Решение задач по стереометрии векторно-координатным методом.

Учитель математики ГБОУ города Москвы «Школа с углубленным изучением иностранных языков №1288 имени Героя Советского Союза Н.В.Троян»

Красовская Наталья Петровна

Содержание

Введение

- В геометрии применяются различные методы решения задач – это синтетический (чисто геометрический) метод, метод преобразований, векторно-координатный метод, метод ключевых задач. Также методы делятся на методы алгебры и геометрии.
- Геометрические методы: метод треугольников, метод площадей, метод вспомогательных фигур, координатный метод, векторный метод и др. Они занимают различное положение в школе.
- Основным методом считается синтетический, а из других наиболее высокое положение занимает векторно-координатный метод потому, что он тесно связан с геометрией.
- Изящество синтетического метода достигается с помощью интуиции, догадок, дополнительных построений. Векторно-координатный метод этого не требует: решение задач во многом алгоритмизировано, что в большинстве случаев упрощает поиск и само решение задачи. Координатный метод решения задач на сегодняшний день самый мощный и при правильном подходе позволяет решить фактически все виды математический, физических, астрономических, и технических задач. Кроме того, координатный метод в рамках школьной программы используется достаточно ограниченно и неполно.

Понятие векторно-координатного метода

- Векторные приемы изучаются в школе в весьма ограниченном количестве. В базовый учебник стереометрии Л.С. Атанасяна включен целый параграф «скалярное произведение векторов» и даже отдельно рассматривается нахождение углов между объектами. Однако дальше темы «вычисление угла между прямыми» и осторожного намека на аналогичный алгоритм для прямой и плоскости материал не рассматривается. И даже не вводится такое понятие, как «нормаль».
- Как правило учитель выбирает одну из трех стратегий подготовки к задаче С2 на ЕГЭ:
- 1) Полный отказ от векторных приемов
- 2) Изучение отдельных алгоритмов
- 3) Демонстрация всех приемов (без доказательств) для самых сильных учеников.
- Координатный метод позволяет рассматривать множество самых трудных задач на вычисление всех видов углов (между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями) и любых расстояний (от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми). С тремя последними работать сложнее всего, ибо приходится затрагивать тему «уравнение плоскости», «смешанное и векторное произведение векторов». К тому же аккуратный вывод самих формул заставляет прилично углубиться в теорию, без которой добиться 100%-го понимания будет невозможно.
- При работе в координатах со средним по силе учеником, учебный план включает в себя работу только с алгоритмами поиска углов..
- Преимущество методов аналитической геометрии перед альтернативным решением средствами дополнительных построений состоит в том, что удается полностью отстраниться от чертежа и заниматься исключительно числами (координатами). Поэтому в определенных условиях подготовки к ЕГЭ по математике удается натаскать ученика на стандартные решения. Причем за весьма короткий срок и в обход большого количества тем.
- Если у школьника имеются серьезные проблемы с пониманием определений, с чтением или построением сложного стереометрического рисунка, если ему никак не удается подобрать необходимые дополнительные построения, то можно построить работу по С2 на векторах. Особенно это актуально в условиях экстренной помощи, когда на подготовку к ЕГЭ отводится всего лишь 2-3 месяца. Если у преподавателя нет времени на неспешный комплексный подход, то лучше все го сразу обратиться к координатам.

Проблемы при использовании координатного метода

- Три проблемы координатного метода:
- О каких проблемных ситуациях необходимо помнить? Какие ошибки чаще всего допускаются школьниками?
- 1) От того, что забывают алгоритм поиска нормали
- 2) Путаются с введением системы координат или с определением координат у точек (задающих прямые и плоскости) в разных многогранниках.
- 3) Не справляются с вычислениями, если в координаты вершин попадают квадратные корни. Обычно эта ситуация возникает в треугольных пирамидах .
- Именно поэтому отдельно останавливается на этих компонентах. Третью проблему снять не удается. Пирамиду не переделаешь. А вот получить практику нахождения нормали и научиться определять координаты вполне реально.
- Какую подготовку к восприятию векторных приемов проводит учитель?
- Необходимо повторить следующие темы:
- 1) Координаты точки и координаты вектора
- 2) Длина вектора
- 3) скалярное произведение векторов
- 4) координаты середины отрезка (на случай, если плоскость или прямая будут заданы серединами каких-нибудь диагоналей или ребер у пирамид).
- Как и в других темах у меня есть свои приемы для запоминания формул. Какие формулы тяжелее всего запомнить? Те, которые нужно учить целыми блоками, которые в целом схожи друг с другом, но расходятся в мелочах. Вот эти мелочи из головы как раз и выпадают, ибо тонут в общей массе знаков.

