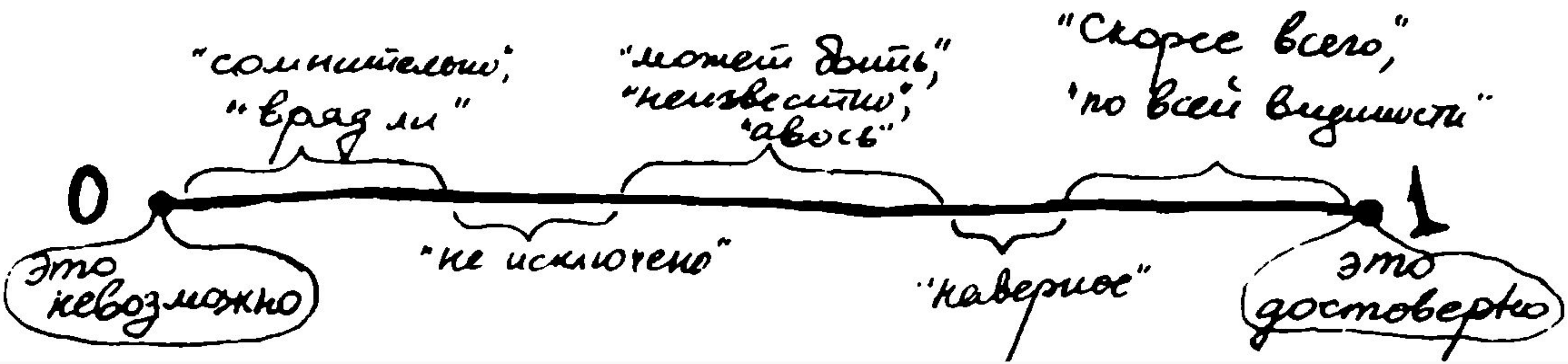
Начальник написал 10 различных писем и поручил своему помощнику надписать 10 конвертов с нужными адресами. Тот так и сделал, но дальнейшее перепоручил секретарше. Она выполнила это ответственное задание формально, то есть разложила письма по конвертам, не обращая внимания на адреса. Какова вероятность того, что ни одно письмо не попало в нужный конверт?

Какие предположения мы используем когда оцениванием вероятность наступления какого – либо события?

