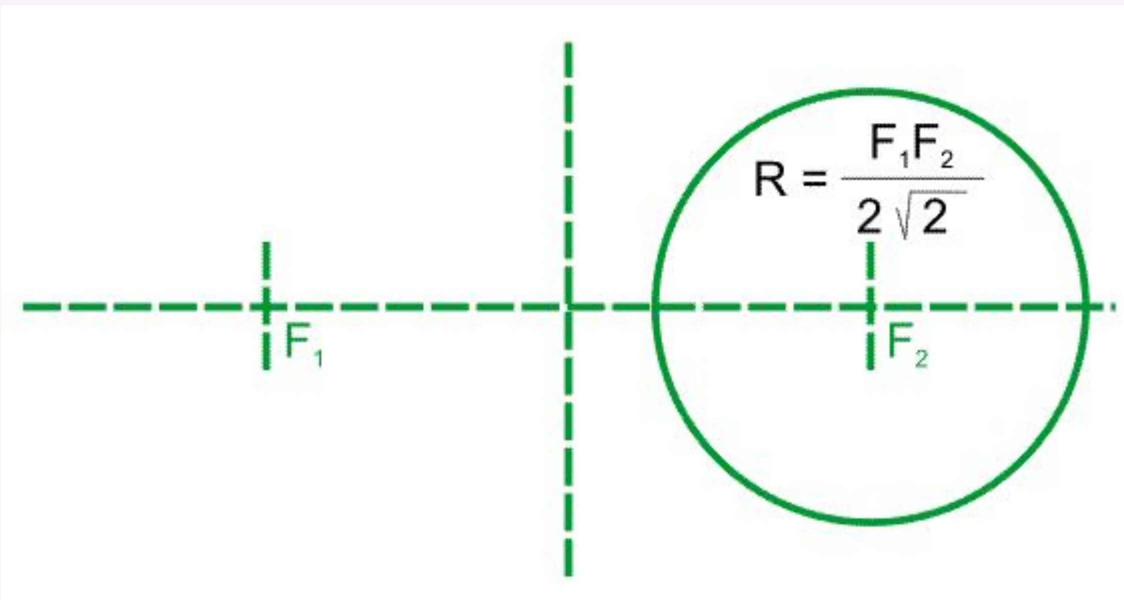
Лемниската Бернулли



Товмасяна С.А.
Математический факультет МПГУ
группа II-7
2013 год

Определение

- Лемниска́та Берну́лли — плоская алгебраическая кривая. Определяется как геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами.
- Лемниската по форме напоминает восьмёрку или символ бесконечности.

Оглавление

Бернулли, Якоб

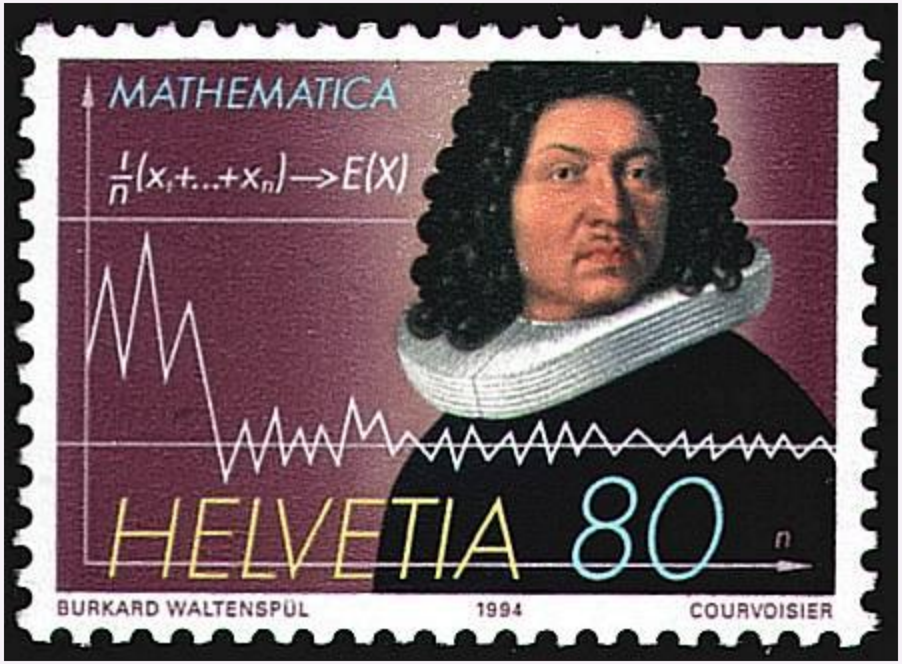
Я́коб Берну́лли (нем. *Jakob Bernoulli*, 27 декабря 1654, Базель, — 16 августа 1705, там же) — швейцарский математик, профессор математики Базельского университета (с 1687 года). Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли. Иностранный член Парижской Академии наук (1699) и Берлинской академии наук (1701).