Понятие системы координат

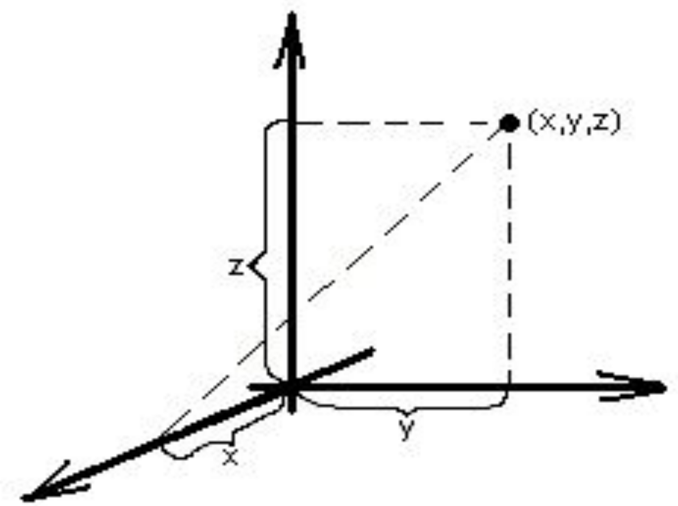
- **Система координат —** комплекс определений, реализующий метод координат, то есть способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется координатами этой точки.
- Рене Декарт является одним из создателей аналитической геометрии (которую он разрабатывал одновременно с Пьером Ферма), позволявшей алгебраизировать эту науку с помощью метода координат. Предложенная им система координат получила его имя.

Декартова система координат на плоскости

- Декартова система координат хорошо известна. И всё же сформулируем подробнее, каким образом она задаётся на плоскости, и какие величины в результате однозначно определяют положение точки на плоскости. Задать декартову систему координат на плоскости означает зафиксировать, во-первых, точку начала координат, а во-вторых, две перпендикулярные направленные оси (так называемые, оси координат). Причём, эти оси занумерованы. И, конечно, понадобится единичный отрезок, чтобы численно обозначать расстояние между двумя точками.
- Стандартным образом декартова система координат обозначается Oxy, оси нумеруются таким образом, что поворот от первой оси ко второй осуществляется против часовой стрелки. Координаты точки – (x, y).

Декартова система координат в пространстве

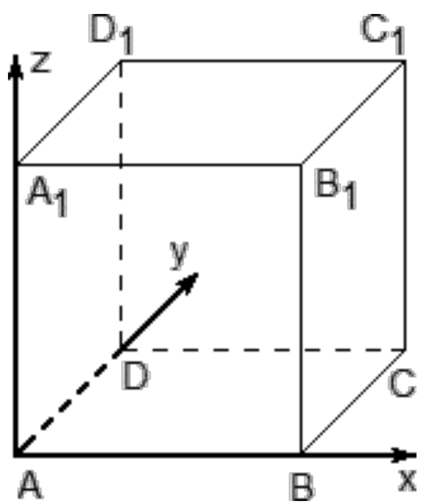
- Декартовы координаты в пространстве задаются с помощью точки начала координат и трёх взаимно-перпендикулярных направленных прямых.
- Прямые занумерованы, задан единичный отрезок.
- Положение любой точки в пространстве однозначно определено тремя числами: первое число – величина проекции точки на первую ось, второе – величина проекции на вторую ось, третье – на третью.



Введение системы координат в заданиях С2

- Метод координат — это довольно лёгкий способ, но в настоящих задачах С2 никаких координат и векторов нет. Поэтому их придется вводить: указать начало отсчета, единичный отрезок и направление осей x, y и z.
- Самое замечательное свойство этого метода заключается в том, что не имеет никакого значения, как именно вводить систему координат. Если все вычисления будут правильными, то и ответ будет правильным.
- Тем не менее, решив некоторые задачи, мы пришли к выводу, как лучше ввести систему координат для самых часто встречающихся в задаче С2 многогранников. С указанием конкретных точек. Во всех случаях упор делается на минимизацию объема вычислений.

Координаты куба



- Это самый простой многогранник, все двугранные углы которого равны 90°.
- Система координат также вводится очень просто:
- Начало координат — в точке A;
- Чаще всего ребро куба не указано, поэтому принимаем его за единичный отрезок;
- Ось x направляем по ребру AB, y — по ребру AD, а ось z — по ребру AA_1.
- Обратите внимание: ось z направляется вверх! После двумерной системы координат это несколько непривычно, но на самом деле очень логично.