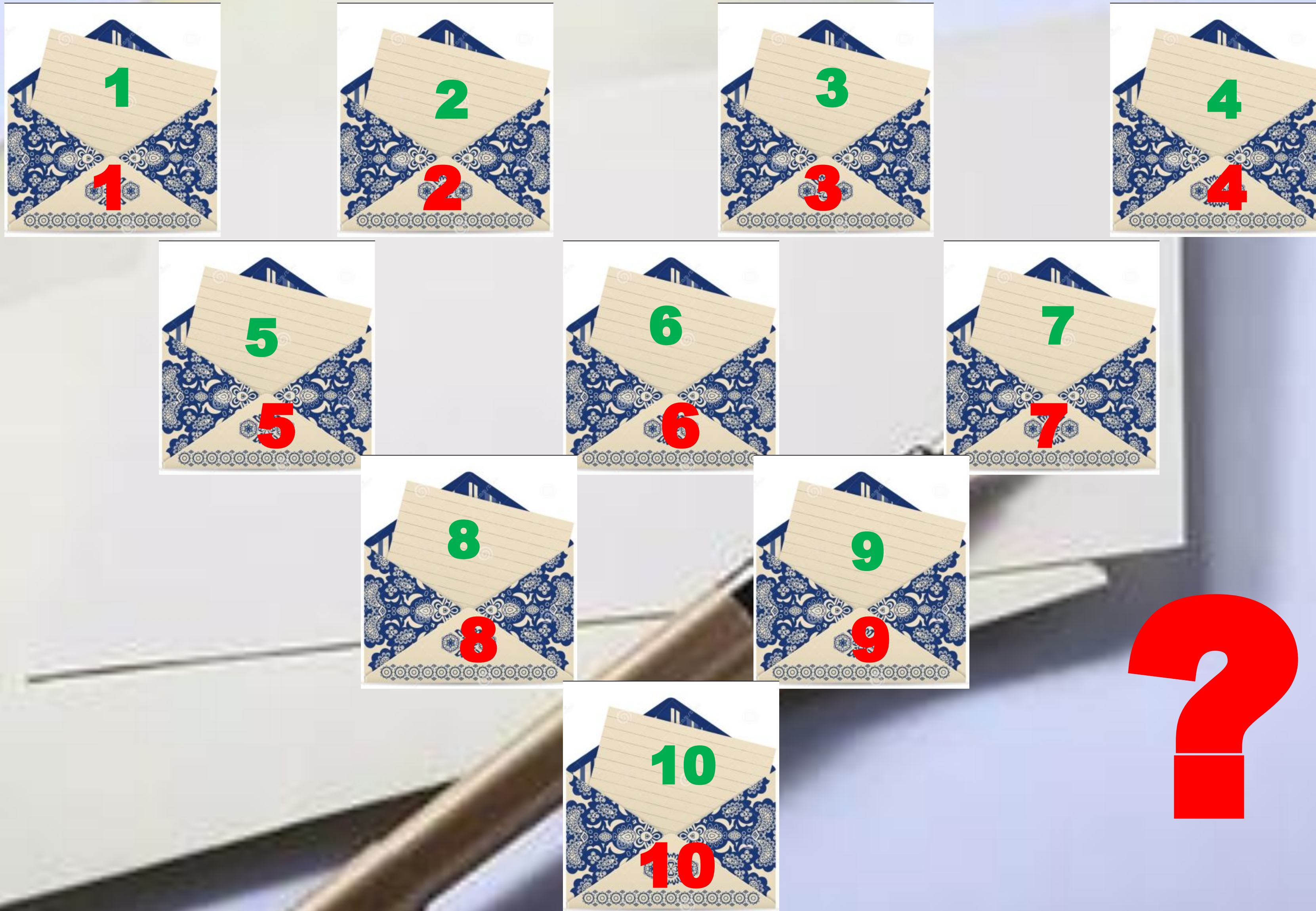


Можно ли вычислить вероятность наступления нужного события?

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

- **благоприятные исходы**
- **все возможные исходы**

Сколько существует способов разложить письма по конвертам?



Ковалева Ирина Константиновна

«Сколько?» – основной вопрос комбинаторики.

Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов заданного множества называется комбинаторикой.

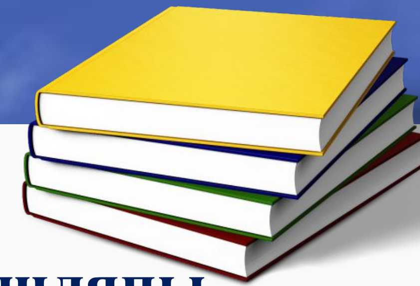
В простейших случаях мы можем выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их.

При переборе вариантов желательно придерживаться двух правил:

1. **Обозначаем наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.**

2. **Выписываем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию (при обозначении цифрами).**

Задача. (Леонард Эйлер)



Четыре гостя при входе в ресторан отдали свои шляпы швейцару, а при выходе получили обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?

1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

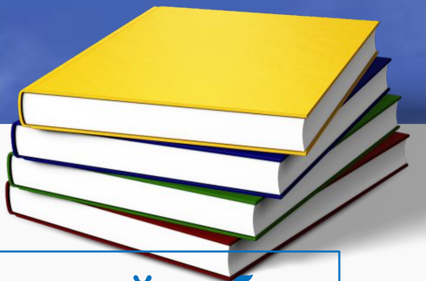
Занумеруем гостей цифрами 1, 2, 3, 4 и также занумеруем их шляпы. Считаем, что шляпа с данным номером принадлежит гостю с этим же номером.

