x > 9$$

$$3^x > 3^2$$

$$x > 2$$

Ответ : $x > 2$.

$$2). \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x < 2$$

Ответ : $x < 2$.

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывающая

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Решите неравенство:

$$2^{3x} \geq \frac{1}{2};$$

$$2^{3x} \geq 2^{-1};$$

т.к. основание $2 > 1$, то функция возрастающая

$$3x \geq -1;$$

$$x \geq -\frac{1}{3}; \quad x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty \right)$$

$$5^{3x+1} - 1 \geq 0$$

$$5^{3x+1} - 1 \geq 0$$

$$5^{3x+1} \geq 1$$

$$5^{3x+1} \geq 5^0$$

$$3x + 1 \geq 0$$

$$x \geq -1/3$$

$$x \in [-1/3; +\infty)$$

$$(1,5)^{x-1} > \frac{4}{9}.$$

$$(1,5)^{x-1} > \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} > \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$1-x < 2,$$

$$x > -1.$$

**Стр. 81, задача 2,
стр. 82 задача 3**

2. Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^{x-3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^3\right) > 10$$

$$3^{x-3} (1 + 9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \quad | : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^0$$

3 > 1, то $x - 3 > 0$

$$x > 3.$$

Ответ: $x > 3$

3. Метод почленного деления

:

4. Введение новой переменной

$$9^x - 10 \cdot 3^x < -9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 10t + 9 < 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(t-9)(t-1) < 0$$

+  +

$$1 < t < 9$$

$$1 < 3^x < 9$$

$$3^x < 3^2; \quad 3^x > 3^0;$$
$$x < 2 \quad \quad \quad x > 0.$$

3 > 1, то

Стр. 82, задача 4

5. Графический метод

Стр. 82, задача 5

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$$

$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **убывает на \mathbb{R}**

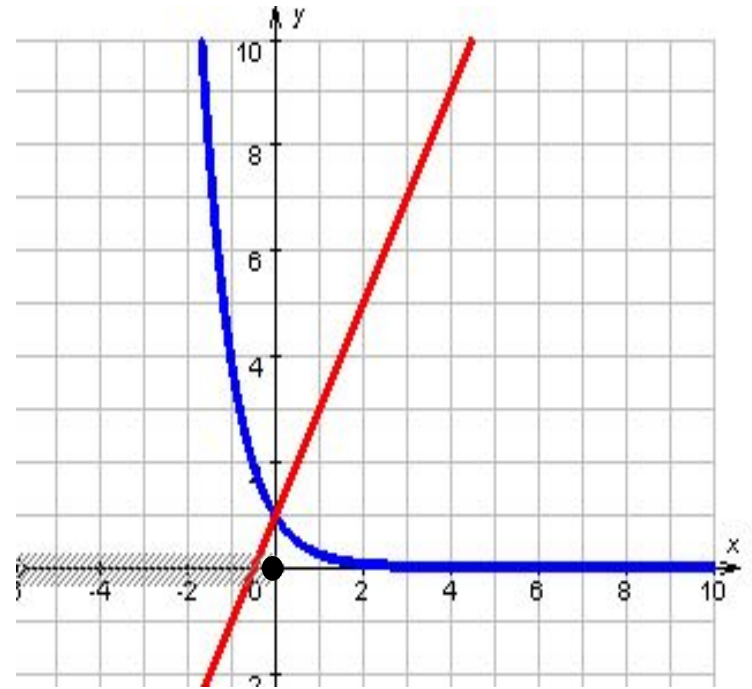
$g(x) = 2x + 1$ **возрастает на \mathbb{R}**