- Итак, теперь у каждой вершины куба есть координаты. Соберем их в таблицу — отдельно для нижней плоскости куба:

Точка	**A**	**B**	**C**	**D**
Координаты	(0; 0; 0)	(1; 0; 0)	(1; 1; 0)	(0; 1; 0)

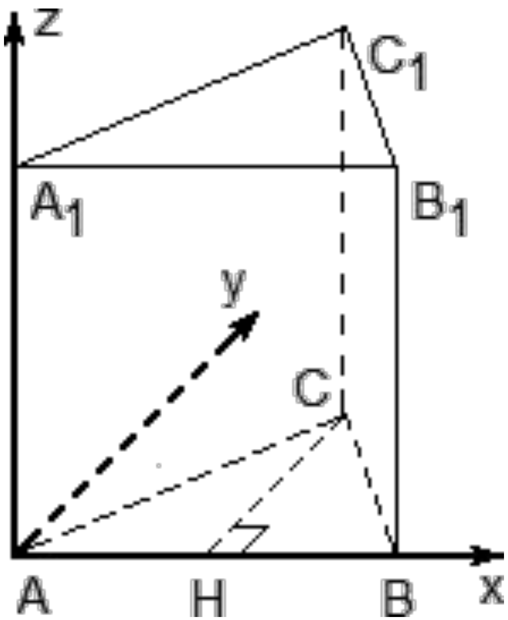
- И для верхней:

Точка	**A_1**	**B_1**	**C_1**	**D_1**
Координаты	(0; 0; 1)	(1; 0; 1)	(1; 1; 1)	(0; 1; 1)

- Несложно заметить, что точки верхней плоскости отличаются соответствующих точек нижней только координатой z. Например, $B = (1; 0; 0)$, $B_1 = (1; 0; 1)$.

Координаты трехгранной призмы

- При правильном подходе достаточно знать координаты только нижнего основания — верхнее будет считаться автоматически.
- В задачах C2 встречаются исключительно правильные трехгранные призмы (прямые призмы, в основании которых лежит правильный треугольник). Для них система координат вводится почти так же, как и для куба.
- Вводим систему координат:
- Начало координат — в точке A;
- Сторону призмы принимаем за единичный отрезок, если иное не указано в условии задачи;
- Ось x направляем по ребру AB, z — по ребру AA_1, а ось y расположим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью основания ABC.

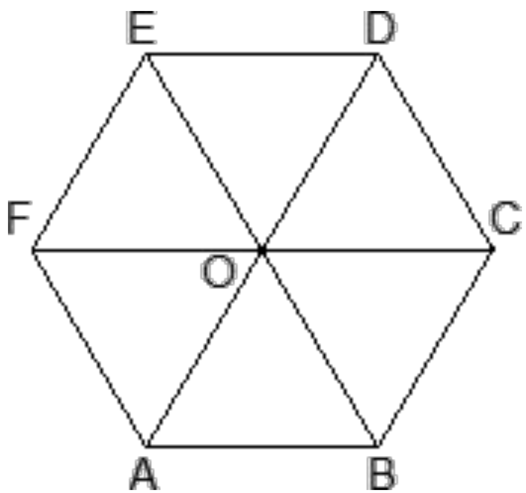


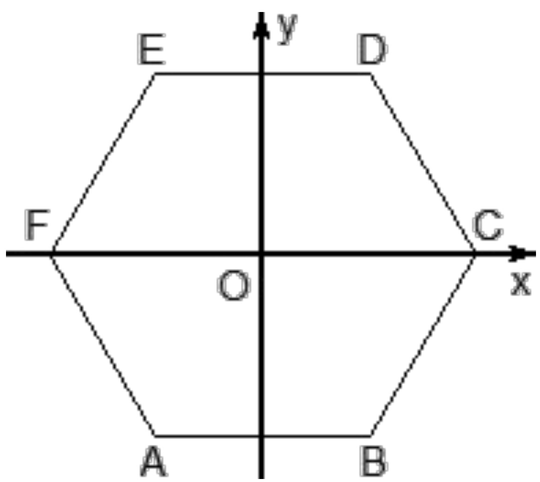
- Получаем следующие координаты точек:

A	B	C	A_1	B_1	C_1
$(0;0;0)$	$(1;0;0)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$(0;0;1)$	$(1;0;1)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

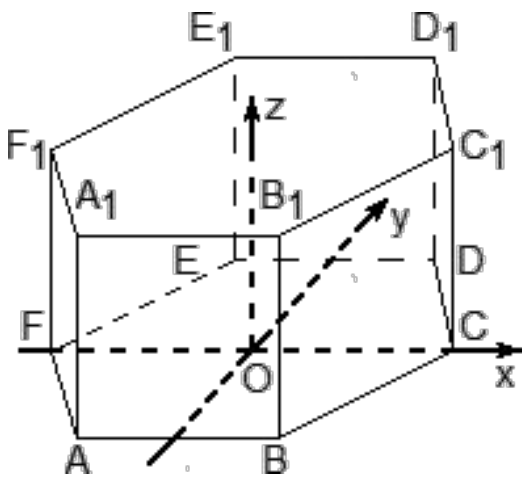
- Как видим, точки верхнего основания призмы снова отличаются от соответствующих точек нижнего лишь координатой z. Основная проблема — это точки C и C_1. У них есть иррациональные координаты, и для того чтобы довольно просто решить задание C2 эти иррациональные координаты надо просто запомнить. Ну, или понять, откуда они возникают.

