Решение нестандартных уравнений и неравенств с помощью метода мажорант

Учитель высшей категории:
Н.В. Болтушкина

Метод мажорант

заключается в том, что одна часть уравнения(или неравенства) ограничена сверху неким числом М, а другая часть уравнения(или неравенства) ограничена снизу этим же числом М. Число М называется мажорантой.

Признаки того, что в данном уравнении нужно применить метод мажорант

- Наличие в уравнении функций, уравнения с которыми решаются принципиально разными способами

Например:

1. $log_2(5 + 3\cos(3x - \frac{\Pi}{4})) = sin^2(2x - \frac{2\Pi}{3})$

- Или если очевидно, что стандартными методами уравнение не решить

$$4\sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{\log_2^2 x^2 + 16\log_4 x} \leqslant 4 - 12x$$

Уравнения ,неравенства и системы , содержащие разнородные функции

1. $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$

2. $log_2(5 + 3\cos(3x - \frac{П}{4})) = sin^2\,(2x - \frac{2П}{3})$

3. $\cos^2(x+1) \cdot Lg(9-2x-x^2) \geq 1$

4. $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1$

$$\begin{cases} 13^{x-6} + Ln^2(x-7) \geq 13 \\ 7 + \sqrt{13 - x} \leq 7^{x-12} \end{cases}$$

Примеры элементарных функций, которые имеют ограниченное множество значений.

- $-1 \le \sin x \le 1$ или $|\sin x| \le 1$
- $-1 \le \cos x \le 1$
- $x^{2n} \ge 0$
- $a^x > 0$
- $|x| \ge 0$
- $\sqrt{x} \ge 0$
- $-\frac{\pi}{2} \le arcsin \le \frac{\pi}{2}$
- $0 \le \arccos x \le П$
- $-\frac{\pi}{2} < arctg\ x < \frac{\pi}{2}$
- $0 < \text{arcctg}\ x < П$

Алгоритм используемый при решении с помощью метода мажорант

- Выясняем что правая часть больше или равна какого-то числа, а левая меньше или равна. Или наоборот.
- Равенство возможно, если обе части уравнения равны этому числу.
- Приравниваем ту часть уравнения , которая проще к этому числу и находим соответствующее значение х
- Проверяем, что при этом значении х другая часть уравнения также равна этому числу

Пример 1. С1. Решите уравнение:

а) $\log_2(5+3\cos(3x - \frac{\pi}{4})) = \sin^2(2x - \frac{2\pi}{3})$

б) найдите все корни уравнения, на промежутке [-П; 2П]

Решение

Оценим, в каких пределах может принимать значение левая часть неравенства:

$$-1 \le \cos(3x - \frac{\pi}{4}) \le 1$$

$$-3 \le 3\cos(3x - \frac{\pi}{4}) \le 3$$

$$2 \le 5 + \cos(3x - \frac{\pi}{4}) \le 8$$

Тк как все части неравенства положительны, прологарифмируем неравенство:

$$\log_2 2 \le \log_2(5 + 3\cos(3x - \frac{\pi}{4})) \le \log_2 8$$

$$1 \le \log_2(5 + 3\cos(3x - \frac{\pi}{4})) \le 3a$$

Итак, левая часть уравнения больше или равна единицы

Оценим, в каких пределах может принимать значения правая часть неравенства

$$0 \le \sin^2(2x - \frac{2\pi}{3}) \le 1$$

Получим, что правая часть неравенства меньше или равна единицы

Равенство возможно, только если обе части одновременно равны 1

Найдем, при каких значениях x выполняется равенство

$$\log_2\left(5 + 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1$$

$5 + 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$

$3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -3$

$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

$3x = \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$

Итак, левая часть уравнения равна 1 при:

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$$

Найдем, при каких значениях x правая часть равна 1.

$$\sin^2\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

$\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \pm 1$

$2x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$2x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$2x = \frac{7\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

