

Решение нестандартных уравнений и
неравенств с помощью
метода мажорант

Учитель высшей категории:
Н.В. Болтушкина

Метод мажорант

заключается в том, что одна часть уравнения(или неравенства) ограничена сверху неким числом M , а другая часть уравнения(или неравенства) ограничена снизу этим же числом M . Число M называется мажорантой.

Признаки того, что в данном уравнении нужно применить метод мажорант

- Наличие в уравнении функций, уравнения с которыми решаются принципиально разными способами

Например:

$$1. \log_2(5 + 3 \cos(3x - \frac{\pi}{4})) = \sin^2(2x - \frac{2\pi}{3})$$

- Или если очевидно, что стандартными методами уравнение не решить

$$4\sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{\log_2^2 x^2 + 16\log_4 x} \leq 4-12x$$

Уравнения, неравенства и системы,
содержащие разнородные функции

1. $2 \sin x = 5x^2 + 2x + 3$

2. $\log_2(5 + 3 \cos(3x - \frac{\pi}{4})) = \sin^2(2x - \frac{2\pi}{3})$

3. $\cos^2(x+1) \cdot \text{Lg}(9-2x-x^2) \geq 1$

4. $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x-x^2-7) \geq 1$

$$\begin{cases} 13^{x-6} + \text{Ln}^2(x-7) \geq 13 \\ 7 + \sqrt{13-x} \leq 7^{x-12} \end{cases}$$

Примеры элементарных функций, которые имеют ограниченное множество значений.

○ $-1 \leq \sin x \leq 1$ или $|\sin x| \leq 1$

○ $-1 \leq \cos x \leq 1$

○ $x^{2n} \geq 0$

○ $a^x > 0$

○ $|x| \geq 0$

○ $\sqrt{x} \geq 0$

○ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

○ $0 \leq \arccos x \leq \pi$

○ $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$

○ $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$

Алгоритм используемый при решении с помощью метода мажорант

- 0 Выясняем что правая часть больше или равна какому-то числу, а левая меньше или равна. Или наоборот.
- 0 Равенство возможно, если обе части уравнения равны этому числу.
- 0 Приравниваем ту часть уравнения , которая проще к этому числу и находим соответствующее значение x
- 0 Проверяем, что при этом значении x другая часть уравнения также равна этому числу

Пример 1. С1. Решите уравнение:

$$\text{а) } \log_2(5+3 \cos(3x - \frac{\pi}{4})) = \sin^2(2x - \frac{2\pi}{3})$$

б) найдите все корни уравнения, на промежутке $[-\pi; 2\pi]$

Решение

Оценим, в каких пределах может принимать значение левая часть неравенства:

$$-1 \leq \cos(3x - \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$-3 \leq 3 \cos(3x - \frac{\pi}{4}) \leq 3$$

$$2 < 5 + \cos(3x - \frac{\pi}{4}) < 8$$

Тк как все части неравенства положительны, прологарифмируем неравенство:

$$\log_2 2 \leq \log_2(5 + 3 \cos(3x - \frac{\pi}{4})) \leq \log_2 8$$

$$1 \leq \log_2(5 + 3 \cos(3x - \frac{\pi}{4})) \leq 3$$

Итак, левая часть уравнения больше или равна единицы

Оценим, в каких пределах может принимать значения правая часть неравенства

$$0 \leq \sin^2(2x - \frac{2\pi}{3}) \leq 1$$

Получим, что правая часть неравенства меньше или равна единицы

Равенство возможно, только если обе части одновременно равны 1

Найдем, при каких значениях x выполняется равенство

$$\log_2 \left(5 + 3 \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 1$$

$$5 + 3 \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 2$$

$$3 \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -3$$

$$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -1$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Итак, левая часть уравнения равна 1 при:

0

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Найдем, при каких значениях x правая часть равна 1.