Координаты шестигранной призмы





- Шестигранная призма — это «клонированная» трехгранная. Можно понять, как это происходит, если взглянуть на нижнее основание — обозначим его ABCDEF. Проведем дополнительные построения: отрезки AD, BE и CF. Получилось шесть треугольников, каждый из которых (например, треугольник ABO) является основанием для трехгранной призмы.
- Теперь введем собственно систему координат. Начало координат — точку O — поместим в центр симметрии шестиугольника ABCDEF. Ось x пойдет вдоль FC, а ось y — через середины отрезков AB и DE. Получим такую картинку:
- Нужно обратить внимание на то, что начало координат не совпадает с вершиной многогранника. На самом деле, при решении настоящих задач выясняется, что это очень удобно, поскольку позволяет значительно уменьшить объем вычислений.



- Нужно обратить внимание на то, что начало координат не совпадает с вершиной многогранника. На самом деле, при решении настоящих задач выясняется, что это очень удобно, поскольку позволяет значительно уменьшить объем вычислений.
- Осталось добавить ось z. По традиции, проводим ее перпендикулярно плоскости OXY и направляем вертикально вверх. Получим итоговую картинку (см. рис.)

- Запишем теперь координаты точек. Предположим, что все ребра нашей правильной шестигранной призмы равны 1. Итак, координаты нижнего основания:

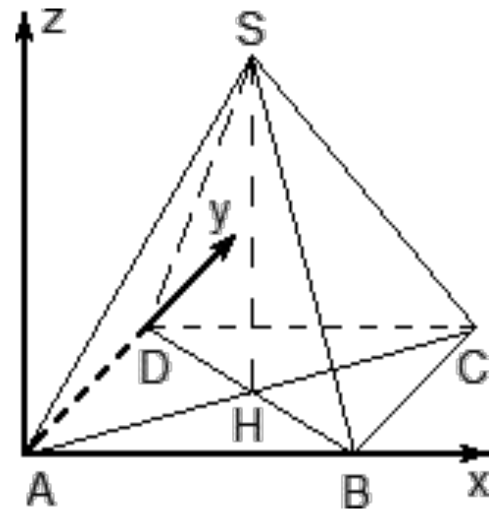
A	B	C	D	E	F
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$(1;0;0)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$(-1;0;0)$

- Координаты верхнего основания сдвинуты на единицу по оси z:

A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$(1;0;1)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$(-1;0;1)$

Координаты четырехугольной пирамиды

- Пирамида — это вообще очень сложно, поэтому я разобрала только самый простой случай — правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны единице.
- Итак, правильная четырехугольная пирамида. Обозначим ее SABCD, где S — вершина. Введем систему координат: начало в точке A, единичный отрезок AB = 1, ось x направим вдоль AB, ось y — вдоль AD, а ось z — вверх, перпендикулярно плоскости OXY.
- Для дальнейших вычислений нам потребуется высота SH — вот и построим ее. Получим следующую картинку:



- Теперь найдем координаты точек. Для начала рассмотрим плоскость OXY. Здесь все просто: в основании лежит квадрат, его координаты известны. Проблемы возникают с точкой S. Поскольку SH — высота к плоскости OXY, точки S и H отличаются лишь координатой z. Собственно, длина отрезка SH — это и есть координата z для точки S, поскольку H = (0,5; 0,5; 0).
- Заметим, что треугольники ABC и ASC равны по трем сторонам (AS = CS = AB = CB = 1, а сторона AC — общая). Следовательно, SH = BH. Но BH — половина диагонали квадрата ABCD, т.е. BH = AB · sin 45°. Получаем координаты всех точек:
-

A	B	C	D	S
(0;0;0)	(1;0;0)	(1;1;0)	(0;1;0)	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Применение векторно-координатного метода при решении геометрических задач в заданиях С2

- В задании С2 по математике чаще всего надо решить задачу, в которой надо определить:
  - Расстояние между двумя точками
  - Расстояние от точки до прямой
  - Расстояние от точки до плоскости
  - Расстояние между скрещивающимися прямыми
  - Угол между двумя прямыми
  - Угол между прямой и плоскостью
  - Угол между плоскостями
- Задачи элементарные, если следовать алгоритму решения С2 и помнить про основные тригонометрические свойства, как например свойства диагоналей или площадь поверхности многогранника. Опорные задачи вам помогут вспомнить эти основные свойства.
- Теперь перейдем непосредственно к алгоритмам.