Якоб родился в семье преуспевающего фармацевта Николая Бернулли. Вначале он учился в Базельском университете богословию, но увлёкся математикой, которую изучил самостоятельно.

Описание	Якоб Бернулли(1654 – 1705)
Дата	1687
Автор	Никлаус Бернулли(1662-1716)

Оглавление

Бернулли, Якоб



В 1687 году Якоб Бернулли познакомился в печати с первым мемуаром Лейбница по анализу (1684 года) и с энтузиазмом начал освоение нового исчисления. Он обратился с письмом в ?Дрезден? к самому Лейбницу с просьбой разъяснить несколько тёмных мест. Ответ получил спустя три года в 1690 году (до того Лейбниц был в отъезде в Париже). Впрочем, Якоб Бернулли самостоятельно освоил новое исчисление и приобщил к нему своего брата Иоганна. По возвращению Лейбниц вступил в активную переписку с обоими братьями. Сложившийся триумвират двадцать лет возглавлял европейскую математику и чрезвычайно обогатил новый анализ.

Не менее 30 представителей Бернулли обладали талантами, среди них выдающиеся историки, архитекторы, юристы и пр. Но три великих математика - Якоб, Иоганн, Даниил - стоят на недосягаемой высоте.

Оглавление

История лемнискаты

- Название от греч. ληµνισχος — повязка. В Древней Греции «лемнискатой» называли бантик, который прикрепляли к голове победителя на спортивных играх.
- Математическое уравнение лемнискаты впервые опубликовано в статье «Curvatura Laminae Elasticae» Якоба Бернулли в журнале Acta Eruditorum в 1694 году. Бернулли назвал эту кривую lemniscus. Он не знал, что четырнадцатью годами ранее Джованни Кассини уже исследовал более общий случай. ?Квадратуру? лемнискаты впервые вычислил Джюлио-Карло Фаньяно, опубликовав в 1718 году статью «Metodo per misurare la lemniscata» и положив, тем самым, начало изучению эллиптических интегралов. Некоторые свойства лемнискаты были исследованы Якобом Штейнером в 1835 году.

Оглавление

Кассини, Джованни Доменико

Джованни Кассини	
Дата рождения:	8 июня 1625
Место рождения:	Перинальдо, Италия
Дата смерти:	14 сентября 1712 (87 лет)
Место смерти:	Париж, Франция
Научная сфера:	Астрономия
Место работы:	Болонский университет, Парижская обсерватория
Учёное звание:	Профессор

Придерживался устарелых физических концепций, был противником теории всемирного тяготения, его коперниканство было ограниченным, он предлагал заменить эллипсы Кеплера кривыми четвертого порядка (овалами Кассини), считал, что Рёмер неправильно объясняет наблюдаемую неравномерность движения спутников Юпитера конечностью скорости света. Ошибочными были и его взгляды на природу комет.