Теперь выпишем по возрастанию все числа, содержащие цифры 1, 2, 3 и 4, такие, что никакая цифра не стоит на позиции со своим номером.

Красные цифры над чертой – номер гостя.

Всего 9 вариантов требуемой раздачи шляп.

В некоторых ситуациях порядок следования объектов важен для нас, а в некоторых не важен.



Упорядоченный набор объектов называют **цепочкой**, а сами объекты – элементами цепочки.

Всякий **неупорядоченный** набор объектов – **множество**, сами объекты – элементы множества.

Пример: слово *автор* является цепочкой из 5 элементов:
***а*, *в*, *т*, *о* и *р*.**

Операции над множествами

Объединение

Множество A U B состоит из всех элементов хотя бы одного из множеств A или B

Пример:
A{1,2,3,4,5,6}
B{5,6,7,8,9}
AUB{1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Пересечение

Множество A ∩ B состоит только из общих элементов множества A и B

Пример:
A{1,2,3,4,5,6}
B{5,6,7,8,9}
A∩B{5,6}

Разность

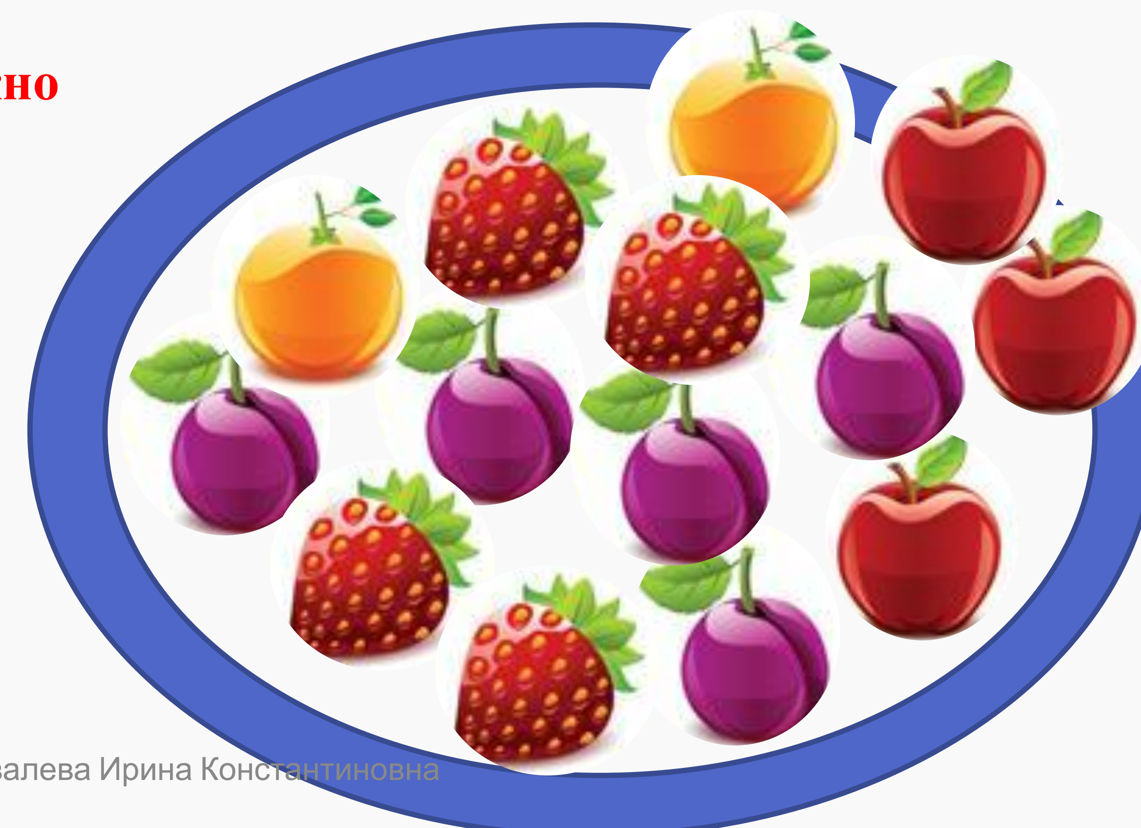
Множество A \ B состоит из всех элементов множества A не принадлежащих множеству B

