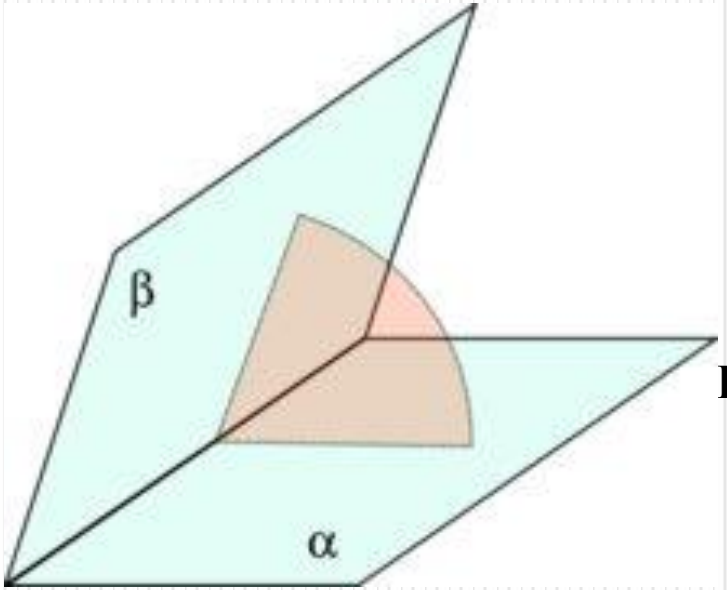
Тема: «Двугранный угол. Угол между плоскостями»



ГБПОУ КК «КАТТ»
Преподаватель математики А.Ю. Ермоленко

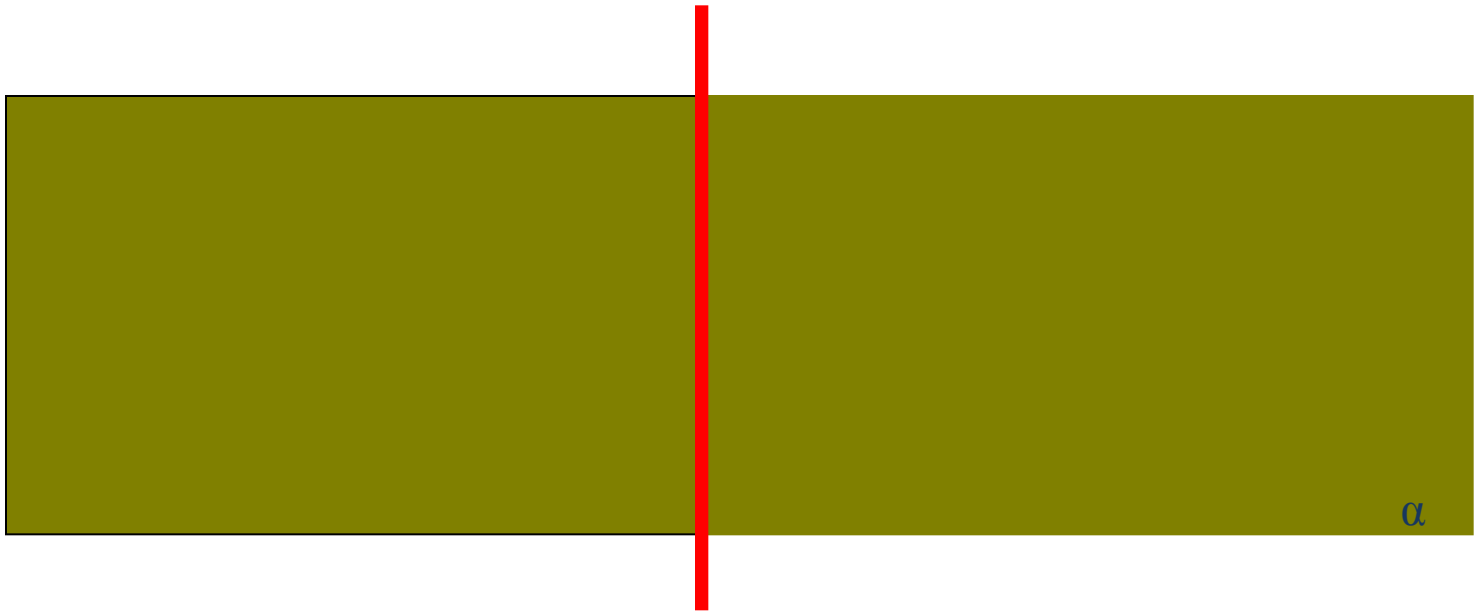
Цели урока:

- Ввести понятие двугранного угла и его линейного угла.
- Сформулировать алгоритм построения линейного угла для данного двугранного.
- Рассмотреть задачи на построение линейного угла.
- Повторить определение угла между прямой и плоскостью, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трёх перпендикулярах ,
- Ввести определение угла между плоскостями, доказать, что угол между плоскостями не зависит от выбора точки на прямой пересечения плоскостей.

Основные понятия

- **Прямая *a* разделяет плоскость на две полуплоскости**

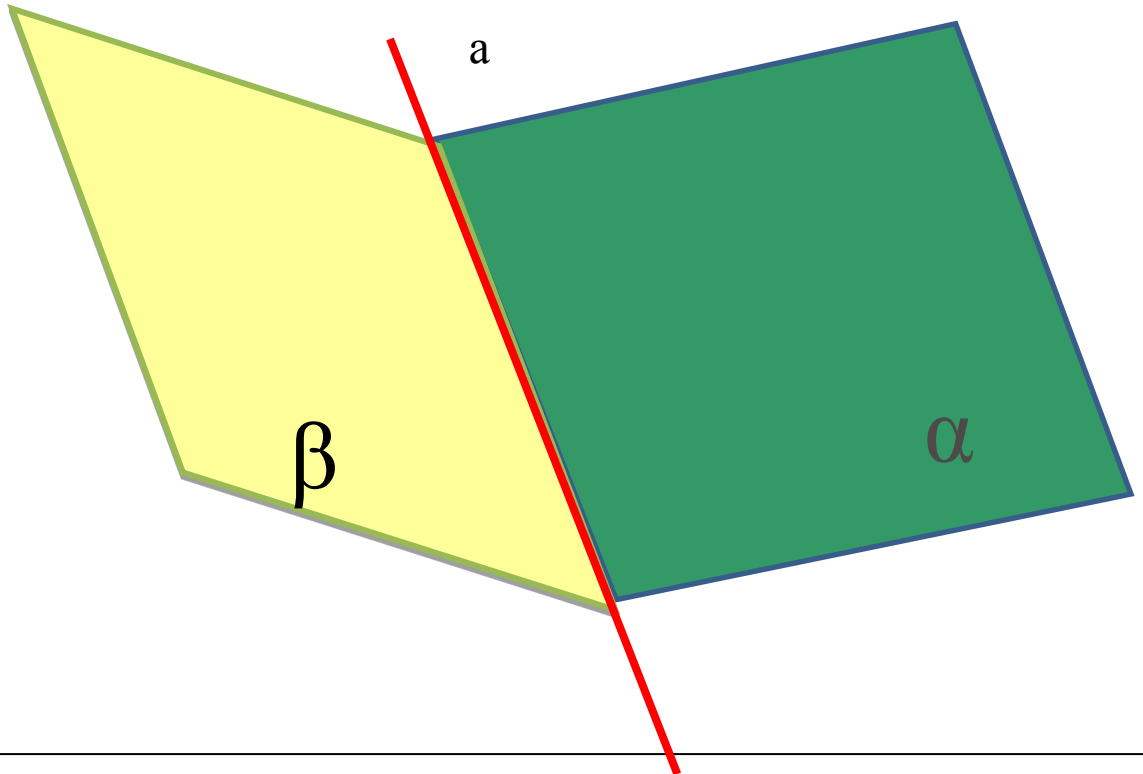
a



***a*- общая граница полуплоскостей называется ребром двугранного угла.**

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями

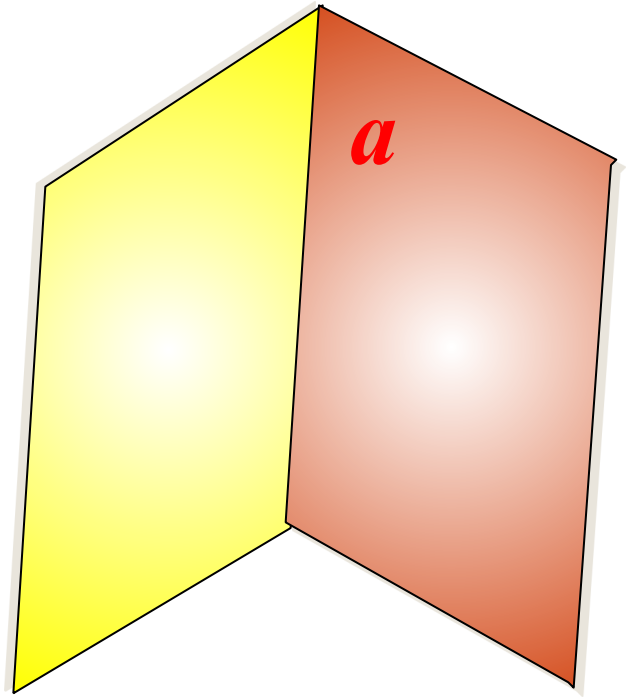
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой *a* и двумя полуплоскостями с общей границей *a*, не прилежащими одной плоскости



