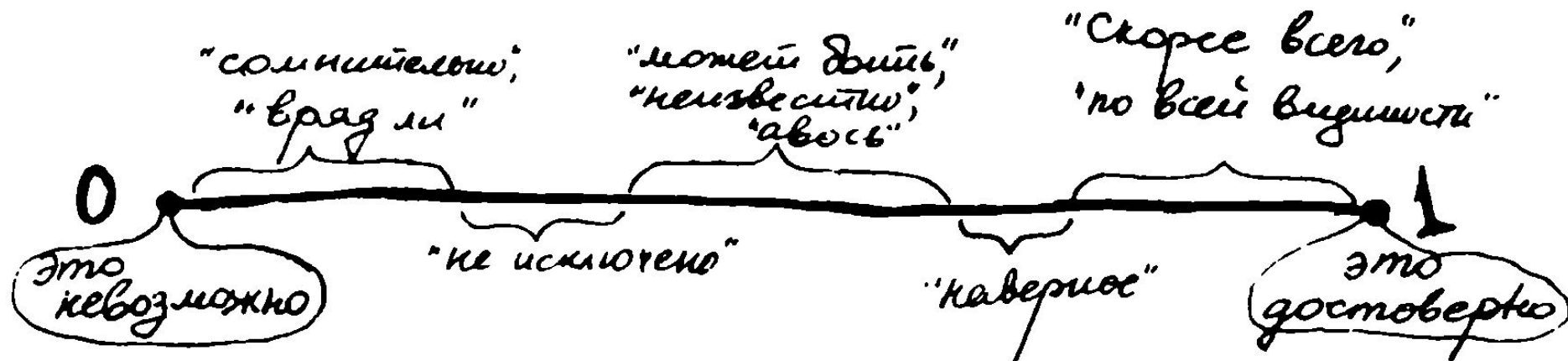


Начальник написал 10 различных писем и поручил своему помощнику надписать 10 конвертов с нужными адресами. Тот так и сделал, но дальнейшее перепоручил секретарше. Она выполнила это ответственное задание формально, то есть разложила письма по конвертам, не обращая внимания на адреса. Какова вероятность того, что ни одно письмо не попало в нужный конверт?



Какие предположения мы используем когда оцениваем вероятность наступления какого – либо события?

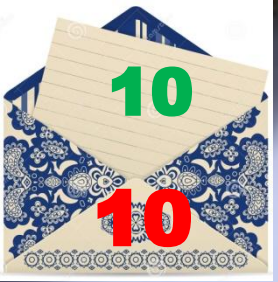
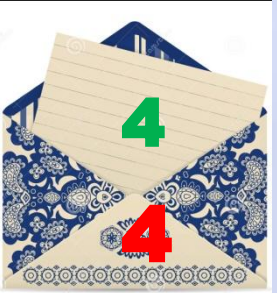
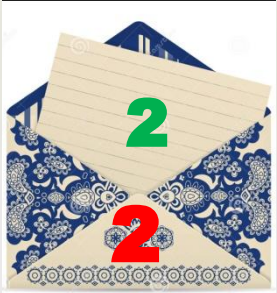
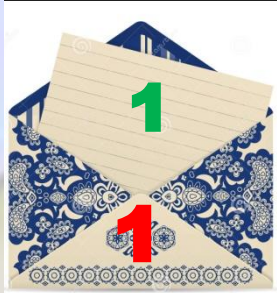


Можно ли вычислить вероятность наступления нужного события?

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

- благоприятные исходы
- все возможные исходы

Сколько существует способов разложить письма по конвертам?



«Сколько?» – основной вопрос комбинаторики.



Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов заданного множества называется **комбинаторикой**.

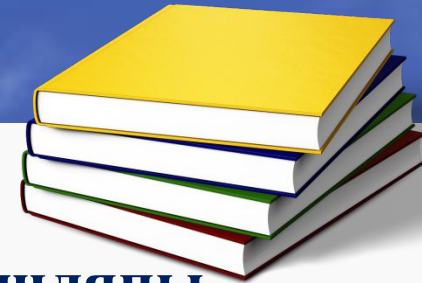
В простейших случаях мы можем выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их.



