*

Предел последовательности

Ковалева Ирина
Константиновна

- ***Что такое числовая последовательность?***
- ***Какие бывают виды числовых последовательностей?***
- ***Как задаётся числовая последовательность?***
- ***Что такое предел числовой последовательности?***
- ***Как находить предел числовой последовательности?***

Цели:

Узнать	Научиться

Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1; 4; 7; 10; 13; …

½; 1/3; ¼; 1/5; 1/6;

В порядке возрастания положительные нечетные числа

Увеличение на 3

10; 19; 37; 73; 145; …

Чередовать увеличение на 2 и увеличение в 2 раза

В порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1

1; 3; 5; 7; 9; …

6; 8; 16; 18; 36; …

5; 10; 15; 20; 25; …

В порядке возрастания положительные числа, кратные 5

Увеличение в 2 раза и уменьшение на 1

Ковалева Ирина Константиновна

Что такое числовая последовательность?

- Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят,
  что задана числовая последовательность.

Числовая последовательность – это функция, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел. Множество значений этой функции – совокупность чисел x_n, $n \in N$, называют множеством значений последовательности.

Ковалева Ирина
Константиновна

Способы задания последовательности

Словесн
ый

Аналитическ
ий

Рекуррентн
ый

Рекуррентный (от лат. слова *recurrens* – «возвращающийся»)

Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

- ***Пример 1. Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...***
- ***Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ...***
- ***Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...***

Аналитический способ.

- ***с помощью формулы.***
- ***Пример 1. Последовательность чётных чисел: $y = 2n$;***
- ***$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$.***
- ***Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел: $y = n^2$;***
- ***$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$.***
- ***Пример 3. Последовательность $y = 2n$;***
- ***$2, 22, 23, 24, \dots, 2n, \dots$.***

Рекуррентный способ.

- ***Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.***

- ***Пример 1.*** $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, ***где a и d – заданные числа. Пусть*** $a_1 = 5$, $d = 0,7$, ***тогда последовательность будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; … .***

- ***Пример 2.*** $b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n q$, ***где b и q – заданные числа. Пусть*** $b_1 = 23$, $q = ½$, ***тогда последовательность будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; … .***

Предел числовой последовательности

Рассмотрим две числовые последовательности:

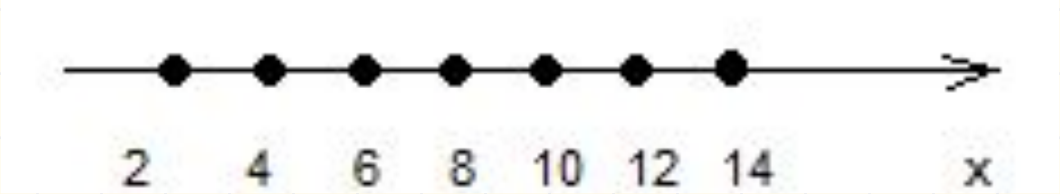
(x_n): 2, 4, 6, 8, 10, …, **2n** ,…;

(y_n): 1, , , , $\frac{1}{2}$, $\cdot\frac{1}{4}\cdot$ $\frac{1}{8}\cdots\frac{1}{16}$ $\frac{1}{2^n}$

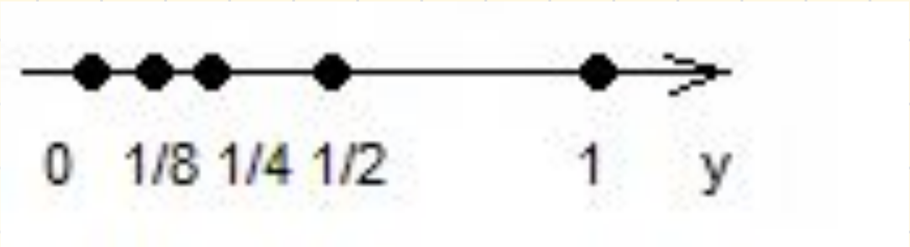
Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.

Ковалева Ирина
Константиновна



x_n



y_n

Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

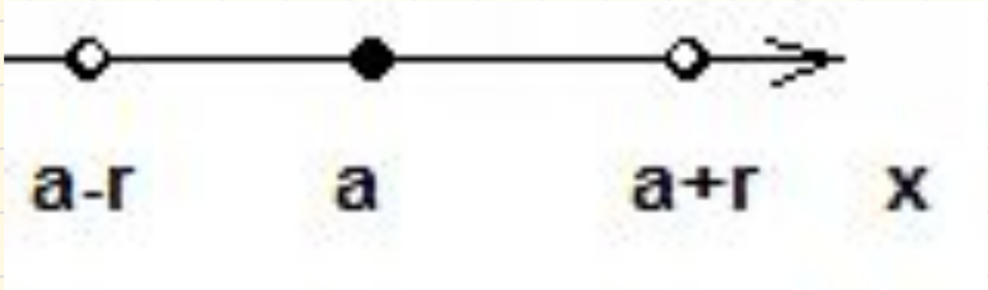
Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее…

Определение 1.