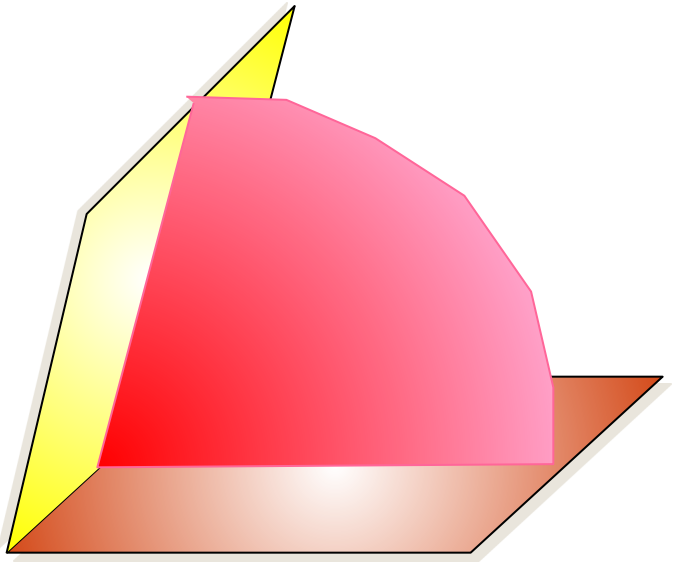
Назовите предметы, имеющие форму двугранного угла

Угол между плоскостями – это двугранный угол Т.е. - это угол, образованный некоторой прямой *a* и двумя полуплоскостями с общей границей *a*, не принадлежащими одной плоскости.

Прямая ***a*** – ребро двугранного угла

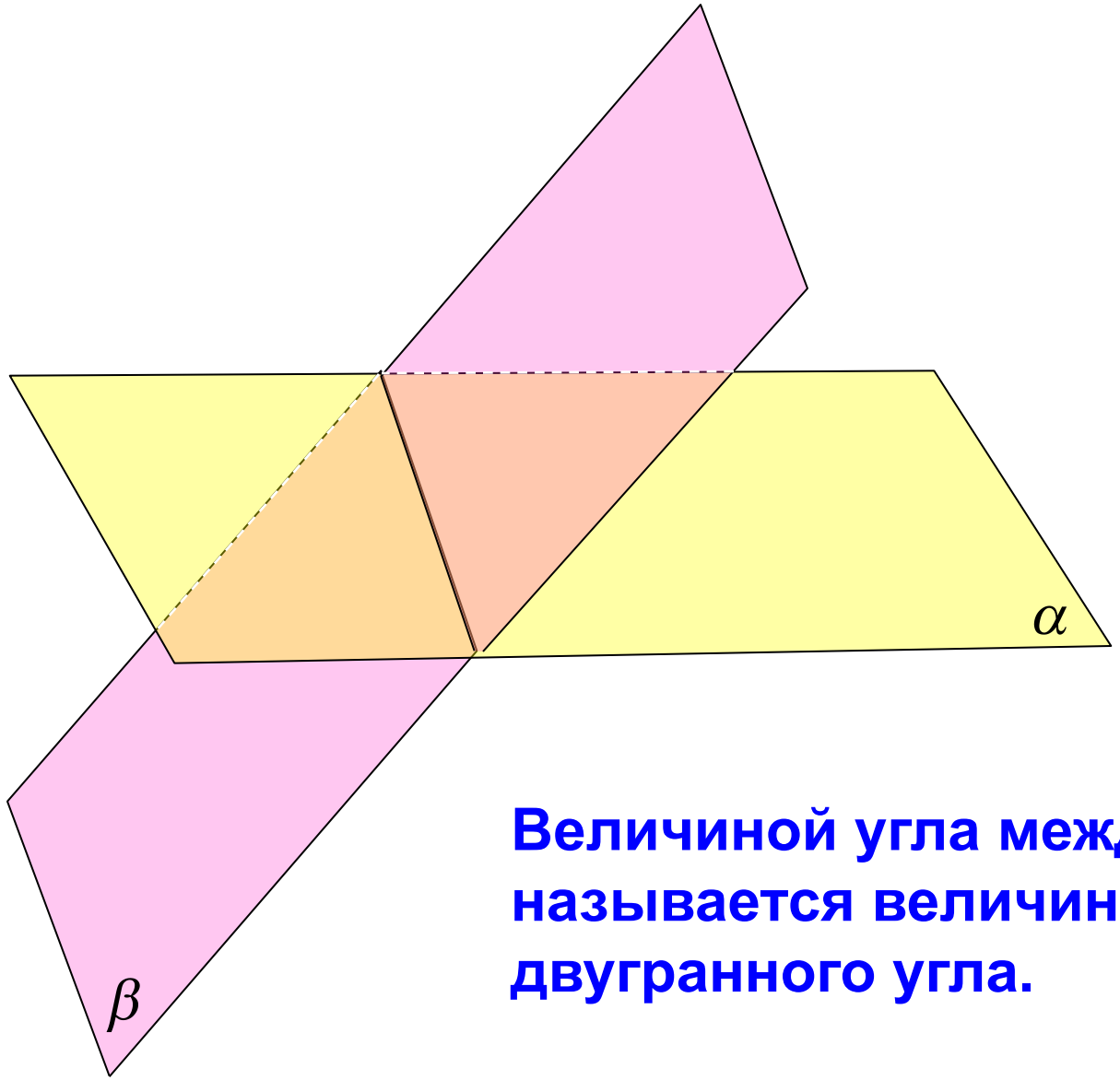


Двугранный угол



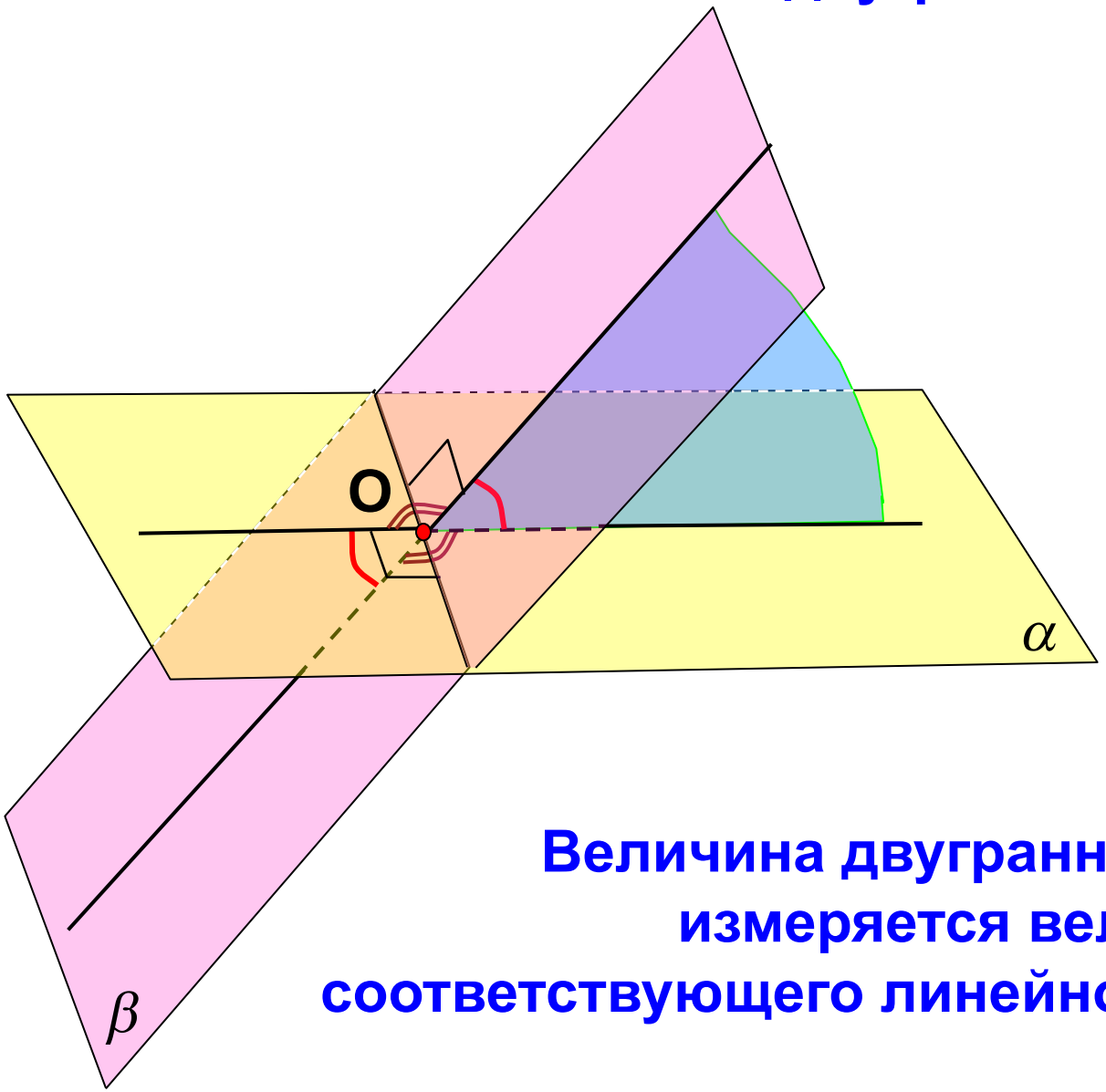
Две полуплоскости – грани двугранного угла