**При переборе вариантов
желательно придерживаться двух правил:**

- 1. Обозначаем наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.**
- 2. Выписываем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию (при обозначении цифрами).**

Задача. (Леонард Эйлер)



Четыре гостя при входе в ресторан отдали свои шляпы швейцару, а при выходе получили обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?





1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

Занумеруем гостей цифрами 1, 2, 3, 4 и также занумеруем их шляпы. Считаем, что шляпа с данным номером принадлежит гостю с этим же номером.

Теперь выпишем по возрастанию все числа, содержащие цифры 1, 2, 3 и 4, такие, что никакая цифра не стоит на позиции со своим номером.

Красные цифры над чертой – номер гостя.

Всего 9 вариантов требуемой раздачи шляп.

В некоторых ситуациях порядок следования объектов важен для нас, а в некоторых не важен.



Упорядоченный набор объектов называют **цепочкой**, а сами объекты – элементами цепочки.

Пример: слово *автор* является цепочкой из 5 элементов:
а, в, т, о и р.



Всякий неупорядоченный набор объектов – **множество**, сами объекты – элементы множества.



Операции над множествами



Объединение

Множество $A \cup B$
состоит из всех
элементов хотя
бы одного из
множеств А или В

Пример:

$A\{1,2,3,4,5,6\}$

$B\{5,6,7,8,9\}$

$A \cup B\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Пересечение

Множество $A \cap B$
состоит только из
общих элементов
множества А и В

Пример:

$A\{1,2,3,4,5,6\}$

$B\{5,6,7,8,9\}$

$A \cap B\{5,6\}$

Разность

Множество $A \setminus B$
состоит из всех
элементов множества
А не принадлежащих
множеству В

Пример:

$A\{1,2,3,4,5,6\}$

$B\{5,6,7,8,9\}$

$A \setminus B\{1,2,3,4\}$

Основные комбинаторные принципы

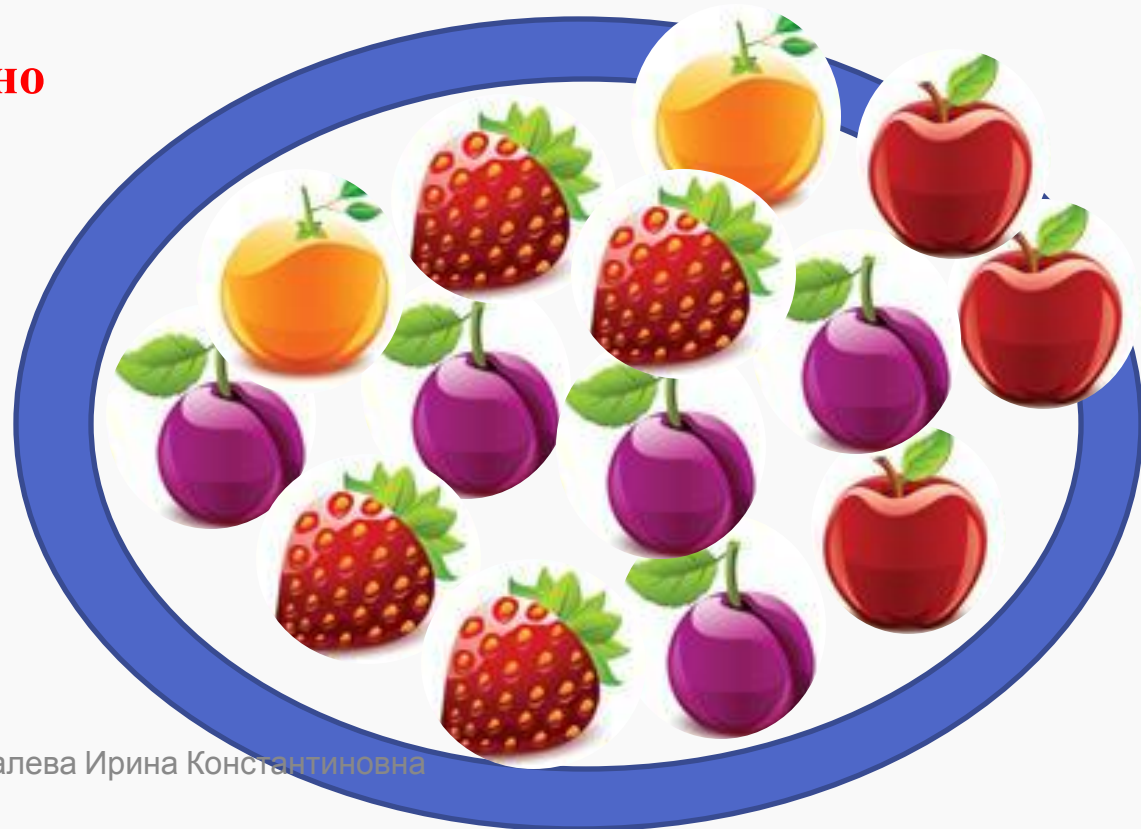


Правило суммы: Пусть объект *a* можно выбрать *m* способами, а объект *b* – *n* способами. Тогда выбор «*либо a либо b*» можно сделать *m+n* способами.

Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

Яблоко – 5 способами,
сливу – 5 способами,
клубнику – 4 способами.

Ответ: 14 способами.



Основные комбинаторные принципы



Правило произведения: Пусть объект a можно выбрать m способами, после чего объект b можно выбрать – n способами. Тогда упорядоченную пару (a, b) можно выбрать mn способами.

**В магазине есть 7 видов пиджаков,
3 вида брюк, 4 вида галстуков.
Сколькими способами можно купить
комплект из пиджака, брюк и галстука?**



$$7*3*4 = 84$$



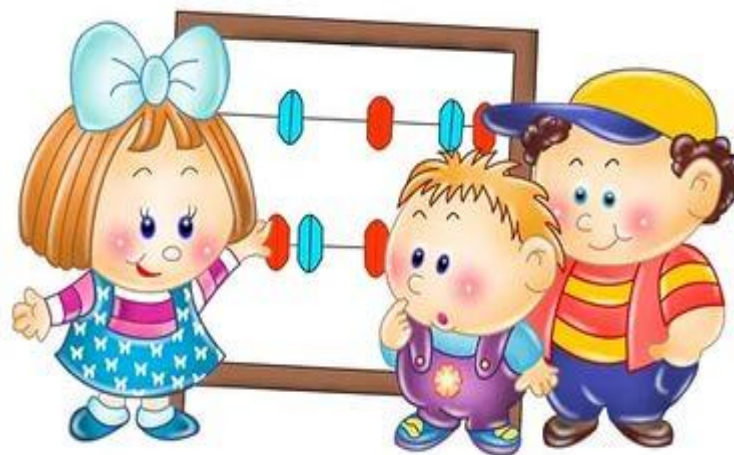


Комбинации объектов

Размещения

Перестановки

Сочетания



Перестановки



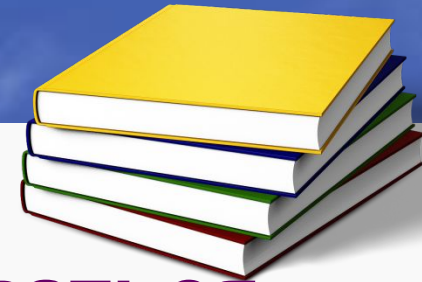
Комбинации из n -элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, называются **перестановками**.