Пример:
A{1,2,3,4,5,6}
B{5,6,7,8,9}
A\B{1,2,3,4}

Основные комбинаторные принципы

<u>Правило суммы:</u> **Пусть объект *a* можно выбрать m способами, а объект b – n способами. Тогда выбор *«либо a либо b»* можно сделать m+n способами.**

Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?



Яблоко – 5 способами,
сливу – 5 способами,
клубнику – 4 способами.

Ответ: 14 способами.

Основные комбинаторные принципы

<u>Правило произведения:</u> **Пусть объект *a* можно выбрать m способами, после чего объект b можно выбрать – n способами. Тогда упорядоченную пару (*a*, *b*) можно выбрать mn способами.**

В магазине есть 7 видов пиджаков, 3 вида брюк, 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

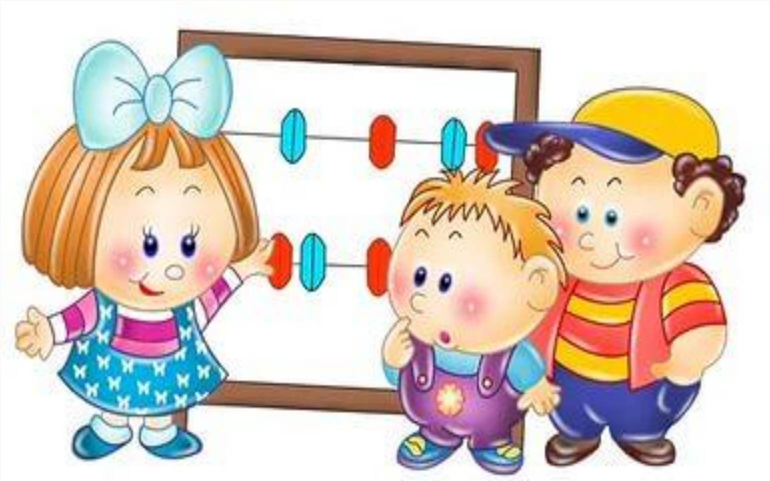
$7*3*4 = 84$

Комбинации объектов

Размещения

Перестановки

Сочетания



Перестановки

Комбинации из n-элементов, отличающиеся друг от друга <u>только порядком следования</u> элементов, называются перестановками.

Обозначаются P_n

Число перестановок из n-элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Примеры задач

8 друзей решили сфотографироваться. Сколькими способами их можно рассадить?

$P_8 = 8! = 8*7*6*5*4*3*2*1$

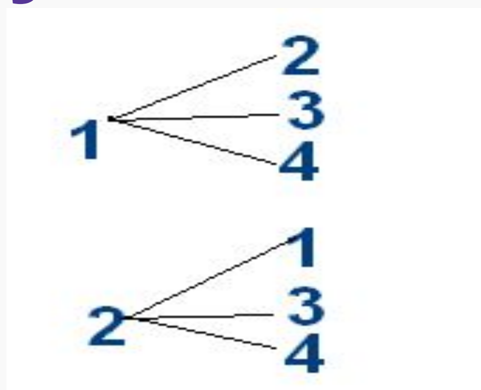
Размещения

Комбинации из n-элементов по k, отличающиеся друг от друга <u>составом и порядком,</u> называются размещениями.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Примеры задач

Даны числа 1,2,3,4. Сколько можно составить двузначных чисел?



$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$$

Примеры задач

Из команды в 10 человек нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

№ 1.Вычислите: $1)\, A_3^1;\ 2)\, A_3^2;\ 3)\, A_7^2;\ 4)\, A_7^7$

$5)\, A_8^3;\ 6)\, A_8^4;\ 7)\, A_{10}^2;\ 8)\, A_{10}^4$

№ 2. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных предметов?