Оглавление

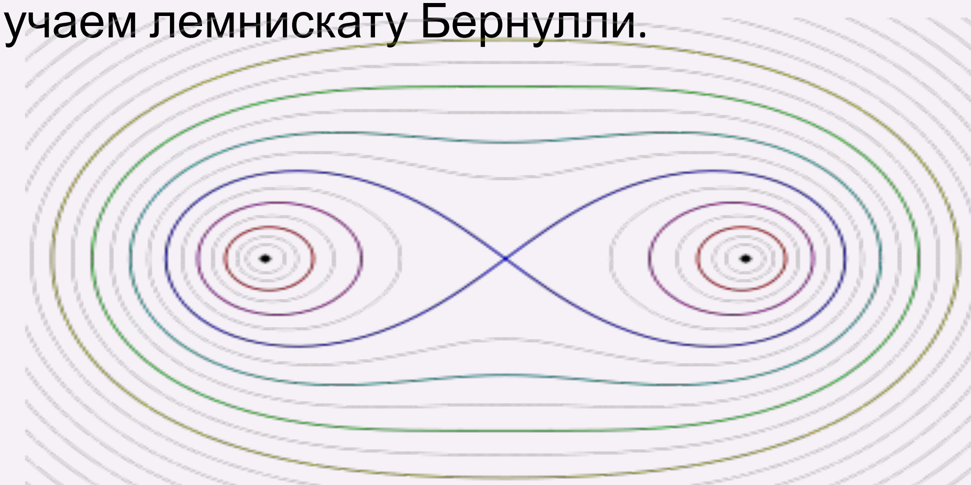
Овалы Кассини

- Овал Кассини – геометрическое место точек, произведение растояний от которых до двух заданных точек(фокусов) постоянно и равно квадрату некоторого числа a.
- Овал Кассини не всегда выглядит как привычный овал.
- Общее уравнение для овалов Кассини с фокусным растоянием равным $2c$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$

Выглядит так:

- При $a = c$ получаем лемнискату Бернулли.



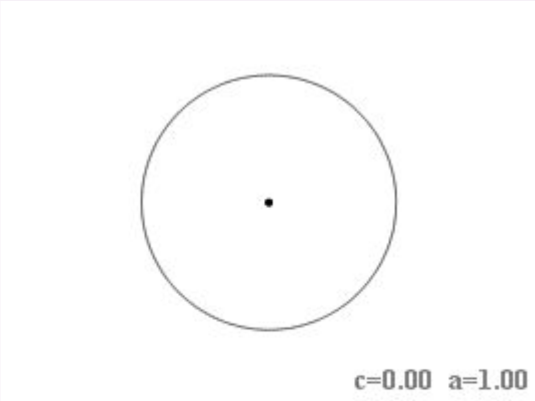
Оглавление

Особенности формы

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - x^4$$

- При $c > a$ кривая распадается на два яйцеобразных овала.

•При $c \to \infty$ овалы вырождаются в две отдельные расходящиеся точки.



Оглавление

Уравнения лемнискаты Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$$

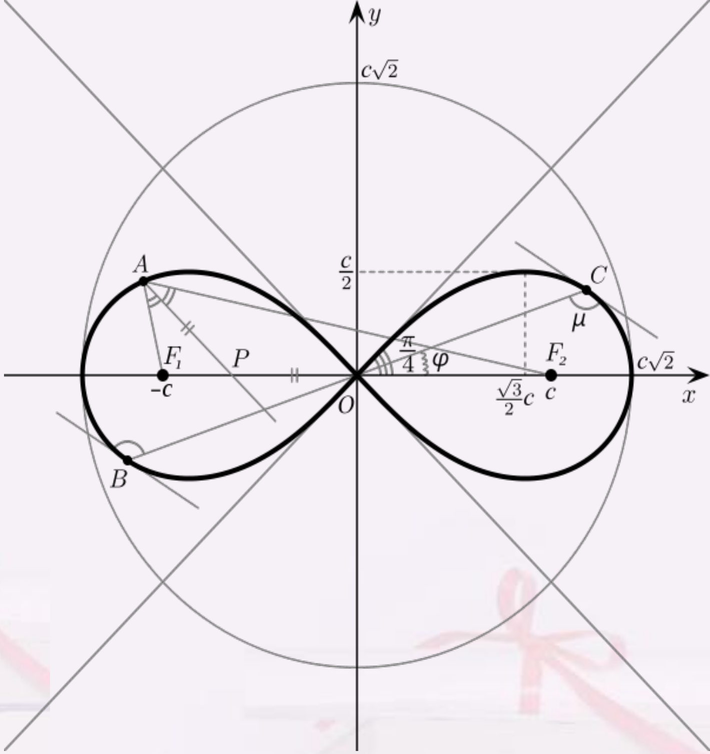
$$y = \pm\sqrt{\sqrt{c^4 + 4x^2c^2} - x^2 - c^2}$$