Пусть a - точка прямой, а r положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют окрестностью точки a,

а число r радиусом окрестности.

Геометрически это выглядит так:



Ковалева Ирина Константиновна

Например

(-0.1, 0.5) – окрестность точки 0.2, радиус окрестности равен 0. 3.

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали «*пределом последовательности*».

Число b называется пределом последовательности $\{y_n\}$ если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут: $y_n \to b$.

Читают: y_n стремится к b.

Либо пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.

Ковалева Ирина Константиновна

Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$ *– гармонический ряд*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

Если ***m***$\in$***N, k***$\in$***R, то***

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0}$$

Если $|q| < 1$***, то***

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = 0}$$

Если $|q| > 1$***, то последовательность*** $y_n = q^n$ ***расходится***

Ковалева Ирина Константиновна

Свойства пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$

1. *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c}$$

2. *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc}$$

3. *предел частного равен частному пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}}$$

4. *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb}$$

Ковалева Ирина Константиновна

Примеры:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot 0=0$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=$$

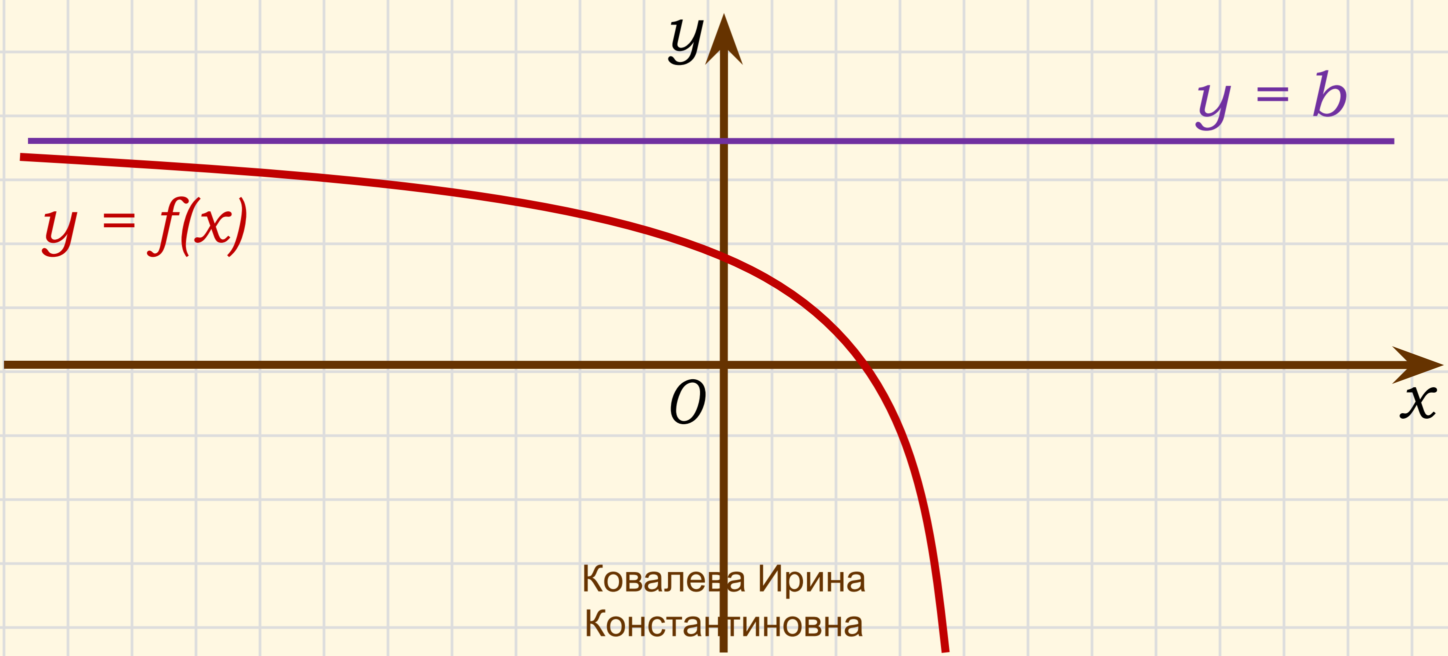
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

Ковалева Ирина
Константиновна

Горизонтальная асимптота графика функции

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n) = b}$$

Это равенство означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности $y_n = f(n)$, то есть графика функции $y = f(x)$, $x \in N$