№ 3. Сколько существует способов для обозначения вершин данного четырехугольника с помощью букв A,B,C,D,E,F?

№ 4. В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

№ 5. В чемпионате по футболу участвуют 10 команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?

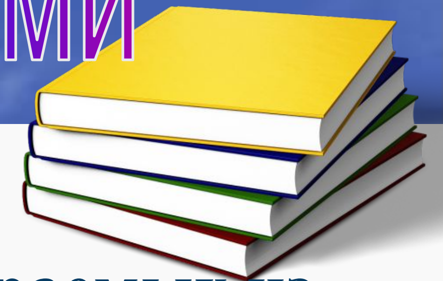
№ 6. Найти значение выражения 1) $\dfrac{A_{13}^{3}-A_{10}^{2}}{A_{9}^{1}}$

2) $\dfrac{A_{12}^{4}\cdot A_{7}^{7}}{A_{11}^{9}}$

№ 7. Решите уравнение $A_{m}^{3}=56m$

$$A_{m}^{2}=90$$

Размещения с повторениями



Соединения, содержащие n элементов, выбираемых из m различных видов, и отличающиеся одно от другого <u>либо составом, либо порядком следования</u> в них элементов называют размещениями с повторениями из m по n.

Обозначение: $\overline{A_m^n}$

Читают: число размещений с повторениями из эм по эн

$$\overline{A_m^n} = m^n$$

Размещения без повторений

-расположение «предметов» на некоторых «местах» при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

яблоко / банан / груша
груша / яблоко / банан
груша / банан / яблоко
банан / яблоко / груша
банан / груша / яблоко

Размещения с повторениями

-расположение «предметов» в предложении так, что каждый предмет может участвовать в размещении сколько угодно раз.

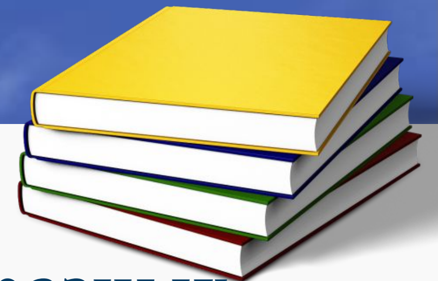
22232223
22333223
33322322
23232323
32232232и т. д.

Сочетания

Комбинации из n-элементов по *к*, отличающиеся только составом элементов, называются сочетаниями из n-элементов по *к*.

$$C_n^{\kappa} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Сочетаниями из m элементов по n в каждом ($n \leq m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом. Иногда такие сочетания называют сочетаниями без повторений.



Задача:

Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

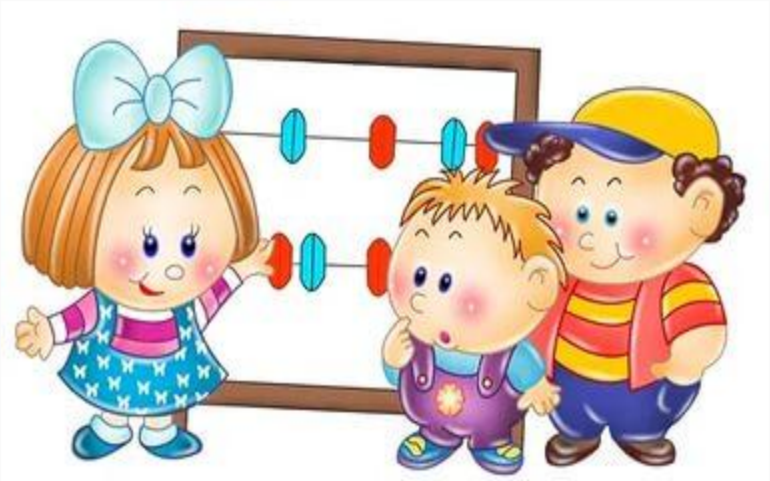
Как решать задачи?