Две пересекающиеся плоскости образуют две пары равных между собой двугранных углов.



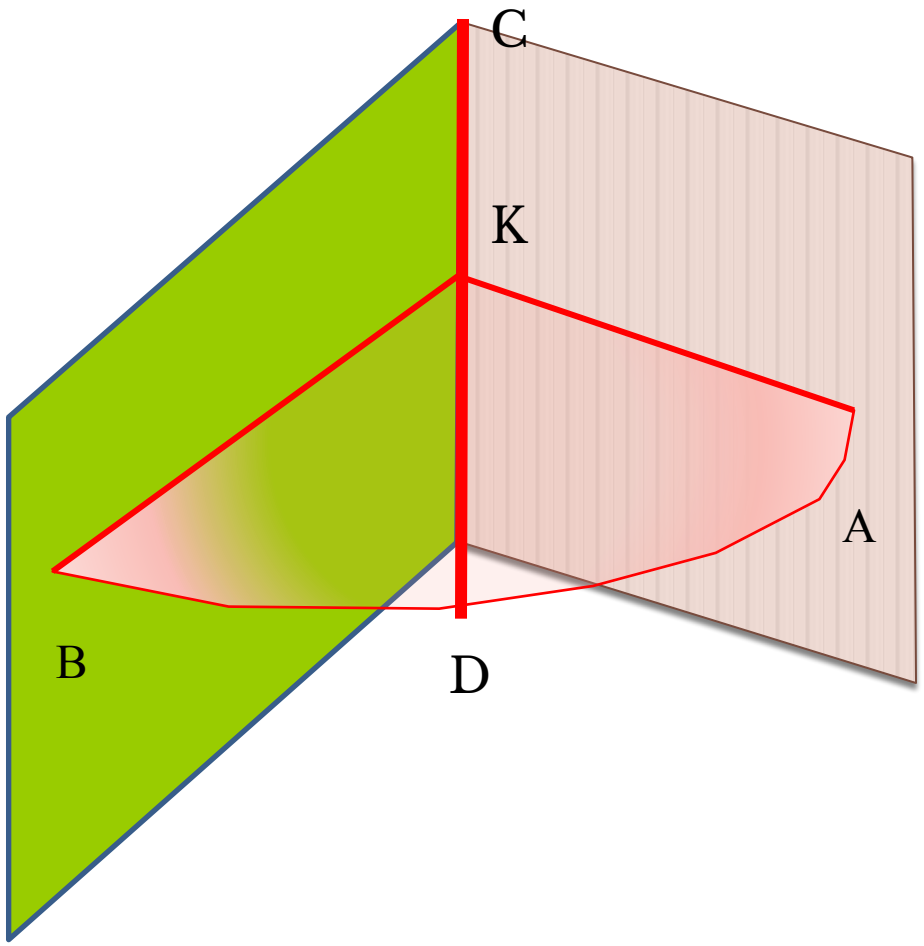
Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.

Повторим **Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.**

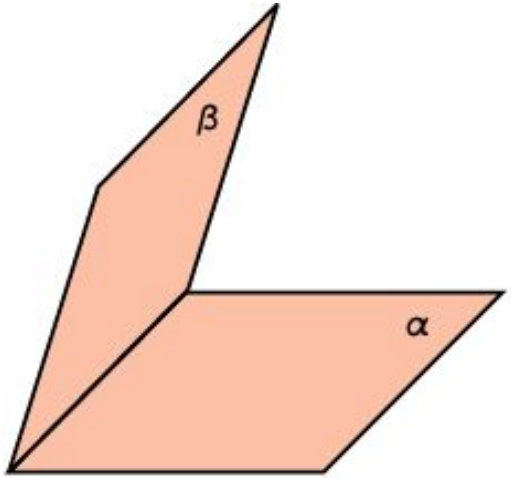


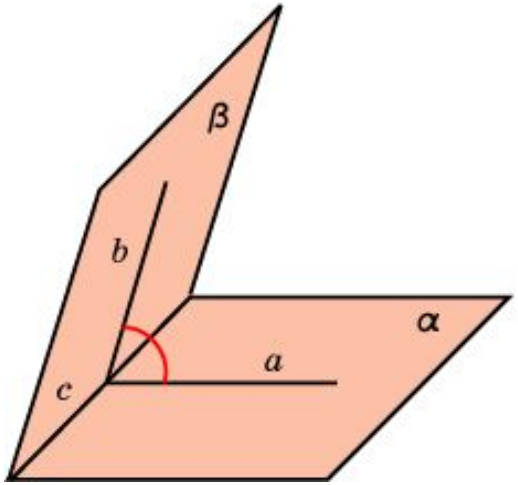
Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла.

∠ BKA- линейный угол двугранного угла BCDA



ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ





Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

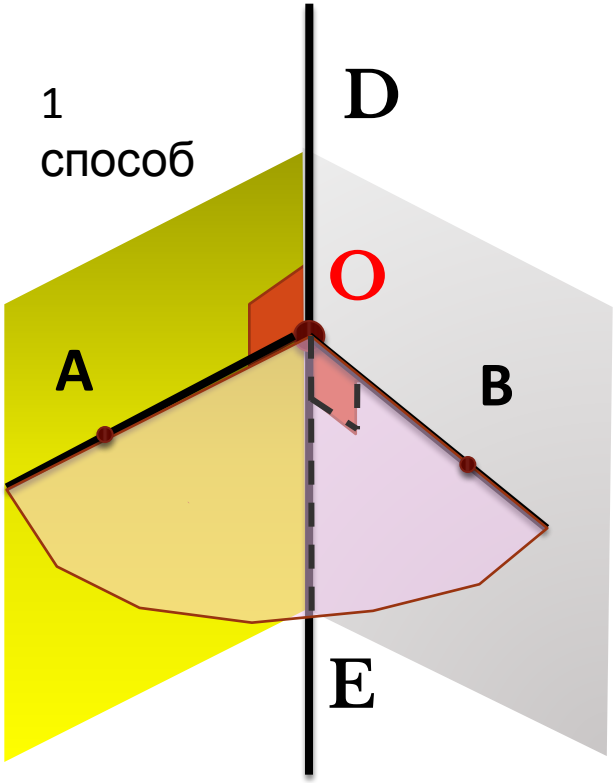
Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