$$\sin^2 \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1$$

$$\sin \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) = \pm 1$$

$$2x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$2x = \frac{7\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Итак, правая часть уравнения равна 1 при:

$$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Это решение должно совпадать с тем значением x , при котором левая часть равна 1.
Выпишем значения x из промежутка $[0; 2\pi]$

$$n = 0, x = \frac{7\pi}{12}$$

$$n = 1, x = \frac{13\pi}{12}$$

$$n = 2, x = \frac{19\pi}{12}$$

$$n = 3, x = \frac{25\pi}{12}$$

7π

Из множества $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$ выпишем значения x из промежутка $[0; 2\pi]$

$$k = 0, x = \frac{5\pi}{12}$$

$$k = 1, x = \frac{13\pi}{12}$$

$$k = 2, x = \frac{21\pi}{12}$$

$$k = 3, x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi - \text{цикл начинается снова}$$

Мы видим, что при $x = \frac{13\pi}{12}$ обе части уравнения равны 1

$$\text{Итак, решение уравнения } x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z$$

С3.

$$\begin{cases} 13^{x-6} + \ln^2(x-7) \geq 13 \\ 7 + \sqrt{13-x} \leq 7^{x-12} \end{cases}$$

1. Решим первое неравенство системы: $13^{x-6} + \ln^2(x-7) \geq 13$

А) ОДЗ: $x > 7$

Б) $\ln^2(x-7) \geq 0$; если $x > 7 \Rightarrow x-6 > 1 \Rightarrow 13^{x-6} > 13$

Неравенство $13^{x-6} + \ln^2(x-7) \geq 13$ верно при $x > 7$

2. Решим второе неравенство системы: $7 + \sqrt{13-x} \leq 7^{x-12}$

А) ОДЗ: $x \leq 13$

Б) Оценим правую часть неравенства: $x \leq 13 \Rightarrow x-12 \leq 1 \Rightarrow 7^{x-12} \leq 7$

В) Оценим левую часть неравенства: $\sqrt{13-x} \geq 0 \Rightarrow 7 + \sqrt{13-x} \geq 7$

Неравенство выполняется, если обе части равны 7
 $x = 13$

3. Вернемся к системе: $\begin{cases} x > 7 \\ x = 13 \end{cases}$

система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Решение:

0

Если надо найти единственное решение применим метод «поиск симметричных корней» или метод инвариантности.

Переменная x присутствует в виде x^4 ; $|x|$; x^2 . Что общего у этих функций, то, что функции четные.

То есть если $x_1 \neq 0$ является решением, то и $-x_1 \neq 0$ является решением.

Тогда единственное решение будет при условии, что $x = 0$. Подставим его в каждое уравнение

$$\begin{cases} a = y + 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 + 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

$a = 4, a = 0$ (кандидаты в ответ)

При таких a , $x = 0$ является решением, но никто не гарантирует, что других нет. Проверим каждое из этих значений a .

$a = 0$

$$\begin{cases} 0 = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = |x| - 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = |x| - 2 \\ x^2 + (|x| - 2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + |x|^2 - 4|x| + 4 = 0$$

$$2|x|^2 - 4|x| = 0$$

$$2|x| * (|x| - 2) = 0$$

$$|x| = 0 \quad \text{или} \quad |x| - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad |x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

При $a = 0$ получим не одно значение x , а целых три. Это не удовлетворяет нашей задаче.

Рассмотрим $a=4$

$$\begin{cases} 4(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad (\text{выразим } y) \quad \begin{cases} y = 4x^4 + 4 + |x| - 2 \\ y = \pm\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

Так как из первого уравнения $y > 0$, то $y = \sqrt{4 - x^2}$

$$\begin{cases} y = 4x^4 + |x| + 2 \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

$$4x^4 + |x| + 2 = \sqrt{4 - x^2} \text{ применим метод мажорант}$$

$$x^4 \geq 0, |x| \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$$

$$4 - x^2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} \leq 2$$

Равенство возможно, если $y = 2$ (обязательно нужна проверка)

Надо подставить $y = 2$ в систему

$$\begin{cases} 4x^4 + |x| + 2 = 2 \\ \sqrt{4 - x^2} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| * (4|x|^3 + 1) = 0 \\ 4 - x^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ единственное решение

Ответ $a = 4$