Комбинации объектов

Перестановки

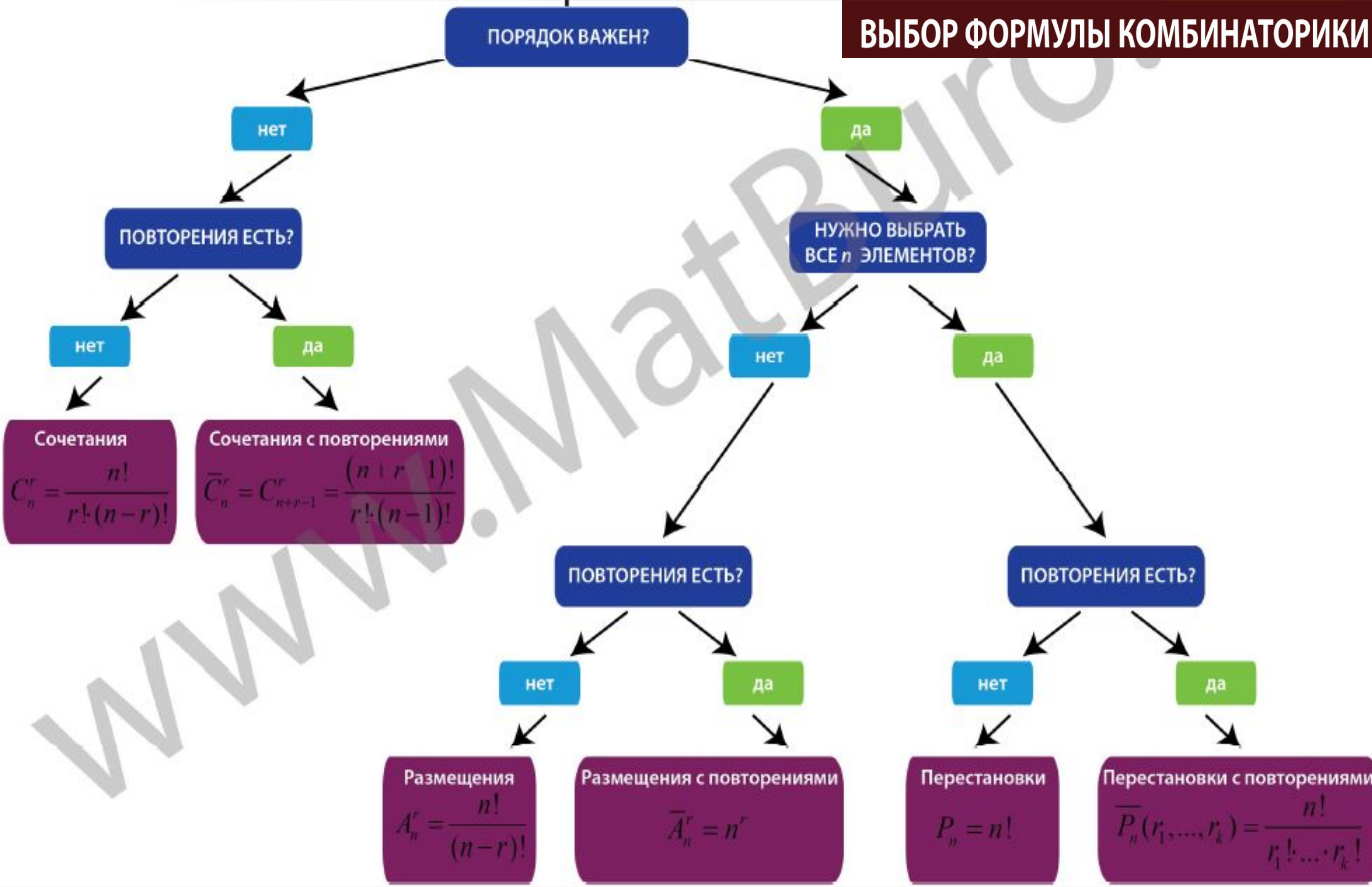
Размещения

Сочетания



ОПРЕДЕЛИТЕ *n (общее количество объектов)*
И r (сколько объектов выбираем)

ВЫБОР ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ



Задача. *Сколькими способам можно вывезти со склада 10 ящиков на двух автомашинах, если на каждую автомашину грузят по 5 ящиков?*

Задача. *В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравлений?*

Задача. *Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.*

Задачи.