Расстояние между двумя точками

- Для определения расстояния между двумя точками А и В используем один из двух способов:
- Включаем АВ в некоторый треугольник и находим его длину как сторону треугольника
- По формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$;

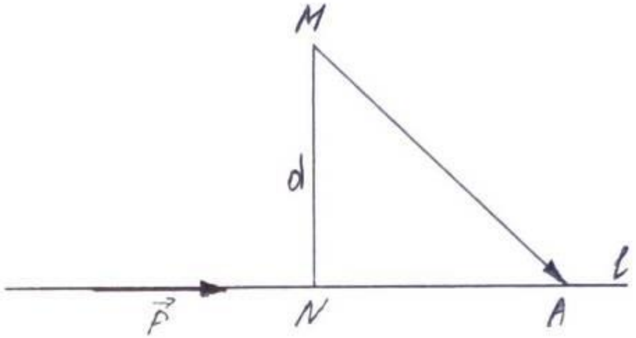
- При чем координатный метод на мой взгляд наиболее прост, надо только аккуратно определить координаты каждой точки.

Расстояние от точки до прямой

- Для определения расстояния от точки до прямой вычисляется
- как длина отрезка перпендикуляра, если удастся включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот
- при помощи координатного метода используя формулы вычисления площади, в которых искомым расстоянием будет высота и

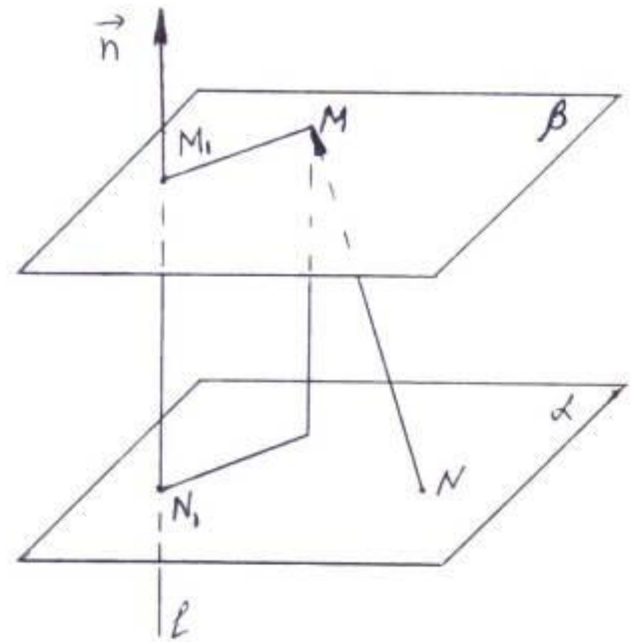
$$S = \frac{1}{2} ab\, sin\alpha \text{ и } cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

- Еще один способ:
- Пусть l – данная прямая с направляющим вектором $\vec{p}$, M – данная точка, N – ее проекция на прямую l, тогда $d = MN$ – искомое расстояние.
- Если A – произвольная точка прямой l, то в прямоугольном треугольнике MNA гипотенуза MA и катет $AN = |\text{пр}_{\vec{p}} \overrightarrow{MA}|$ могут быть найдены. Значит,
- $$MN = \sqrt{MA^2 - AN^2}$$



Расстояние от точки до плоскости

- Пусть α – данная плоскость с нормальным вектором $\vec{n}$ M – данная точка,
- d – расстояние от точки M до плоскости α.
- Если N – произвольная точка плоскости α, а M_1 и N_1 – проекции точек M и N на ось $l \parallel \vec{n}$ то



$$d = M_1N_1 = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{NM}\right| = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}\right|}{|\vec{n}|}$$

Также расстояние от точки до плоскости равно

- длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Для этого аккуратно строим сечение, которое перпендикулярно плоскости и проходит через заданную точку. Искомое расстояние будет равно высоте полученного нового многогранника.
- С использованием координатного метода

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где $M(x_0, y_0, z_0)$, плоскость α задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Уравнение находится путем подстановки координат трех точек, принадлежащих этой плоскости

- С использованием векторного метода

$$\rho(M, \alpha) = \rho(M, ABC) = \frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}}.$$

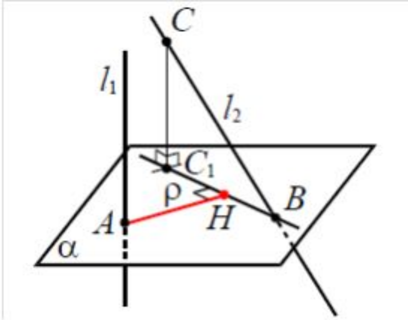
Для этого надо вспомнить правила сложения и вычитания векторов, что произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

- Методом объемов, если имеется пирамида ABCM, то расстояние от точки M до плоскости, содержащей треугольник ABC вычисляется по формуле
- Методом опорных задач