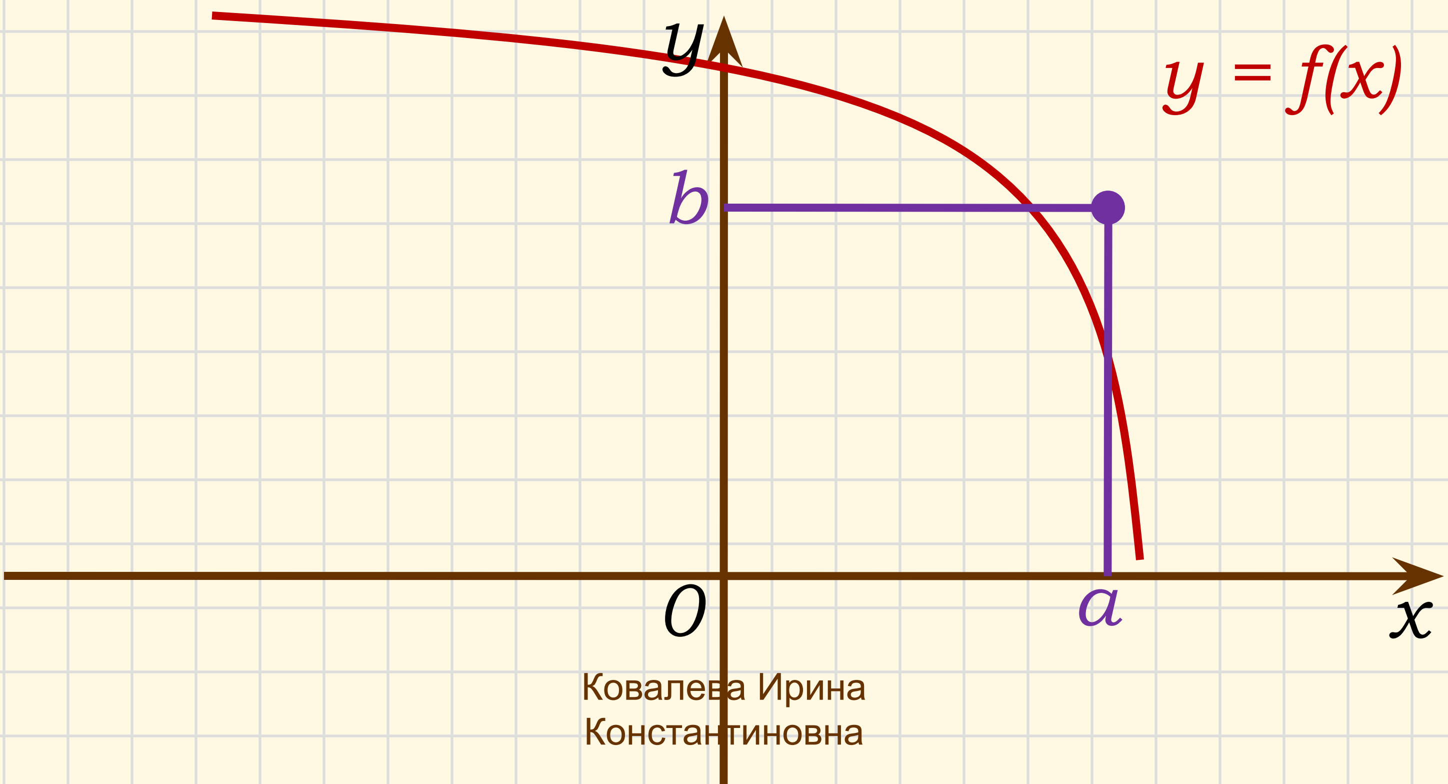


Ковалева Ирина Константиновна

Предел функции в точке

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Ковалева Ирина Константиновна

Непрерывность функции в точке

Функцию $y = f(x)$ *называют непрерывной в точке* $x = a$, *если выполняется условие*

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 2x^2 + 5x + 3\right) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \dfrac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \dfrac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x-3}{4} =$

$= \dfrac{-3-3}{4} = -\dfrac{6}{4} = -1{,}5$

Ковалева Ирина Константиновна

Понятие непрерывности функции

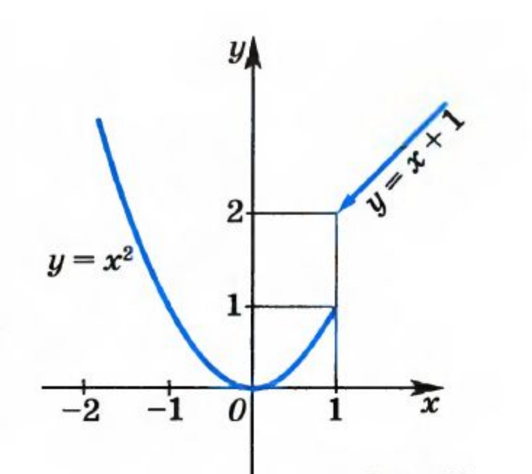


Рис. 36

На рисунке изображен график функции, состоящий из двух «кусков». Каждый из них может быть нарисован без отрыва от бумаги. Однако эти «куски» не соединены непрерывно в точке x =1.

Поэтому все значения x, кроме x =1, называют точками непрерывности функции y = f(x), а точку x =1 – точкой разрыва этой функции.

Ковалева Ирина Константиновна

Стр. 62-63 Свойства функций непрерывных на отрезке

- № 14, 16

Вычислить:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 - x + x^3}{2 + 2x - x^2}$

$$2)\ \lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4x + 7}{6x^2 - x + 5}$

Ковалева Ирина
Константиновна

4) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$