1.На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

2.Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

3.Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

4.В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

5.Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Формула включений и исключений

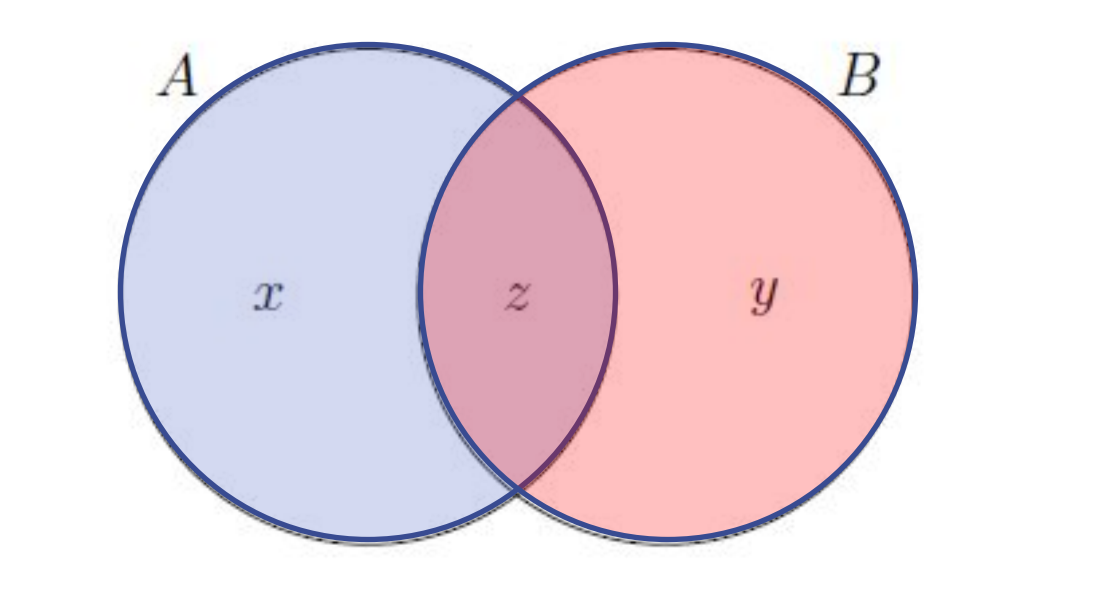
Не всякая комбинаторная задача решается непосредственным применением комбинаторных принципов – правила суммы или произведения, подсчетом числа размещений или сочетаний.

В некоторых случаях приходится идти окольным путем и действовать «методом решета»: для нахождения элементов интересующего нас множества мы сначала находим число элементов некоторого большего множества, а потом «просеиваем» нужные элементы, постепенно отбрасывая лишние.