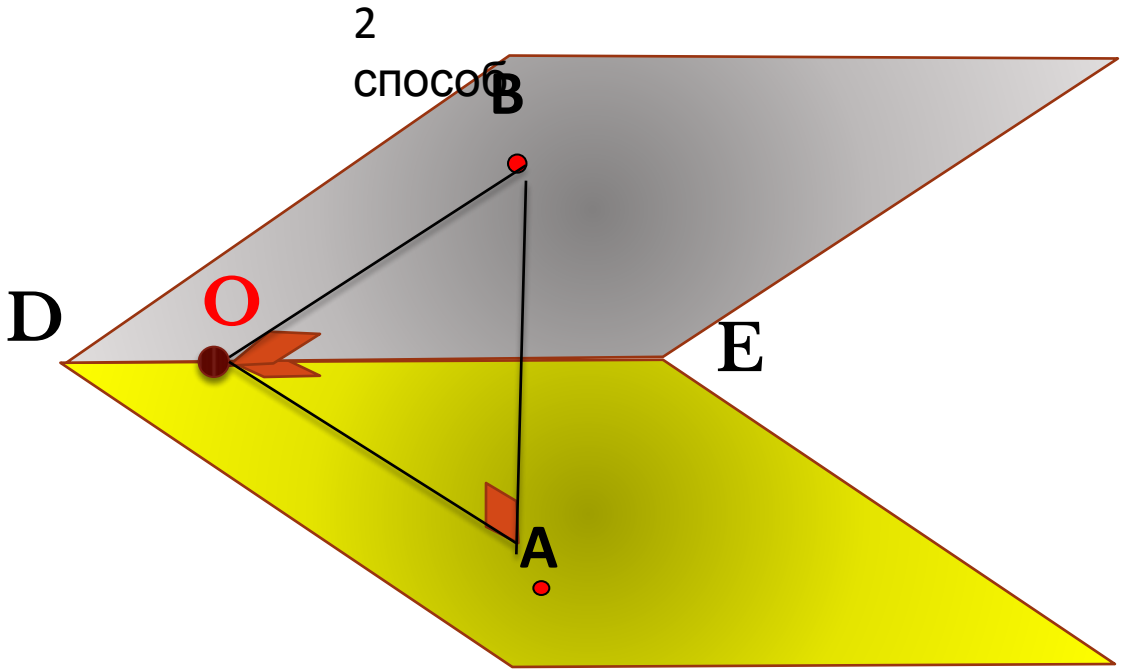
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Алгоритм построения линейного угла.

Угол AOB – линейный угол двугранного угла ADEB.



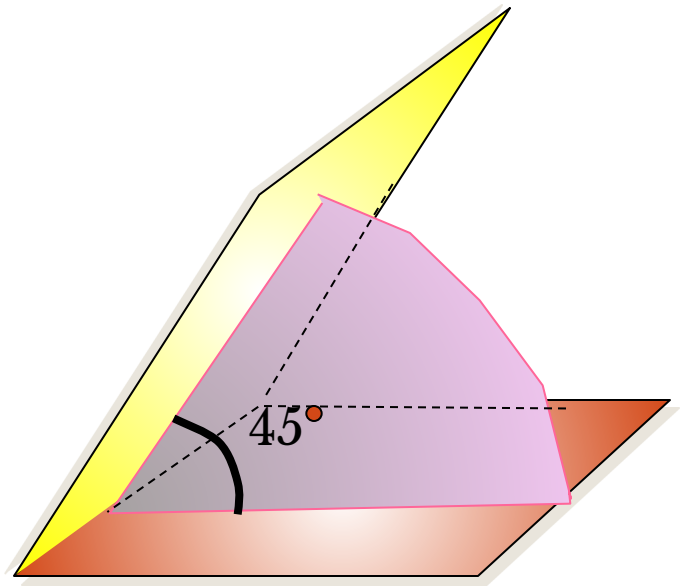


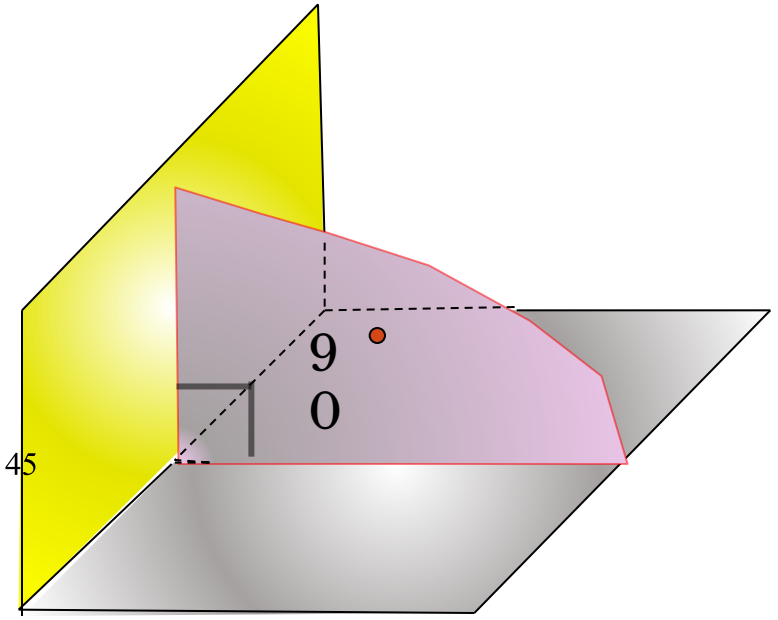
Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

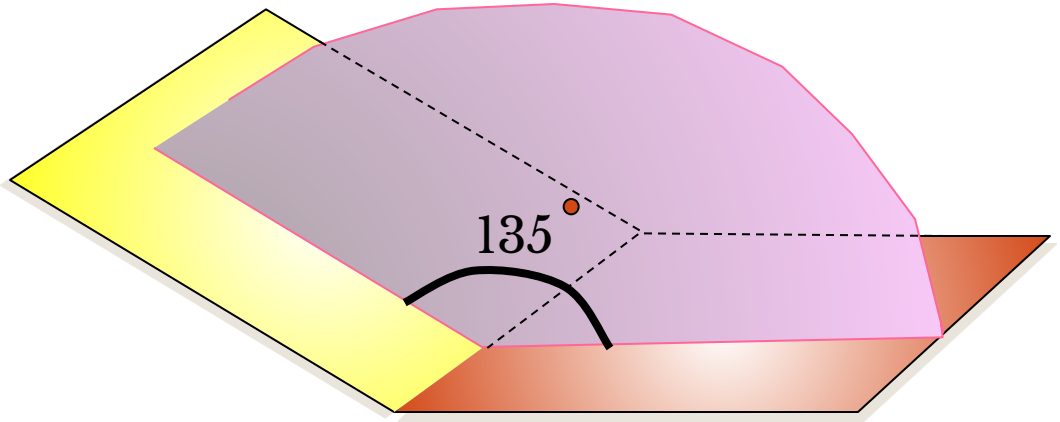
$\angle$ADEB = $\angle$AOB

Плоскость (AOB) $\perp$ DE

Двугранный угол может быть острым, прямым, тупым





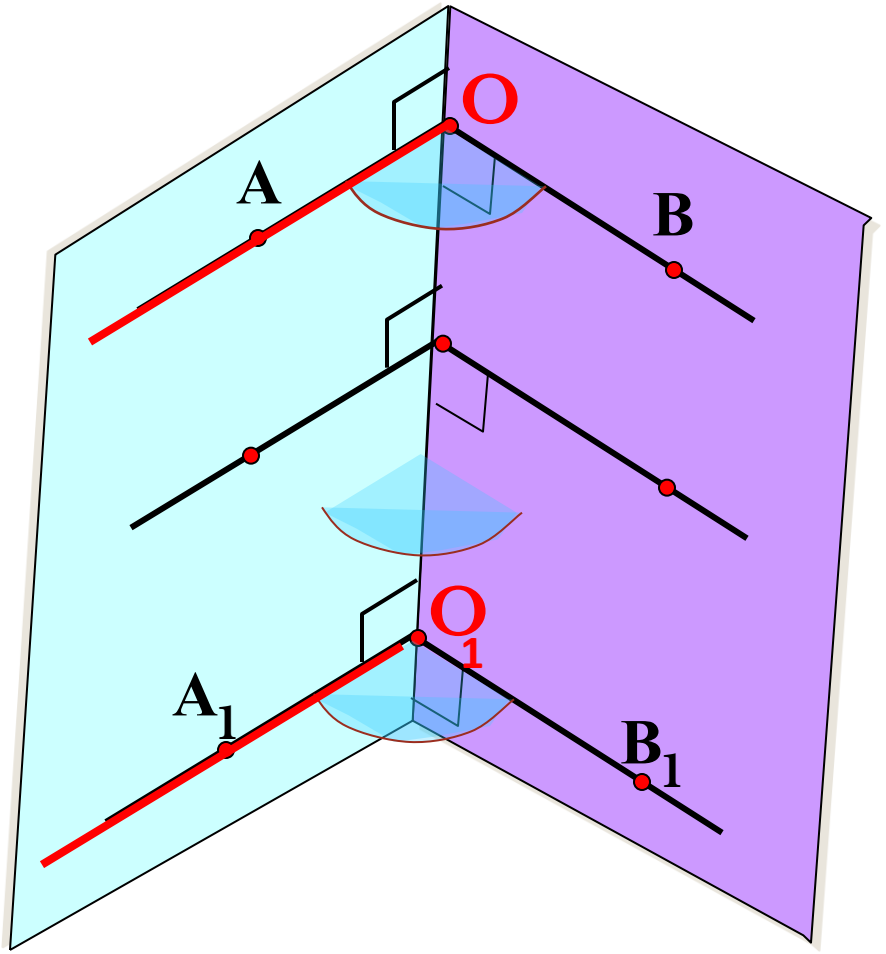


Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Лучи OA и O_1A_1 – сонаправлены