Обозначаются P_n

Число перестановок из n -элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Примеры задач



8 друзей решили сфотографироваться.
Сколькими способами их можно
рассадить?



$$P_8 = 8! = 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1$$

Размещения



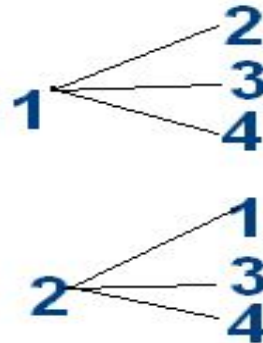
Комбинации из n -элементов по k , отличающиеся друг от друга составом и порядком, называются **размещениями**.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Примеры задач



Даны числа 1,2,3,4. Сколько можно составить двузначных чисел?



$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$$

Примеры задач



Из команды в 10 человек нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



№ 1. Вычислите: 1) A_3^1 ; 2) A_3^2 ; 3) A_7^2 ; 4) A_7^7
5) A_8^3 ; 6) A_8^4 ; 7) A_{10}^2 ; 8) A_{10}^4

№ 2. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных предметов?

№ 3. Сколько существует способов для обозначения вершин данного четырехугольника с помощью букв А,В,С,Д,Е,Ф?

№ 4. В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

№ 5. В чемпионате по футболу участвуют 10 команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?



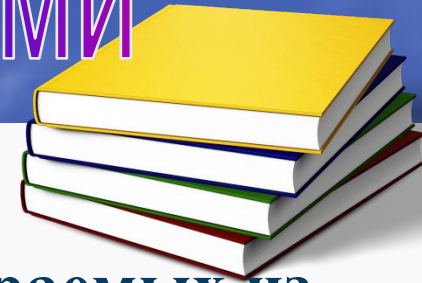
№ 6. Найти значение выражения 1) $\frac{A_{13}^3 - A_{10}^2}{A_9^1}$

2) $\frac{A_{12}^4 \cdot A_7^7}{A_{11}^9}$

№ 7. Решите уравнение $A_m^3 = 56m$

$$A_m^2 = 90$$

Размещения с повторениями



Соединения, содержащие n элементов, выбираемых из m различных видов, и отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком следования в них элементов называют **размещениями с повторениями из m по n** .

Обозначение:

$$\overline{A_m^n}$$

Читают: число размещений с повторениями
из m по n

$$\overline{A_m^n} = m^n$$

Размещения без повторений

-расположение «предметов»
на некоторых «местах»
при условии, что каждое
место занято в точности
одним предметом и все
предметы различны.

яблоко / банан / груша
груша / яблоко / банан
груша / банан / яблоко
банан / яблоко / груша
банан / груша / яблоко



Размещения с повторениями

-расположение «предметов»
в предложении так, что
каждый предмет может
участвовать в размещении
сколько угодно раз.

22232223
22333223
33322322
23232323
32232232и т.

д.

Сочетания



Комбинации из n -элементов по k , отличающиеся только составом элементов, называются сочетаниями из n -элементов по k .

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Сочетаниями из m элементов по n в каждом ($n \leq m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом. Иногда такие сочетания называют сочетаниями без повторений.

Задача:

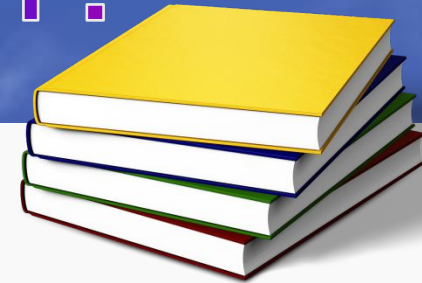


Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$



Как решать задачи?