Расстояние между скрещивающимися прямыми

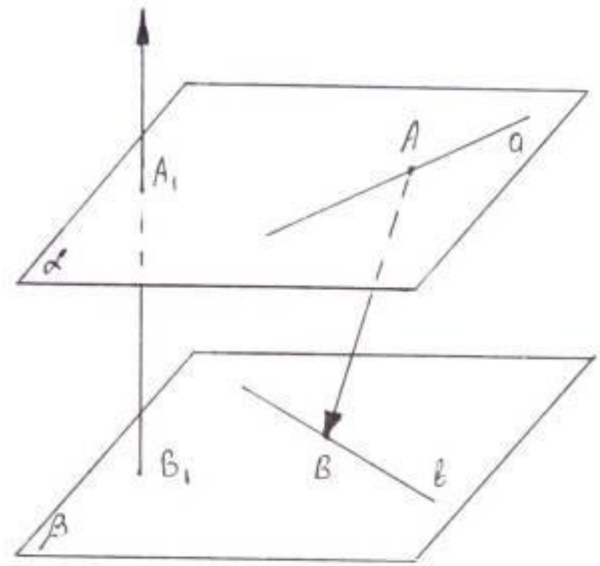
Расстояние между скрещивающимися прямыми можно решить с помощью

- Поэтапно-вычислительного метода:
- построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых и найти его длину;
- построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от точки до прямой, построенной в плоскости;
- заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, найти расстояние между этими плоскостями
- построить плоскость, перпендикулярную одной из этих прямых и построить ортогональную проекцию второй прямой



$\rho(l_1, l_2) = \rho(A, BC_1) = AH,$

- Векторно-координатного метода
- Находим координаты концов отрезка, являющегося общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых
- Находим расстояние между двумя точками
- Векторного метода
- Задачу сводим к определению длины вектора, принадлежащего перпендикуляру являющемуся общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых
- Метода опорных задач
- Пусть a и b – данные скрещивающиеся прямые, – перпендикулярный им вектор, A и B – произвольные точки прямых a и b соответственно, A_1 и B_1 – проекции точек A и B на , тогда



$\vec{n}$

$$d = A_1B_1 = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}\right| = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{n}|}$$

Угол между двумя прямыми

Угол между двумя прямыми определяется несколькими способами

- Поэтапно-вычислительным методом

$$\cos\varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}$$

При этом надо достр[illegible]ника, в котором одна из сторон является той, расстояние от которой находится (с), а вторая сторона (в) параллельна скрещивающейся прямой

- Векторно-координатный метод

Используют формулу $\cos\varphi = \frac{|\bar{p}\cdot\bar{q}|}{|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|}$ и $\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$,

где векторы p и q параллельны заданным прямым, определены их координаты

- Метод опорных задач

Угол между прямой и плоскостью

- Угол между прямой и плоскостью определяется путем включения его в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов.

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{n}\cdot\bar{p}|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{p}|}$$

либо векторно-координатным методом

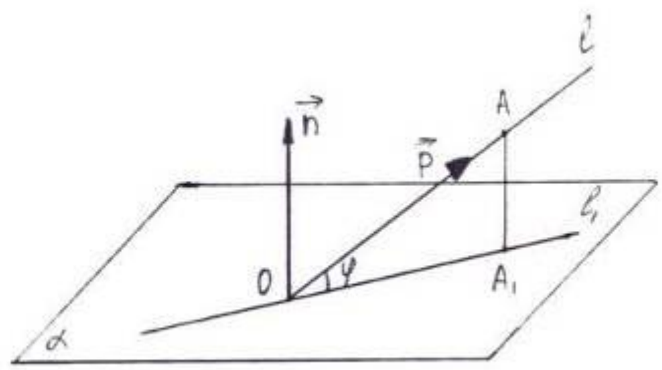
или

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

- Либо методом опорных задач

- Пусть $\vec{p}$ – направляющий вектор данной прямой l, – $\vec{n}$ нормальный вектор данной плоскости α, l_1 – проекция прямой l на плоскость α .
- Как известно, угол φ между прямой l и ее проекцией l_1 на плоскость α называется углом между прямой и плоскостью. Имеем

$$\sin\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{p},\vec{n}})\right| = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{n}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{n}|}$$



Угол между плоскостями

Угол между плоскостями – это угол, образованный полуплоскостями. Его величина измеряется величиной линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Векторно-координатный алгоритм решения задач, в которых необходимо **найти угол между плоскостями**:

- Использование векторов нормалей пересекающихся плоскостей. Используют формулу или где векторы p и q параллельны заданным прямым, определены их координаты
- Использование направляющих векторов скрещивающихся прямых

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

- Теорема. Пусть даны координаты трех точек, через которые надо провести плоскость: $M = (x_1, y_1, z_1)$; $N = (x_2, y_2, z_2)$; $K = (x_3, y_3, z_3)$. Тогда уравнение этой плоскости можно записать через определитель:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Для примера попробуем найти пару плоскостей, которые реально встречаются в задачах C2.
- *Задача*. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки: $A_1 = (0, 0, 1)$; $B = (1, 0, 0)$; $C_1 = (1, 1, 1)$.
- Составляем определитель и приравниваем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - 0 & 0 - 0 & 0 - 1 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 1 - 1 \\ x - 0 & y - 0 & z - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z - 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Раскрываем определитель:

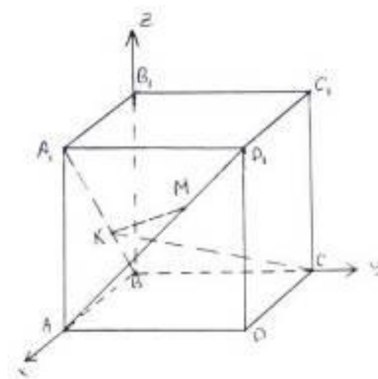
$$a = 1 \cdot 1 \cdot (z - 1) + 0 \cdot 0 \cdot x + (-1) \cdot 1 \cdot y = z - 1 - y;$$
$$b = (-1) \cdot 1 \cdot x + 0 \cdot 1 \cdot (z - 1) + 1 \cdot 0 \cdot y = -x;$$
$$d = a - b = z - 1 - y - (-x) = z - 1 - y + x = x - y + z - 1;$$
$$d = 0 \Rightarrow x - y + z - 1 = 0;$$

- При расчете числа d мы преобразовали уравнение, чтобы переменные x, y и z шли в правильной последовательности, а переменная x со знаком «+». Уравнение плоскости готово!

Примеры решения задач векторно-координатным способом

Задание 1

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На диагоналях D_1A и A_1B лежат соответственно точки M и K так, что $D_1M:D_1A=KB:A_1B=1:3$. Найдите расстояние от вершины C до прямой MK.



- Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как указано на рисунке.
- Относительно выбранной системы координат имеем:

$$K\left(\frac{a}{3};0;\frac{a}{3}\right), M\left(a;\frac{2a}{3};\frac{2a}{3}\right), \overrightarrow{KM}=\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{a}{3}\right), \overrightarrow{KC}=\left(-\frac{a}{3};a;-\frac{a}{3}\right).$$

Найдем расстояние от точки C до прямой MK.
Пусть N – ортогональная проекция точки C на прямую MK. Тогда

$$KN=\left|\text{пр}_{\overrightarrow{KM}}\overrightarrow{KC}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KC}\right|}{\left|\overrightarrow{KM}\right|}=\frac{\left|-\frac{2a^2}{9}+\frac{2a^2}{3}-\frac{a^2}{9}\right|}{a}=\frac{a}{3}$$

По теореме Пифагора из ΔKNC находим

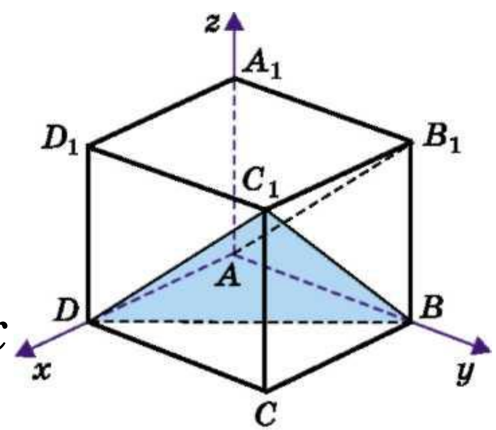
$$CN=\sqrt{KC^2-KN^2}=\sqrt{\frac{11a^2}{9}-\frac{a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{10}}{3}$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{10}}{3}$

- ***Задание 2***
- *В единичном кубе A…D$_1$ найти расстояние между прямыми AB$_1$ и BD.*
- *Решение*. Так как $DC_1 \parallel AB_1$, то $BDC_1 \parallel AB_1$. Поэтому расстояние

$$\rho(AB_1;\, BD) = \rho(AB_1;\, BDC_1) = \rho(A;\, BDC_1).$$

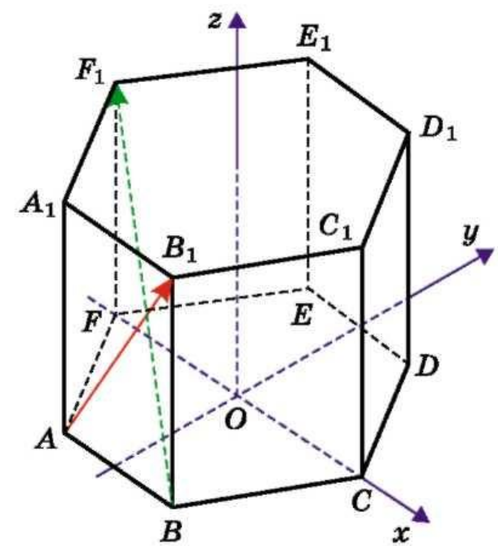
- Введем систему координат, как показано на рисунке, и опреде лим координаты точек: $A(0;\, 0;\, 0)$, $B(0;\, 1;\, 0)$, $D(1;\, 0;\, 0)$, $C_1(1;\, 1;\, 1;)$. $ax + by + cz + d = 0$
- Запишем уравнен $\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 0 + d = 0^1 \\ a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0 \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 1 + d = 0 \end{cases}$