$X = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

Итак, правая часть уравнения равна 1 при:

$$X = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Это решение должно совпадать с тем значением x, при котором левая часть равна 1. Выпишем значения x из промежутка [0; 2 π]

n = 0, x = $\frac{7\pi}{12}$

n = 1, x = $\boldsymbol{\frac{13\pi}{12}}$

n = 2, x = $\frac{19\pi}{12}$

n = 3, x = $\frac{25\pi}{12}$

Из множества x = $\frac{5\pi}{12}$ + $\frac{2\pi k}{3}$, k ∈ Z выпишем значения x из промежутка [0; 2 π]

k = 0, x = $\frac{5\pi}{12}$

k = 1, x = $\boldsymbol{\frac{13\pi}{12}}$

k = 2, x = $\frac{21\pi}{12}$

k = 3, x = $\frac{5\pi}{12} + 2\pi$ – цикл начинается снова

Мы видим, что при x = $\frac{13\pi}{12}$ обе части уравнения равны 1

Итак, решение уравнения x = $\frac{13\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z$

C3.
$$\begin{cases} 13^{x-6}+\ln^2(x-7)\geq 13 \\ 7+\sqrt{13-x}\leq 7^{x-12} \end{cases}$$

1. Решим первое неравенство системы: $13^{x-6}+ln^2(x-7)\geq 13$

А) ОДЗ: $x>7$

Б) $ln^2(x-7)\geq 0$; если $x>7\Rightarrow x-6>1\Rightarrow 13^{x-6}>13$

Неравенство $13^{x-6}+ln^2(x-7)\geq 13$ верно при $x>7$

2. Решим второе неравенство системы: $7+\sqrt{13-x}\leq 7^{x-12}$

А) ОДЗ: $x\leq 13$

Б) Оценим правую часть неравенства: $x\leq 13\Rightarrow x-12\leq 1\Rightarrow 7^{x-12}\leq 7$

В) Оценим левую часть неравенства: $\sqrt{13-x}\geq 0\Rightarrow 7+\sqrt{13-x}\geq 7$

Неравенство выполняется, если обе части равны 7

$x=13$

3. Вернемся к системе: $\begin{cases} x>7 \\ x=13 \end{cases}$

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a(x^4+1) = y + 2 - |x|} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 4} \end{cases}$$

Решение:

Если надо найти единственное решение применим метод «поиск симметричных корней» или метод инвариантности.

Переменная х присутствует в виде x^4; $|x|$; x^2. Что общего у этих функций, то, что функции четные.

То есть если $x_1 \neq 0$ является решением, то и $-x_1 \neq 0$ является решением.

Тогда единственное решение будет при условии, что $x = 0$. Подставим его в каждое уравнение

$$\begin{cases} a = y + 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 + 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

а= 4, а =0 (кандидаты в ответ)

При таких а, х = 0 является решением, но никто не гарантирует, что других нет. Проверим каждое из этих значений а.

a = 0

$$\begin{cases} 0 = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = |x| - 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = |x| - 2 \\ x^2 + (|x| - 2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + |x|^2 - 4|x| + 4 = 0$$

$$2|x|^2 - 4|x| = 0$$

$$2|x| * (|x| - 2) = 0$$

$$|x| = 0 \quad \text{или} \quad |x| - 2 = 0$$

$$X = 0 \qquad |x| = 2$$

$$X = \pm 2$$

При а= 0 получим не одно значение х, а целых три. Это не удовлетворяет нашей задаче.

Рассмотрим a=4

$\begin{cases} 4(x^4+1) = y+2-|x| \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ (выразим y) $\begin{cases} y = 4x^4+4+|x|-2 \\ y = \pm\sqrt{4-x^2} \end{cases}$

Так как из первого уравнения y > 0, то $y = \sqrt{4-x^2}$

$$\begin{cases} y = 4x^4+|x|+2 \\ y = \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

$4x^4+|x|+2 = \sqrt{4-x^2}$ применим метод мажорант

$X^4 \geq 0$, $|x| \geq 0$ => $y \geq 2$

$4 - x^2 \leq 4$ => $\sqrt{4-x^2} \leq 2$

Равенство возможно, если y = 2 (обязательно нужна проверка)

Надо подставить y = 2 в систему

$\begin{cases} 4x^4+|x|+2=2 \\ \sqrt{4-x^2}=2 \end{cases}$ $\begin{cases} |x| * (4|x|^3+1)=0 \\ 4-x^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} |x|=0 \\ x^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ x=0 \end{cases}$

x=0 единственное решение

Ответ a = 4