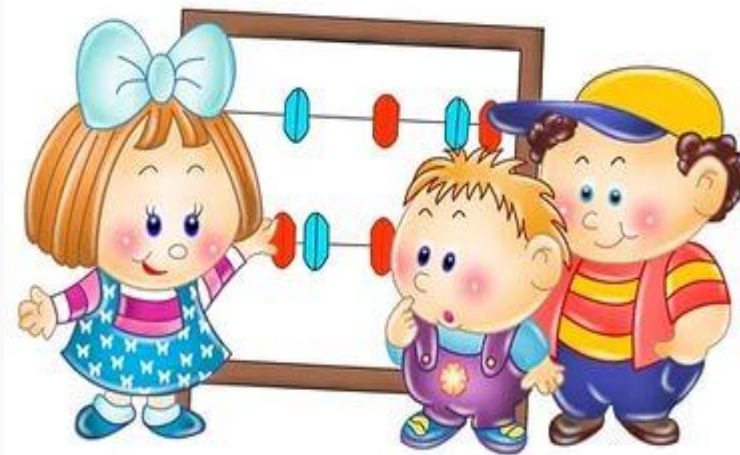


Комбинации объектов

Размещения

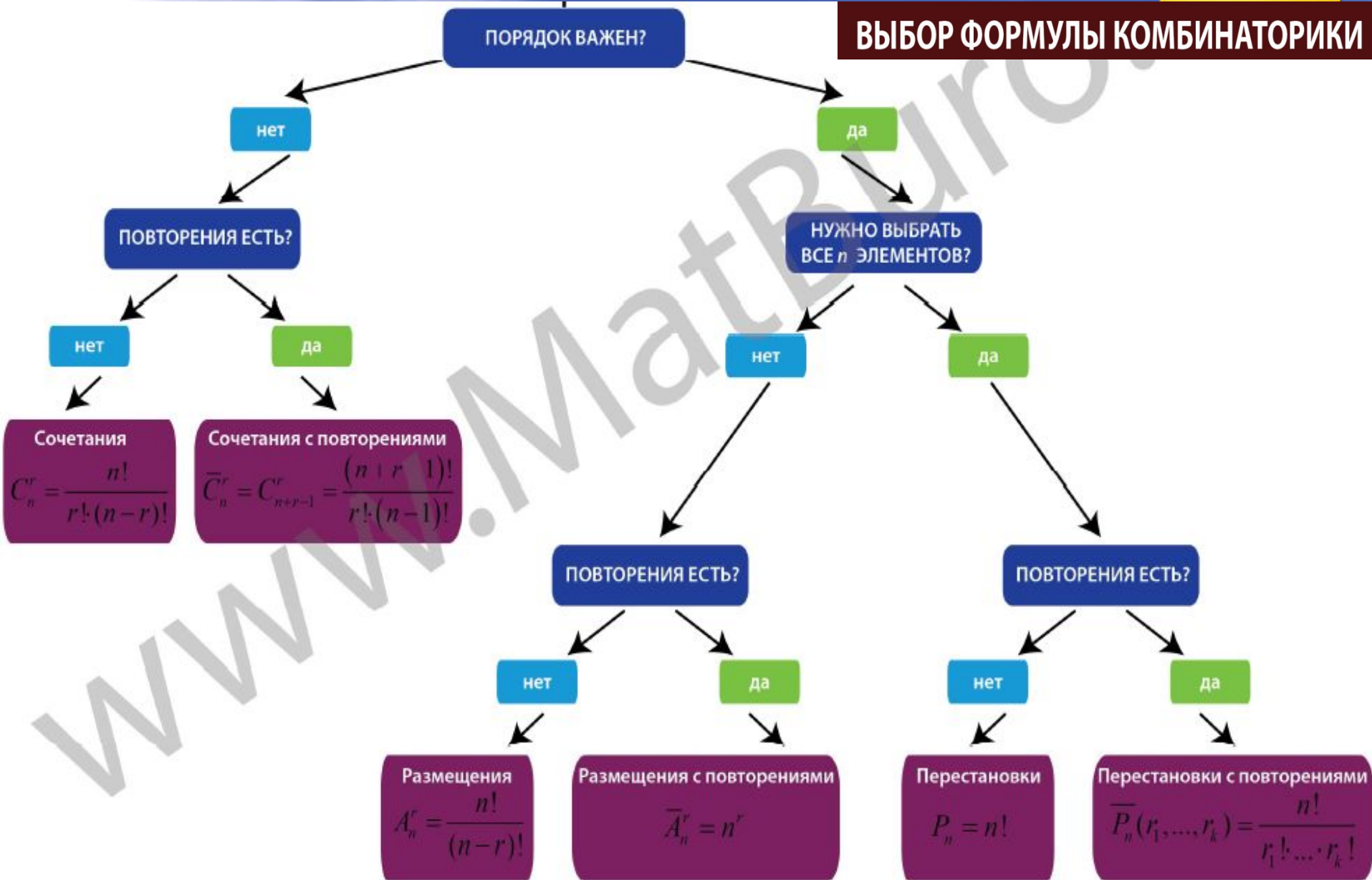
Перестановки

Сочетания



ОПРЕДЕЛИТЕ n (общее количество объектов)
И r (сколько объектов выбираем)

ВЫБОР ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ



Задача. *Сколькими способам можно вывезти со склада 10 ящиков на двух автомашинах, если на каждую автомашину грузят по 5 ящиков?*

[Blank area for solution]

Задача. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравлений?

Задача. *Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.*

Задачи.



- 1. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?**
- 2. Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?**
- 3. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?**