Формула включений и исключений для двух множеств

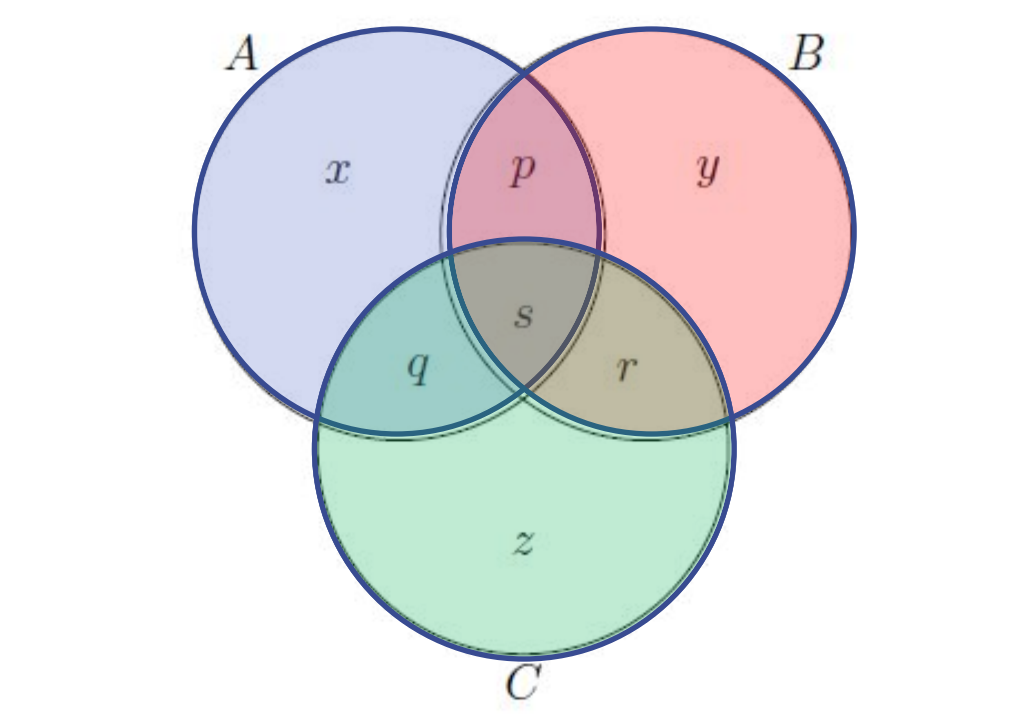
Для двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Формула включений и исключений для трех множеств

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Формула включений и исключений в задачах

Задача (Леонард Эйлер): Войдя в ресторан, n гостей оставили свои шляпы швейцару, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

Решение:

занумеруем гостей числами 1, 2, …, n и так же занумеруем шляпы (при этом i-ая шляпа принадлежит i-му гостю). Тогда каждый вариант разбора шляп обозначается единственной перестановкой чисел 1, 2, …, n.

Будем говорить что в перестановке чисел число i стоит на своем месте, если k_i =i (например, в перестановке 4132 число 3 стоит на своем месте). Нас интересует количество *беспорядков*, то есть таких перестановок, в которых ни одно из чисел не стоит на своем месте.

Пусть A_i - множество перестановок, в которых число i стоит на своем месте (i = 1,2,…,n). Искомое число N беспорядков, таким образом равно

$$N = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$

$$= n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

$|A_i| = (n – 1)!$, поэтому

$$\sum_i |A_i| = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Точно так же $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ и

$$\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}.$$

Аналогично $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ и

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}.$$

Теперь мы приходим к нужной формуле:

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n = 4$ найденная формула даёт:

$$N = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 12 - 4 + 1 = 9.$$

Этот результат мы получили ранее прямым перебором.

Заметим, что если шляпы разбираются случайным образом, то вероятность беспорядка оказывается равной:

$$\frac{N}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n \to \infty$ данная сумма стремится к пределу, равному $1/e$, где $e = 2{,}718\ldots$ — одна из самых распространённых математических констант (наряду с числом π), получившая обозначение также в честь Эйлера. Таким образом, если гостей много, то вероятность, что каждый уйдёт в чужой шляпе, приблизительно равна $1/e \approx 0{,}37$.

Начальник написал 10 различных писем и поручил своему помощнику надписать 10 конвертов с нужными адресами. Тот так и сделал, но дальнейшее перепоручил секретарше. Она выполнила это ответственное задание формально, то есть разложила письма по конвертам, не обращая внимания на адреса. Какова вероятность того, что ни одно письмо не попало в нужный конверт?