Строим схематически графики

Неравенство выполняется при

$$x \leq 0$$

Ответ : $(-\infty; 0]$



$$2^x \leq 3 - \sqrt{x}$$

$f(x) = 2^x$ **возрастает на \mathbb{R}**

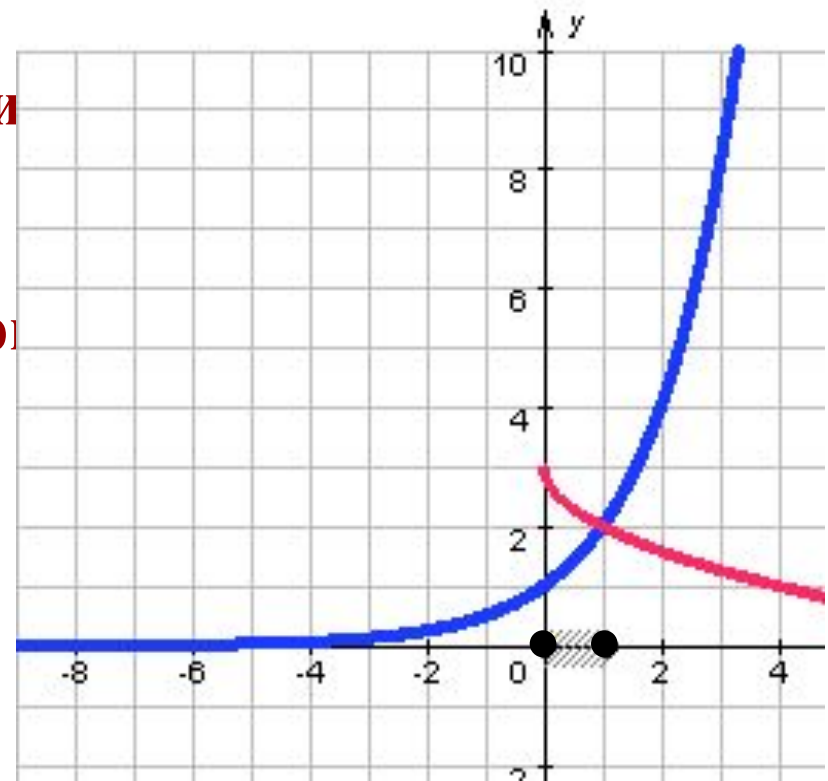
$g(x) = 3 - \sqrt{x}$ **убывает на $[0; +\infty)$**

Строим схематически графики

Неравенство выполняется при

$$0 \leq x \leq 1$$

Ответ: $[0; 1]$



№228(1,2,3),

№229(1,2,4),

№231(1,2),

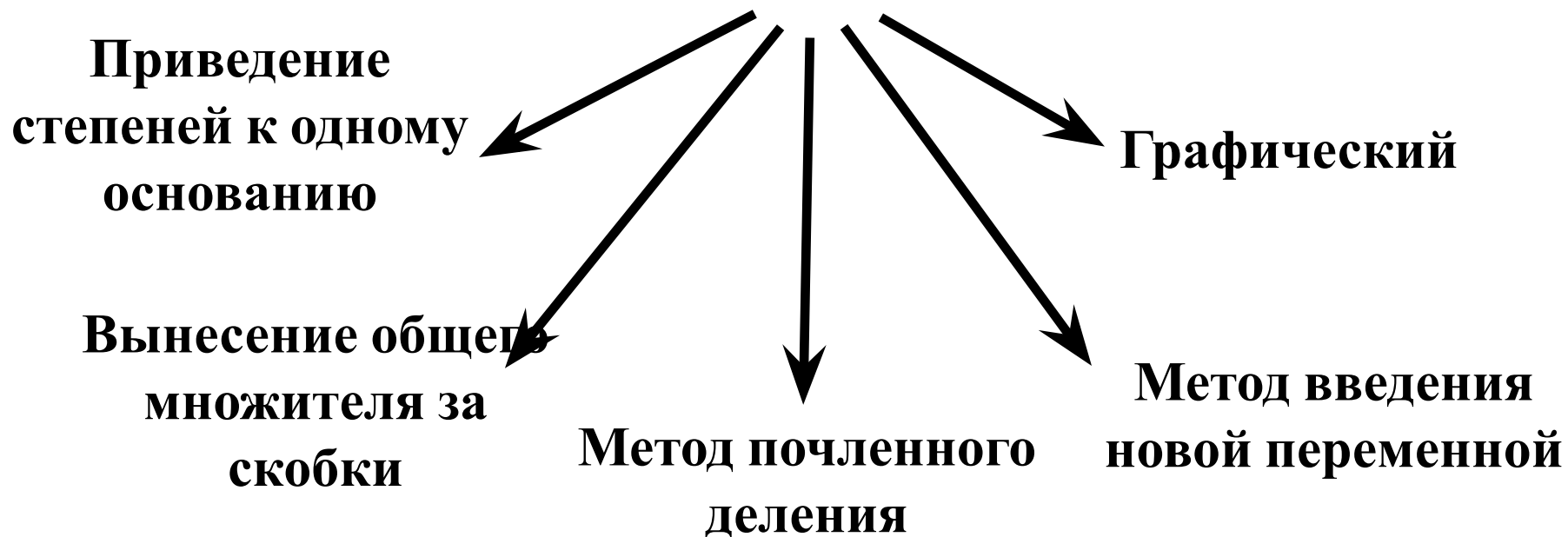
№232(1,2),

№233(1) ,

№236(1)

Итог урока:

Методы решения показательных неравенств



Ресурсы:

1. Учебник, Ш.А Алимов, Ю. М. Колягин и др., Алгебра и начала математического анализа, Москва, Просвещение, 2017;
2. <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2017/02/01/pokazatelnye-uravneniya-urok-algebry-v-10-klasse>;
3. <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2011/12/01/pokazatelnye-uravneniya-i-sposoby-ikh-resheniya>;