- 4. В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?**
- 5. Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?**

Формула включений и исключений



Не всякая комбинаторная задача решается непосредственным применением комбинаторных принципов – правила суммы или произведения, подсчетом числа размещений или сочетаний.

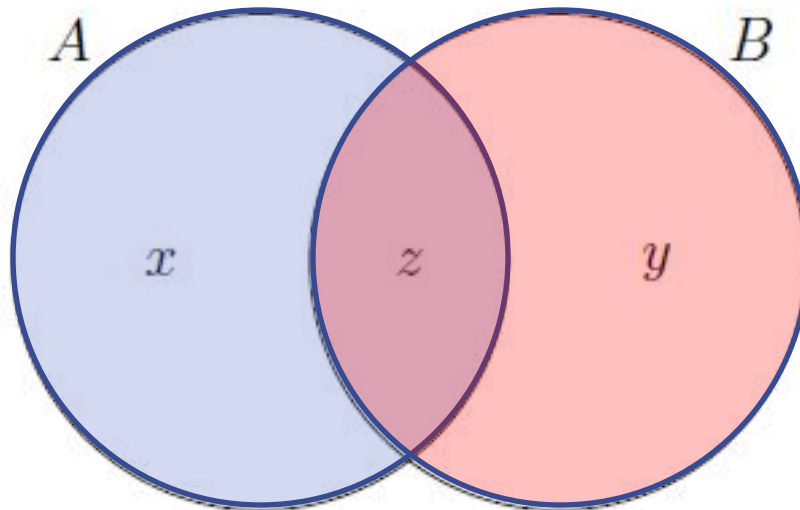
В некоторых случаях приходится идти окольным путем и действовать «методом решета»: для нахождения элементов интересующего нас множества мы сначала находим число элементов некоторого большего множества, а потом «просеиваем» нужные элементы, постепенно отбрасывая лишние.

Формула включений и исключений для двух множеств



Для двух множеств:

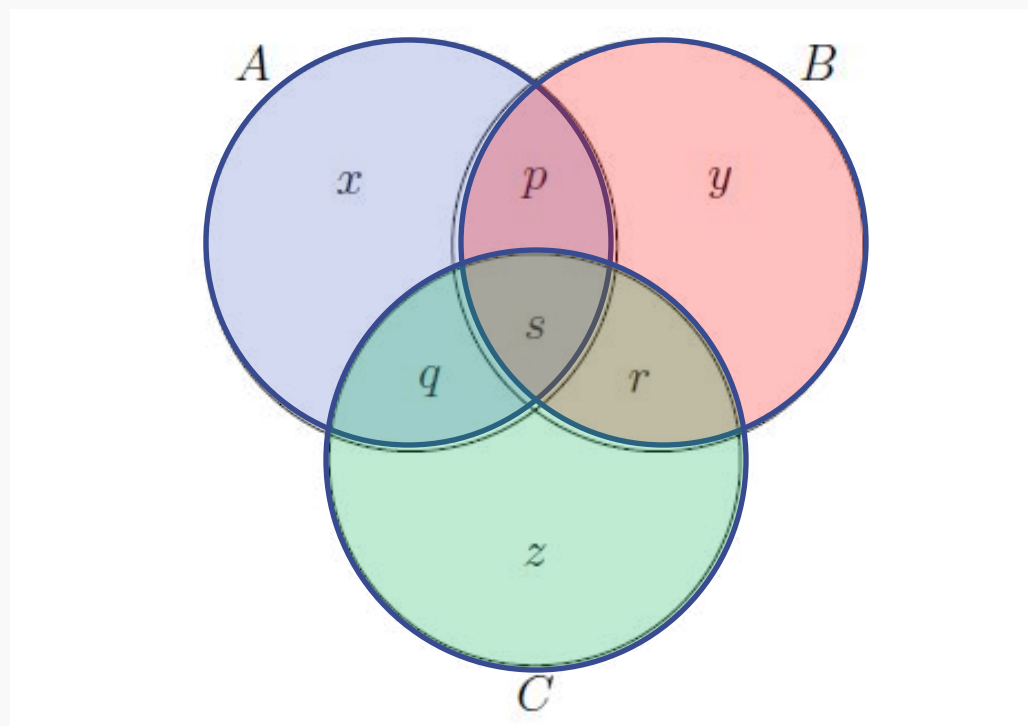
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Формула включений и исключений для трех множеств



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Формула включений и исключений в задачах



Задача (Леонард Эйлер): Войдя в ресторан, n гостей оставили свои шляпы швейцару, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

Решение:

занумеруем гостей числами $1, 2, \dots, n$ и так же занумеруем шляпы (при этом i -ая шляпа принадлежит i -му гостю). Тогда каждый вариант разбора шляп обозначается единственной перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$.

Будем говорить что в перестановке чисел число i стоит на своем месте, если $k_i = i$ (например, в перестановке 4132 число 3 стоит на своем месте). Нас интересует количество *беспорядков*, то есть таких перестановок, в которых ни одно из чисел не стоит на своем месте.

Пусть A_i - множество перестановок, в которых число i стоит на своем месте ($i = 1, 2, \dots, n$). Искомое число N беспорядков, таким образом равно

$$\begin{aligned} N &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\ &= n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

$|A_i| = (n - 1)!$, поэтому

$$\sum_i |A_i| = n \cdot (n - 1)! = n!.$$

Точно так же $|A_i \cap A_j| = (n - 2)!$ и

$$\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = C_n^2 \cdot (n - 2)! = \frac{n(n - 1)}{2!} \cdot (n - 2)! = \frac{n!}{2!}.$$

Аналогично $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n - 3)!$ и

$$\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_n^3 \cdot (n - 3)! = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{3!} \cdot (n - 3)! = \frac{n!}{3!}.$$

Теперь мы приходим к нужной формуле:

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n = 4$ найденная формула даёт:


$$N = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 12 - 4 + 1 = 9.$$

Этот результат мы получили ранее прямым перебором.

Заметим, что если шляпы разбираются случайным образом, то вероятность беспорядка оказывается равной:

$$\frac{N}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n \rightarrow \infty$ данная сумма стремится к пределу, равному $1/e$, где $e = 2,718\dots$ — одна из самых распространённых математических констант (наряду с числом π), получившая обозначение также в честь Эйлера. Таким образом, если гостей много, то вероятность, что каждый уйдёт в чужой шляпе, приблизительно равна $1/e \approx 0,37$.



Начальник написал 10 различных писем и поручил своему помощнику надписать 10 конвертов с нужными адресами. Тот так и сделал, но дальнейшее перепоручил секретарше. Она выполнила это ответственное задание формально, то есть разложила письма по конвертам, не обращая внимания на адреса. Какова вероятность того, что ни одно письмо не попало в нужный конверт?