Лучи OB и O_1B_1 – сонаправлены

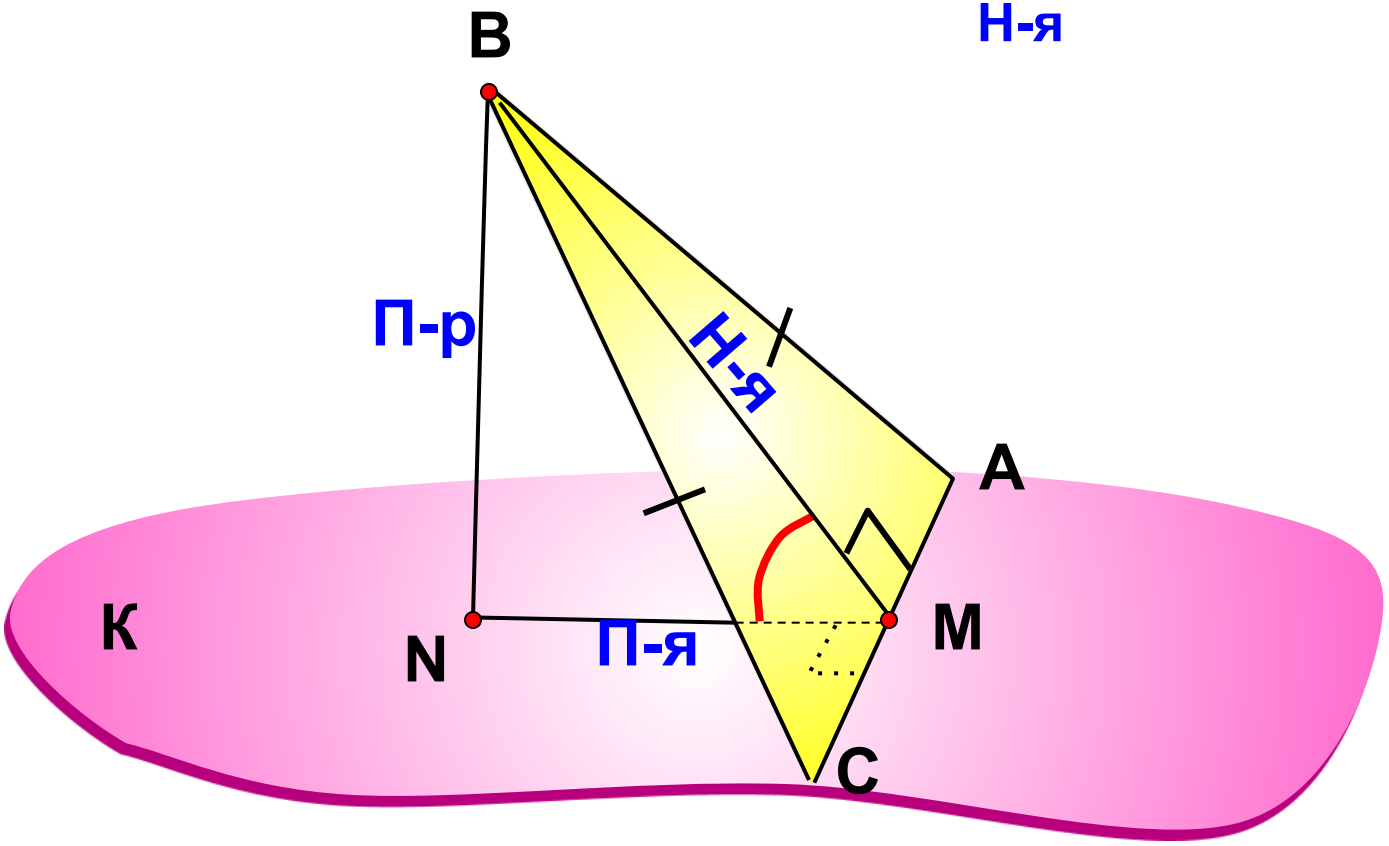
Углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны, как углы с сонаправленными сторонами



Построить линейный угол двугранного угла BACK.
Треугольник ABC – равнобедренный.

$AC \perp BM \overset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AC \perp NM$

Н-я П-я

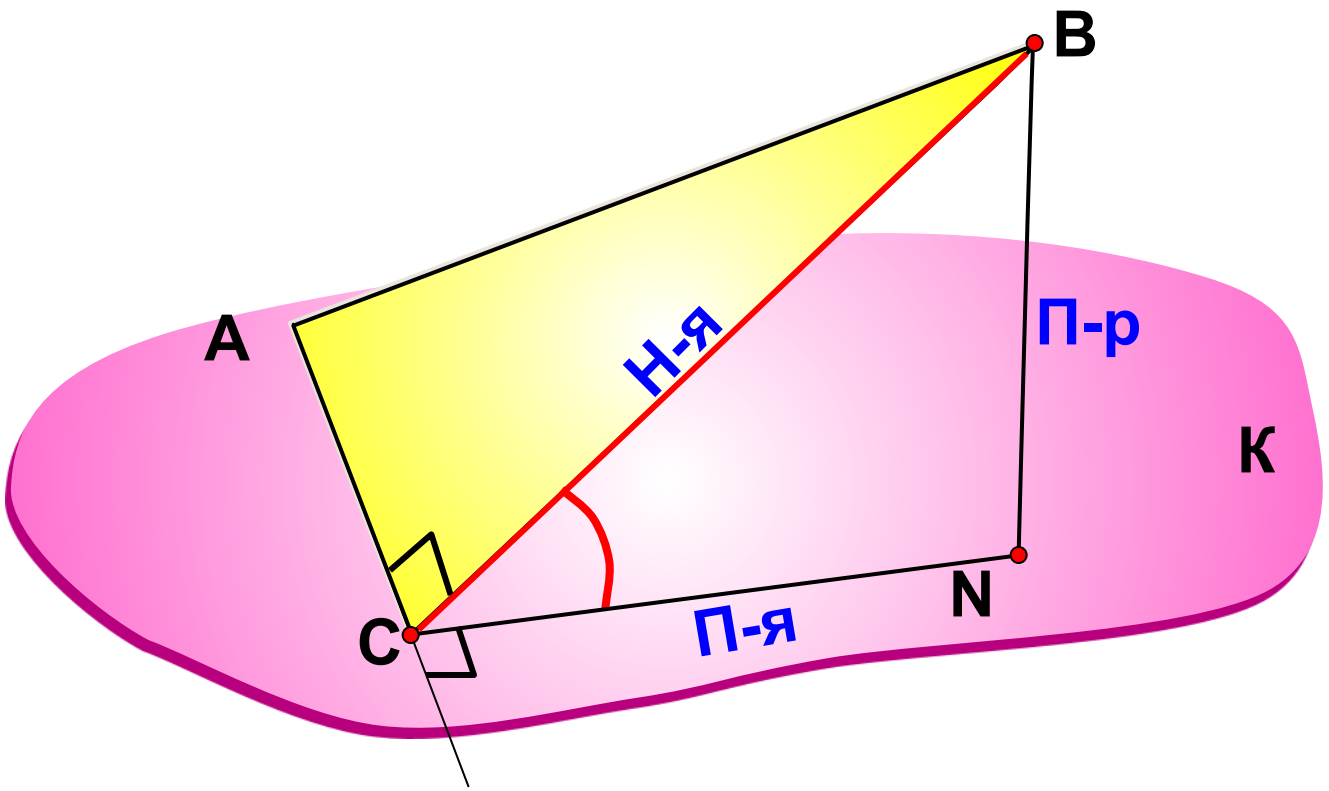


Угол BMN – линейный угол двугранного угла BACK

Построить линейный угол двугранного угла BACK.
Треугольник ABC – прямоугольный.