- Отсюда $b = -d$, $a = -d$ и $c = d$. Уравнение плоскости через точки B, D, C_1, имеет вид $-dx - dy + dz + d = 0$, или $x + y - z - 1 = 0$ по $-d \neq 0$ сокращения на
- Расстояние меж $\rho(A;\, BDC_1) = \dfrac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- ***Задание 3***
- В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BF_1.
- *Решение.* Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке
- $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $B_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$, $F_1(-1; 0; 1)$

$$AB_1 = \{1; 0; 1\} \qquad BF_1 = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$$



- Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{AB_1}\cdot\overline{BF_1}\right|}{\left|AB_1\right|\cdot\left|BF_1\right|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

- $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$ где φ — искомый угол
- Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$

Заключение

- Проанализировав задания С2 и их решения, можно сделать вывод что метод координат является наиболее удобным для решения. Но у этого метода есть некоторые недостатки: приходится делать громоздкие вычисления и могут возникнуть проблемы с оформлением. Не смотря на это, метод координат показался мне намного удобнее других методов.
- Таким образом, векторно-координатный метод в целом достаточно прост для восприятия и применения на практике. Основная проблема состоит в том, что для его применения необходимо помнить формулы, которые, как показывает практика, часто «вылетают» из памяти.
- Как справиться с проблемой заучивания? Почему школьники забывают формулы? Не только потому, что мало решают задачи. Сложно запомнить сразу несколько формул, которые к тому же еще и похожи друг на друга. Практика показывает, что школьники совершенно не умеют отслеживать отличия и взаимосвязи в содержании с теми объектами или процессами, которые формулы описывают. Необходимо учить школьников искать эти особенности — маленькие зацепочки, при помощи которых можно быстрого и легко запомнить состав функций, знаков, операций.
- Формулы для нахождения углов по координатам — не исключение. Ученику сложно запомнить, с какой функции каждая их них начинается? Если обратить его внимание на участие в каждой из них косинуса (он занимается непосредственным вычислением), то это поможет запомнить среднее звено. Как вспомнить функцию, с которой формула начинается? Заметим, что если объекты, между которыми ищется угол, — разного вида (плоскость и прямая), то и тригонометрические функции будут разного вида (включаем ассоциативную память), а если одного вида (две прямые или две плоскости), то и функций будут одного вида. Поскольку косинус закрепелен «намертво», то при «разных» начинаем с синуса, а при «равных» с этого же косинуса. Очень просто запоминается. Кроме этой закономерности неплохо было бы выделить общий характер формул: синус/косинус угла между объектами равен модулю косинуса угла между их заменителями. Заменителем прямой является направляющий вектор, а заменителем плоскости — ее нормаль (любая).
- Правильная подготовка к ЕГЭ по математике включает в себя обязательную практику решения задач методом координат. Большинство учащихся решают задачи С2 именно координатно-векторным методом или используют его для проверки полученного решения.

Список использованной литературы

- Атанасян, Л.С. Геометрия 10-11 класс / Л.С. Атанасян Л.С.. - М.: Просвещение, 2012. – 338 с.
- Болтянский В.Г. Преобразования. Векторы / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. – М.: Просвещение, 1964. – 303 с.
- Борзенко, Е.К. Решение стереометрических задач: Методические рекомендации / Е.К. Борзенко, И.Г. Корнева.. – Бийск: РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2013. – 60с.
- Габович, И. Вооружившись методом координат / И. Габович, П. Горнштейн // Квант. – 1978. - №11. – с. 42 – 47.
- Гельфанд, И.М. Метод координат / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Нириллов. – М.: Наука, 2011. – 566 с.
- Геометрия 10-11 кл.: учебник для естественно-научного профиля / Под ред. Смирновой И.М.– М.: Просвещение, 2013. – 514 с.
- Глаголев, Н. А. Элементарная геометрия: стереометрия для 10-11 кл. ср. шк. в 2ч. – Ч. 2. / Н.А. Глаголев – М.: Просвещение, 2009. – 318 с.
- Готман, Э.Г. Решение геометрических задач аналитическим методом / Э.Г. Готман, З.А. Скопец.. – М.: Просвещение, 2008. – 418 с.
- Гусев, В.А. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. Вузов / В.А. Гусев. - М.: AcademiA, 2014. – 498 с.
- Гусев, В.А. Практикум по элементарной математике / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович А.Г. – М.: Альфа, 2012. – 668 с.
- Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. Пособие / Н.В. Ефимов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 418 с.
- Попов, Ю. Н. Стереометрия. Методы и приемы решения задач / Ю.Н. Попов. – Калининград: Изд. Российского государственного университета, 2010. – 518 с.