$$p^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$$

- Расстояние между фокусами равно $2c$, фокусы расположены симметрично на оси абсцисс.

Оглавление

Основные свойства



•Лемниската — кривая четвёртого порядка.
•Она симметрична относительно двойной точки — середины отрезка между фокусами.
• Кривая имеет 2 максимума и 2 минимума. Их координаты:

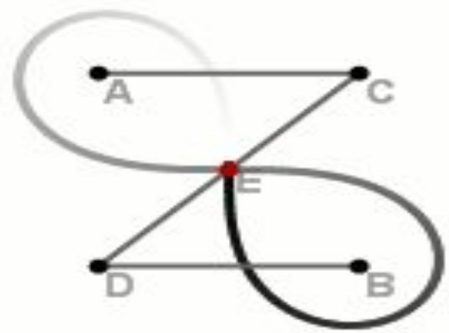
$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}c \\ y = \pm\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

•Расстояние от максимума до минимума, находящихся по одну сторону от серединного перпендикуляра отрезка между фокусами равно расстоянию от максимума (или от минимума) до двойной точки.
•Касательная в двойной точке(в точке (0;0)) составляют с осью абсцисс углы $\frac{\pi}{4}$.

[Оглавление](#)

Построения. Шарнирный метод

- Вариант первый



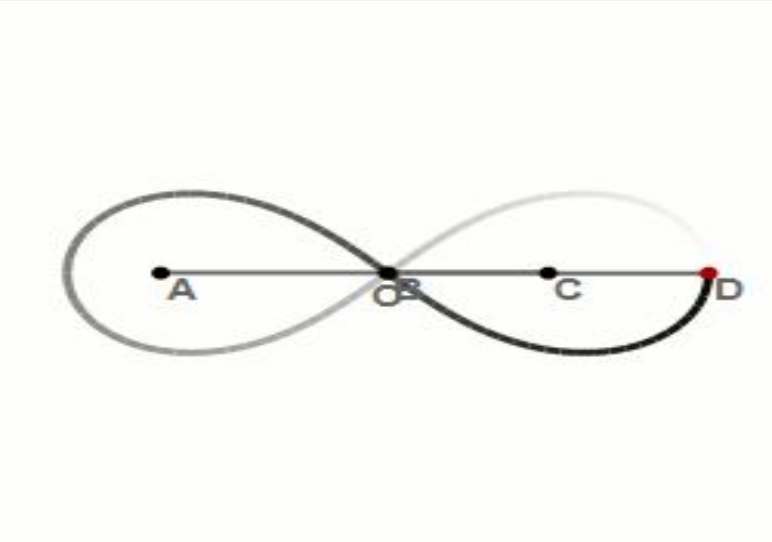
- На плоскости выбираются точки A и B будущие фокусы лемнискаты. Собирается специальная конструкция из трёх скреплённых в ряд на шарнирах отрезков, чтобы полученная линия могла свободно изгибаться в двух местах (точки сгиба *C* и *D*). При этом необходимо соблюдать $AC = BD = \frac{AB}{\sqrt{2}}, CD = AB$ отрезков:

- Края линии крепятся к фокусам. При вращении отрезков вокруг фокусов середина центрального отрезка опишет лемнискату Бернулли.