$AC \perp BC \overset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AC \perp NC$

Н-я П-я

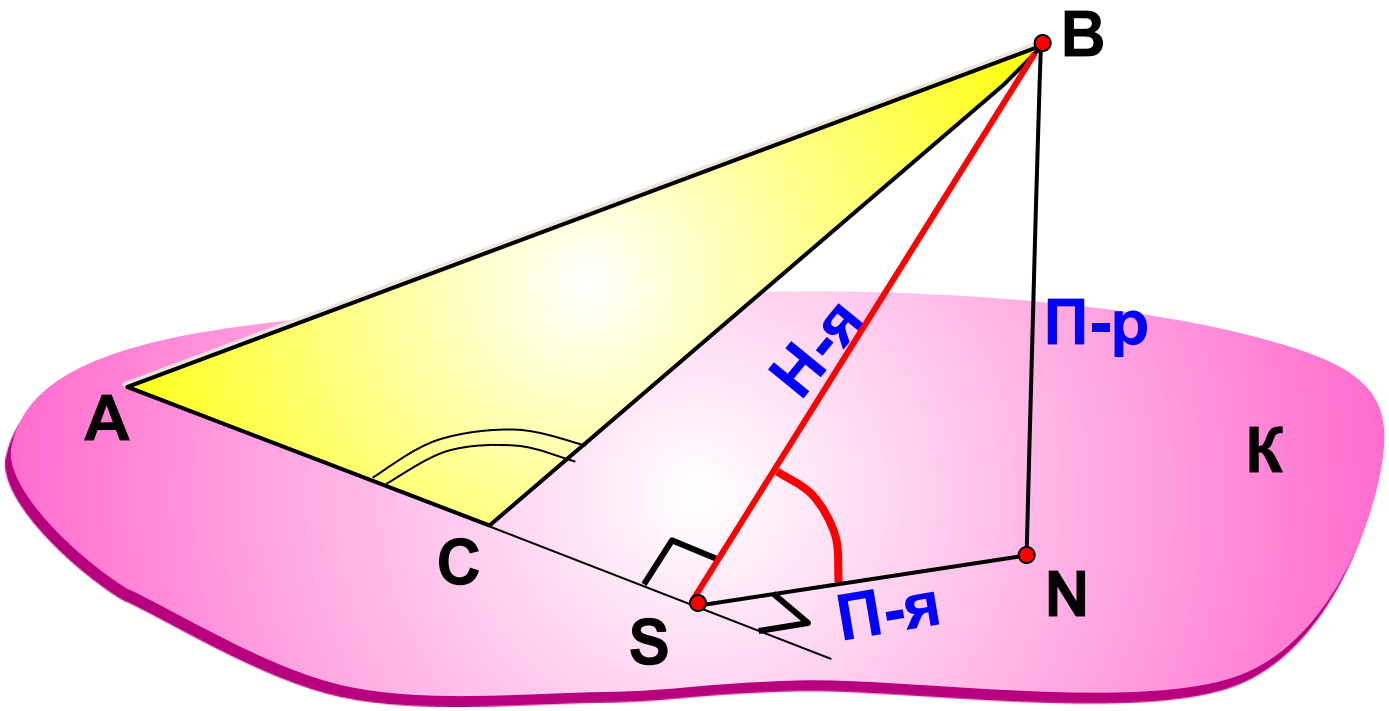


Угол BCN – линейный угол двугранного угла BACK

Построить линейный угол двугранного угла BACK.
Треугольник ABC – тупоугольный.

$AC \perp BS \overset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AC \perp NS$

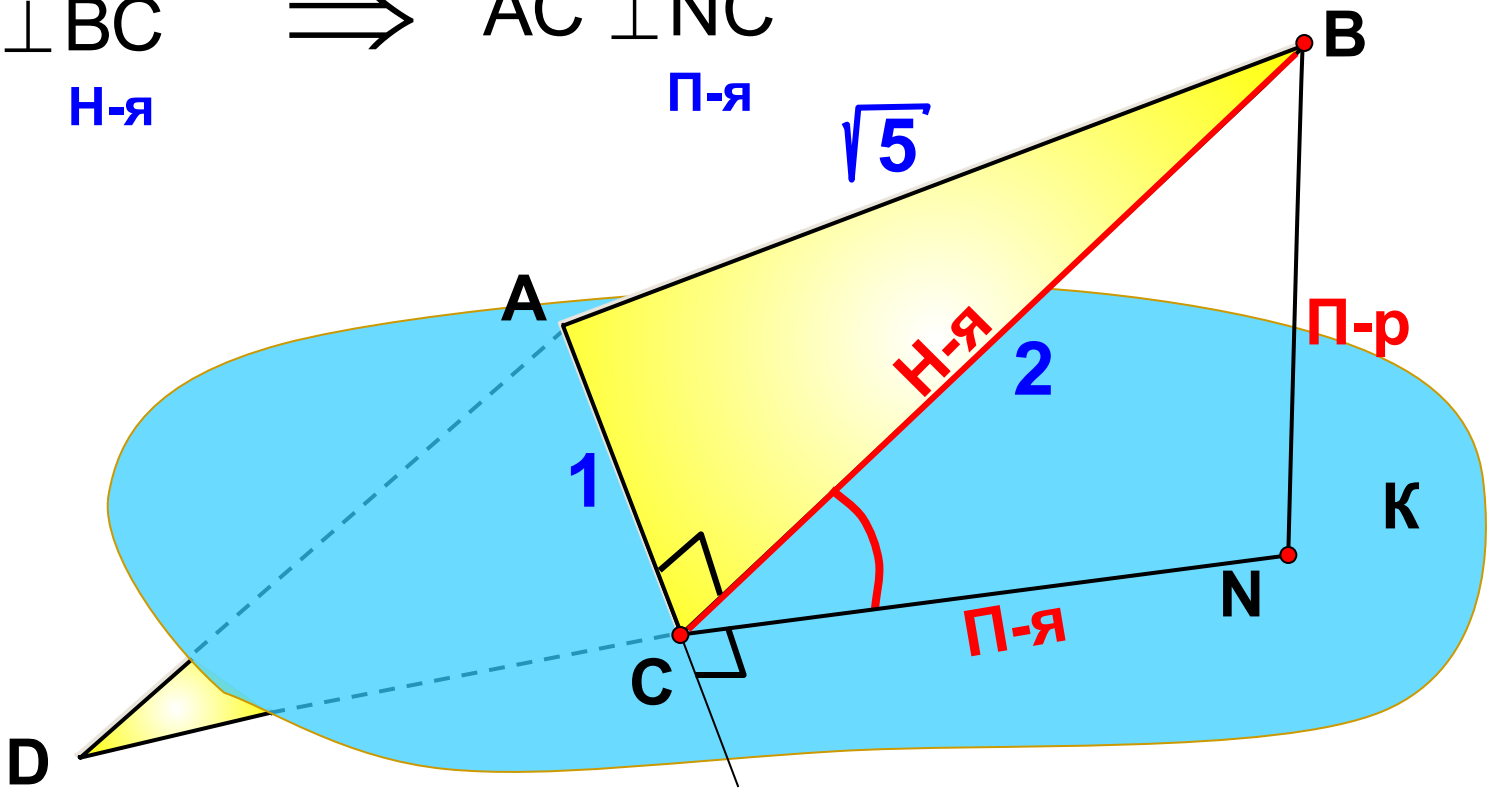
Н-я П-я



Угол BSN – линейный угол двугранного угла BACK

Задача. Построить линейный угол двугранного угла ВАСК. ABCD – четырехугольник, AC – диагональ, AC=**1**; BC=**2**; AB=$\sqrt{5}$

$AC \perp BC$ (Н-я) $\Rightarrow$ (ОТТП) $AC \perp NC$ (П-я)

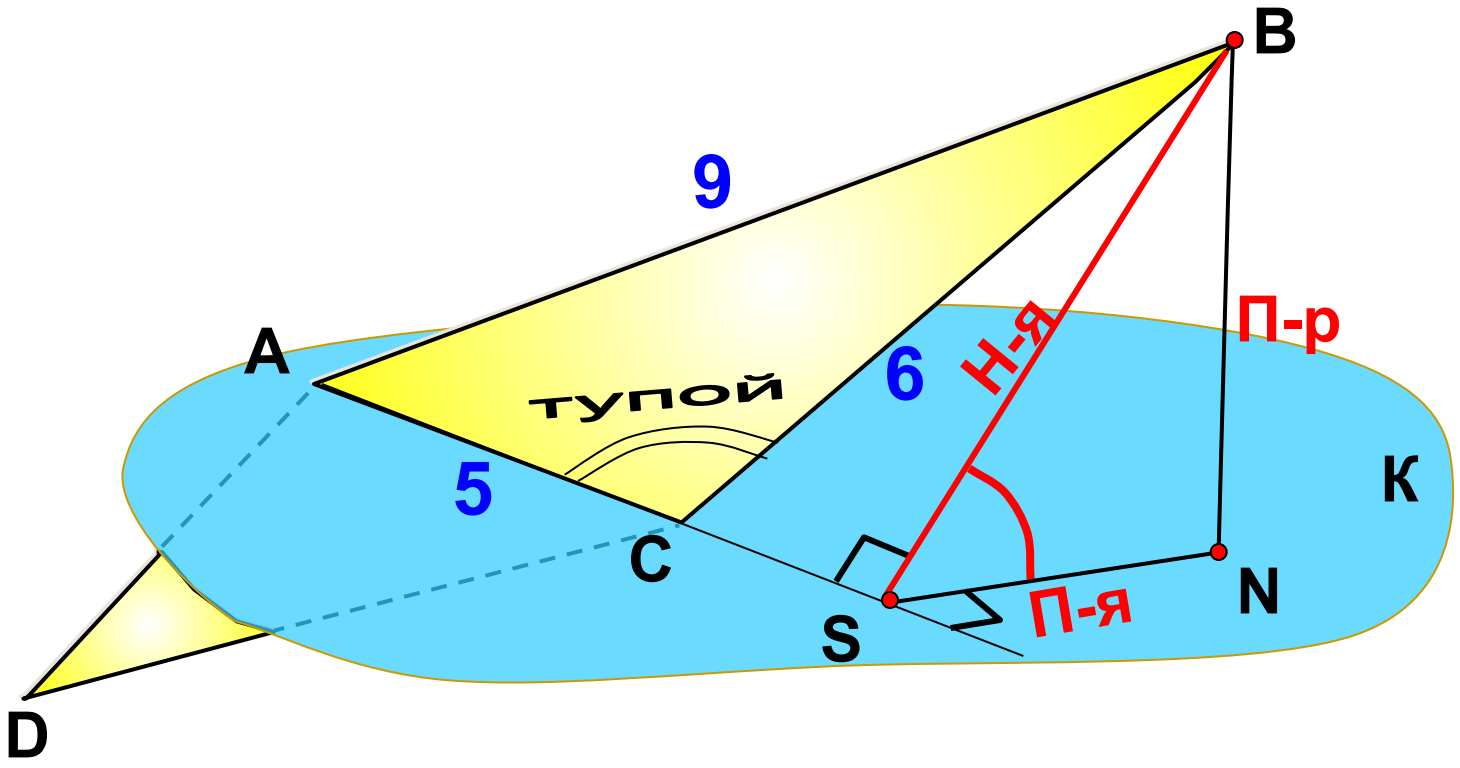


Угол BCN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Задача. Построить линейный угол двугранного угла ВАСК. ABCD – четырехугольник, AC – диагональ; AC=**5**, BC= **6**, AB= **9**.

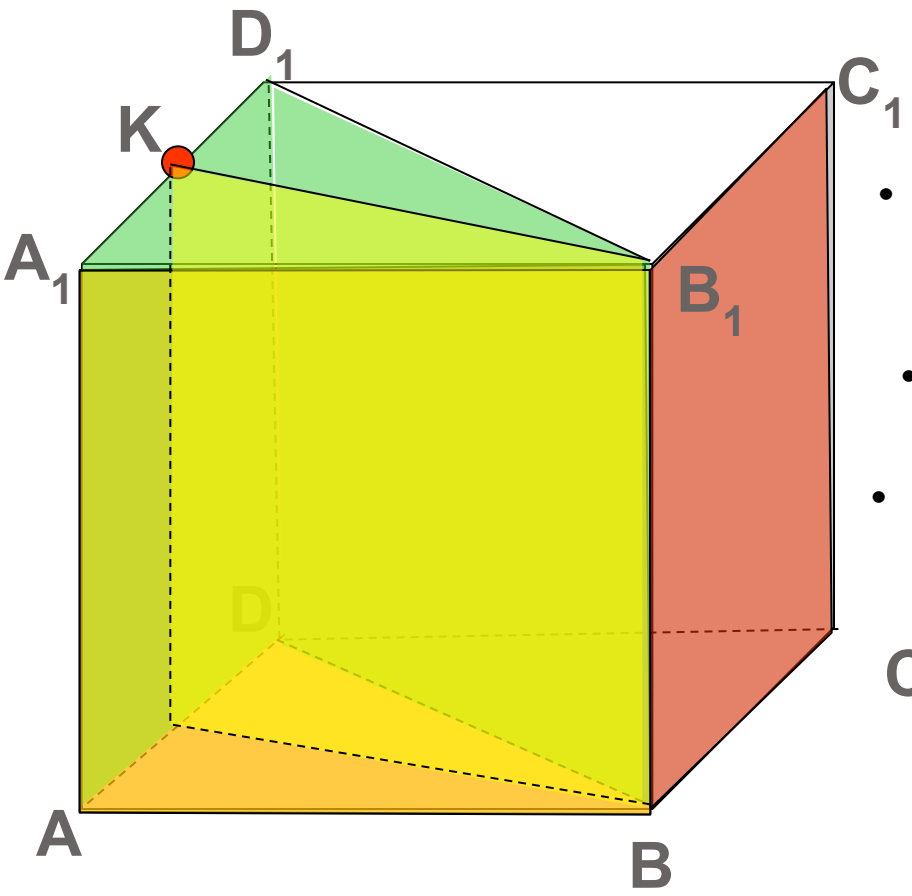
$$AC \perp BS \overset{\text{ОТТП}}{\Longrightarrow} AC \perp NS$$

Н-я П-я



Угол BSN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Задача. Дан куб. Найдите следующие двугранные углы:
а) ABB_1C; б) ADD_1B; в) A_1BB_1K, где K – середина ребра A_1D_1.

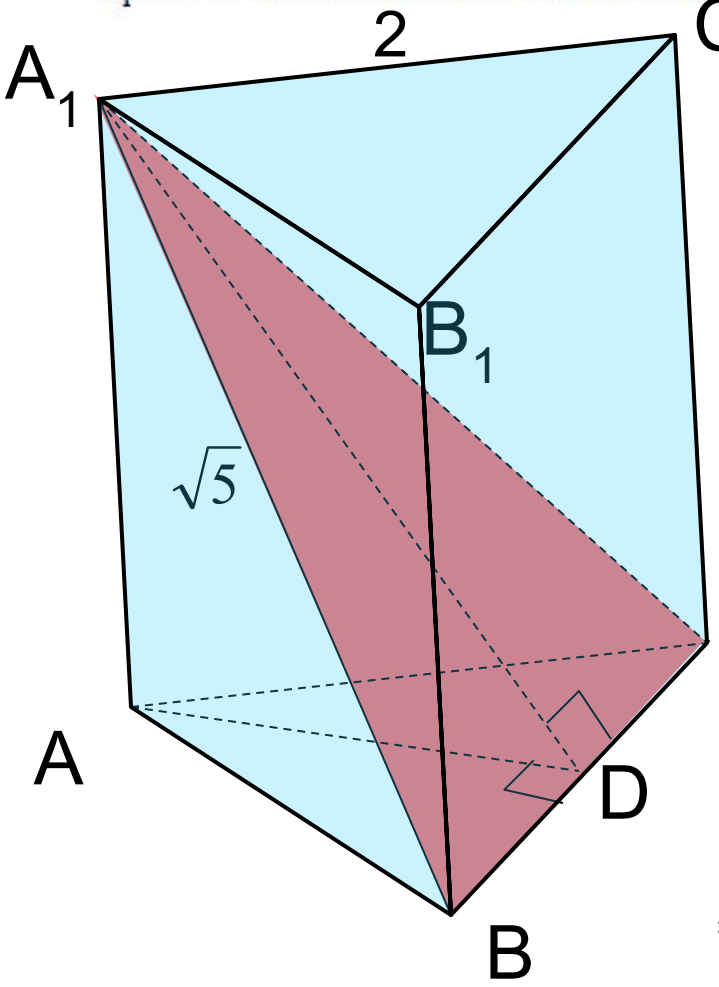


- **Угол ABC – линейный угол двугранного угла ABB1C. Прямой, т.к. ABCД – квадрат.**
- **Угол ADB – линейный угол двугранного угла** ADD1B. **Равен** 45^{o} **, т.к. D1B –диагональ квадрата.**
- **Угол A1B1K– линейный угол двугранного угла A1BB1K**
- **В треугольнике A1KB1 угол A1 –прямой, катеты равны 1 и 0,5.**

$$\angle A_1B_1K = arctg\frac{1}{2}.$$

Решение задачи с помощью построения линейного угла.

C2 Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



1) Построим плоскость CBA_1 Перпендикуляр из точки A1на плоскость (ABC) – точка A, A1D – наклонная, AD проекция наклонной на (ABC). Тогда угол ADA1 – это линейный угол двугранного угла между плоскостями (ABC) и (BA1C).