[Оглавление]

Построения

- Вариант второй



- В этом варианте лемниската строится по фокусу и двойной точке — *A* и *O* соответственно. Собирается почти такая же шарнирная конструкция как и в предыдущем варианте, но прикреплённый к двойной точке отрезок *OC* соединяется не с концом центрального *BD*, а с его середи

$$BC = CD = OC = \frac{AO}{\sqrt{2}}, AB = AO$$

также другие:

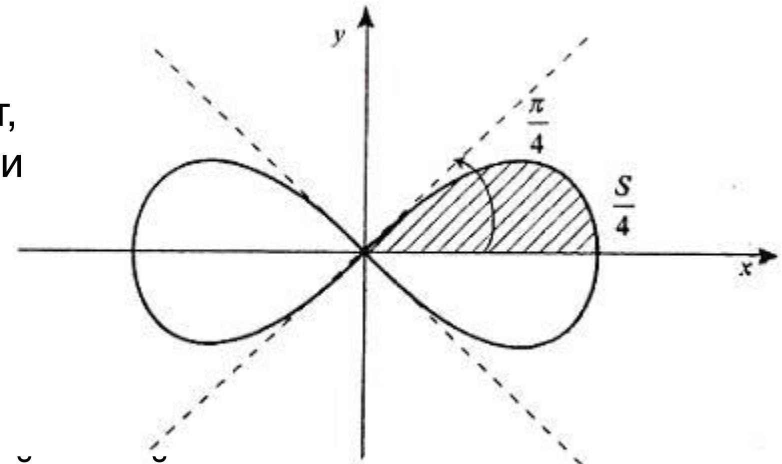
Оглавление

Вычислить площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли.

Решение

В полярной системе координат, уравнение лемнискаты Бернулли примет вид:

$$r^2 = \alpha^2 \cos(2\varphi)$$



Площадь фигуры, ограниченной дугой кривой $r = f(\varphi)$ и двумя полярными радиусами φ_1, φ_2 выразится интегралом $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi$

В силу симметрии кривой определяем сначала одну четвертую искомой площади

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha^2 \cos(2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\alpha^2}{4}$$

Ответ: $S = a^2$

.

Оглавление

ВЫЗВАЛО ЛИ АССОЦИАЦИЮ?

Microsoft® Visual Studio®

Оглавление

Автор выражает признательность за помощь, оказанную при работе над проектом, И.В. Тихонову и В.Б. Шерстюков, благодарит А.А. Привалова за важные данные, предоставленные в ходе работы, а также Диану Цветкович за помощь в оформлении работы.

Ох уж эти
Бернулли!

Литература

- *Белл Э. Т.* Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979. — 256 с.
- История математики под редакцией А. П. Юшкевича в трёх томах, М., Наука
- Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального исчисления(том 1)
- Математическая энциклопедия (в 5-и томах), Москва, «Советская Энциклопедия», 1982, т. 2 Д-Коо, стр. 759.
- И. Г. Колчинский. Астрономы. - Киев, Наукова думка, 1986
- http://www.unigeschichte.unibas.ch/materialien/rektoren/jakob-bernoulli.html
- *Савелов А. А.* Плоские кривые / Под. ред. А. П. Нордена. — М.: ФИЗМАТГИЗ,1960. — С. 155-162.
- Колчинский И.Г.,Корсунь А.А.,Родригес М.Г. Астрономы.Биографический справочник. — Киев: Наукова думка, 1986.
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giovanni_Cassini.jpg?uselang=ru
Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли . — М.: Наука, 1984. — 177 с. — (История науки и техники).

В честь Якоба и Иоганна Бернулли
назван кратер *Bernoulli* на Луне.

Оглавление

Посмотреть ещё раз?