2) Из ΔABC:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

3) Из $\Delta A1BD$:

$$A_1D = \sqrt{A_1B^2 - BD^2}$$

$$= \sqrt{5 - 1} = \sqrt{4} = 2.$$

4) Из $\Delta A1AD$:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{A_1D};$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

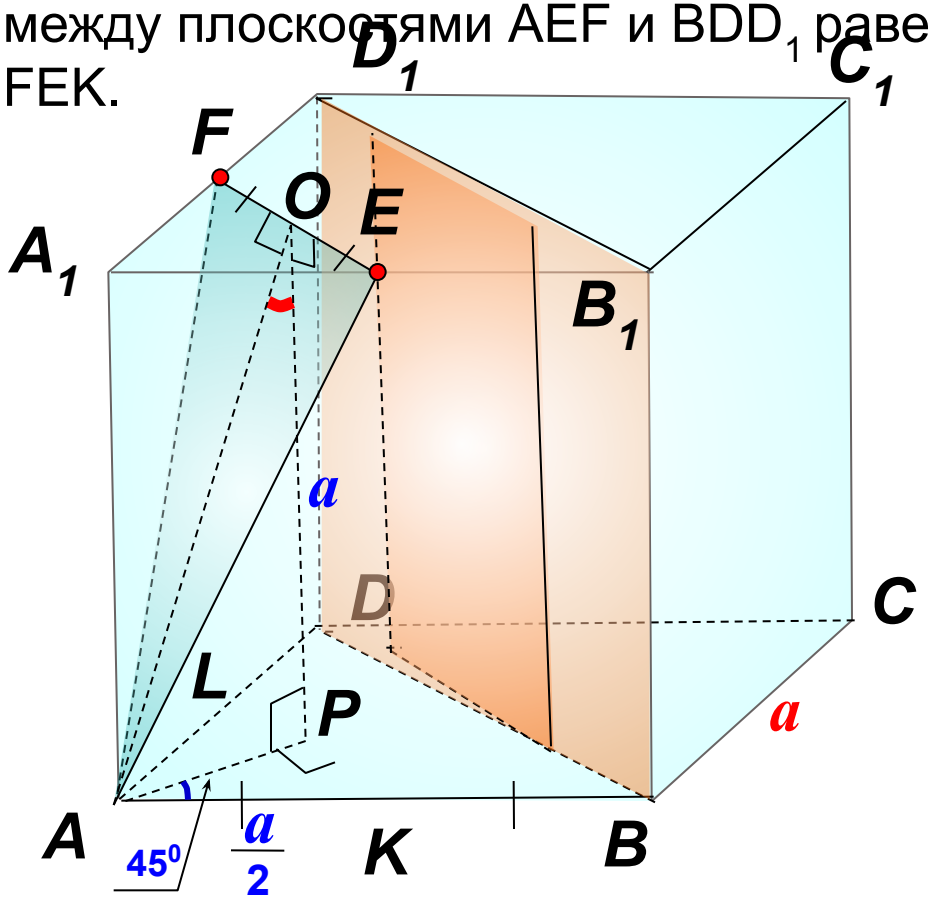
Из $\Delta A1AD$:

$$\alpha = 30$$

Решение задачи построением параллельной плоскости.

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

1) Заменим плоскость DBB_1 на параллельную плоскостьFEKL. Угол между плоскостями AEF и BDD_1 равен углу между плоскостями AEF и FEK.



2) Ребро двугранного угла – FE.
3) Строим линейный угол двугранного угла AFEK.
4) Найдем два элемента треугольника AOP. Пусть ребро куба равно a (или 1).

5) Из ΔAPK:

$$\cos 45^0 = \frac{AP}{AK};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AP}{\frac{a}{2}};$$

$$AP = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

6) Из ΔAOP:

$$tgAOP = \frac{AP}{OP};$$

$$tgAOP = \frac{a\sqrt{2}}{4} : a;$$

$$tgAOP = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостью ABC и AM, где точка M делит ребро BS так, что MS : MB = 2 : 1.

$MK \perp BO$, $SO \perp BO$ $\Rightarrow$ SO II MK

Тогда по теореме Фалеса: если SM : MB = 1 : 2, тогда OK : KB = 1 : 2.

BO = 3 – это составляет 3 части.

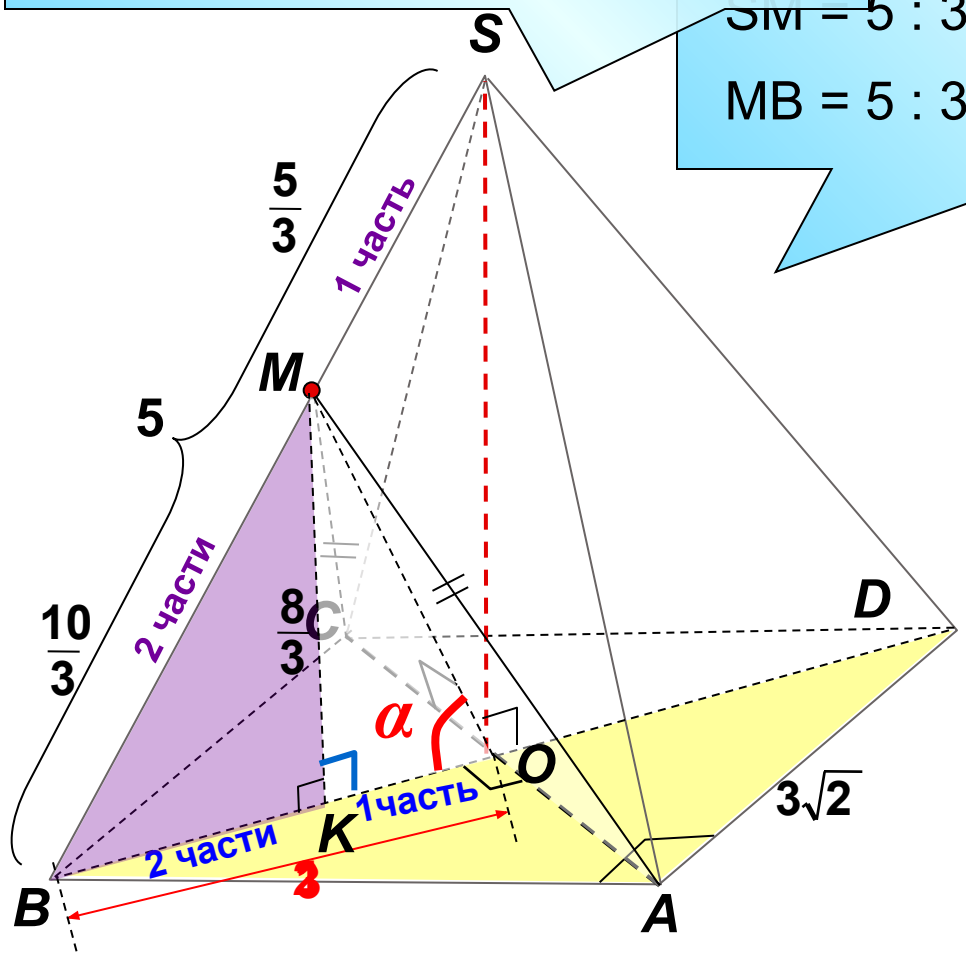
KO = 3 : 3 = 1 (это 1 часть)

BK = 3 : 3 * 2 = 2 (это 2 части)

BS = 5 – это составляет 3 части.

SM = 5 : 3 = $\frac{5}{3}$ (это 1 часть)

MB = 5 : 3 * 2 = $\frac{10}{3}$ (это 2 части)



$Из\ \Delta KBM$:

$BM^2 = KB^2 + KM^2$;

$\left(\frac{10}{3}\right)^2 = 2^2 + KM^2$;

$KM^2 = \frac{100}{9} - 4$;

$KM = \pm\sqrt{\frac{36}{9}}$;

$KM = \frac{8}{3}$.

$Из\ \Delta ABD$:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$;

$BD^2 = 18 + 18$;

$BD = \pm\sqrt{36}$;

$BD = 6$.

Тогда $BO = 3$

$Из\ \Delta KOM$:

$tg\alpha = \frac{MK}{KO}$;

$tg\alpha = \frac{8}{3} : 1$;

$tg\alpha = \frac{8}{3}$.

Ответ: $\alpha = arctg\frac{8}{3}$.

Домашнее задание

- В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 точка N – середина ребра CD , AB = 3 , BC = 2 , BB1 = 2. Найдите угол между плоскостями AB1N и ABC .

- В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что BM : MS = 2 : 1.

Р е ф л е к с и я:

- На уроке я вспомнил(ла)……
- На уроке мне удалось самостоятельно сделать

  ……
- Трудно было

  ……
- Знания, полученные на уроке, я смогу (не смогу) применить

  ……