

# ПРОИЗВОДНАЯ

Бессонова Т.Д.

ВСОШ №7

Г. Мурманск

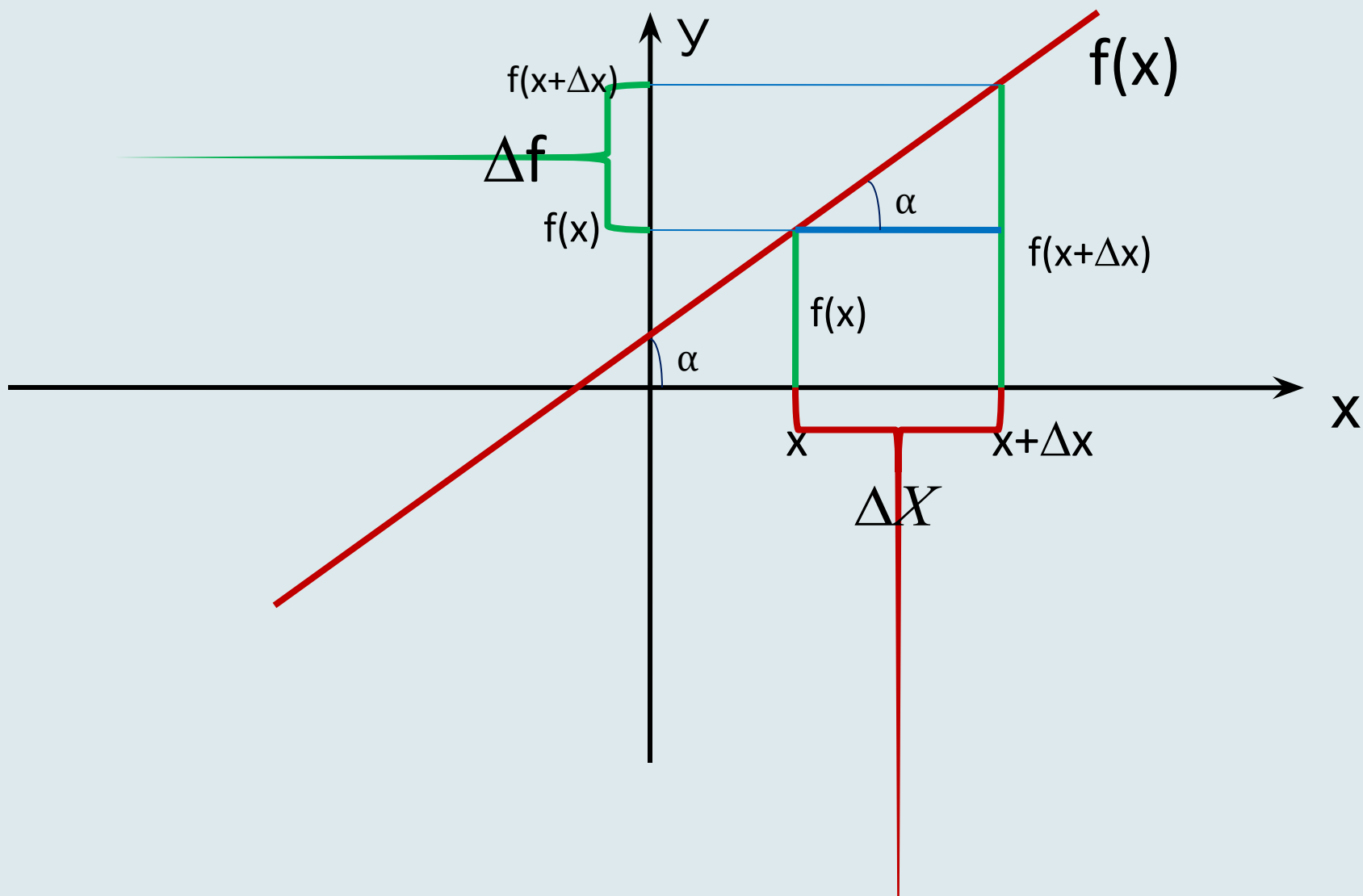


2008

# Структура изучения темы

- Приращение аргумента, приращение функции
- Определение производной
- Нахождение производной по определению
- Формулы дифференцирования
- Уравнение касательной
- Геометрический смысл производной
- Механический смысл производной

# Приращение функции $\Delta f$ и приращение аргумента $\Delta X$



# Определение производной

Производной функции в данной точке

называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Происхождение терминов

Термин «производная» - буквально перевод французского слова *derivee*.

1797г – Ж.Лагранж ввел современные обозначения

$$y', f'(x)$$

И.Ньютон называл производную флюксийей, а саму функцию – флюентой.

Г.Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную как

$$\frac{df}{dx}$$

Термин «предел» (*lim* – сокращение латинского слова *limes* (межа, граница)) ввел И.Ньютон.

# Алгоритм отыскания производной

- Дана функция  $y = f(x)$
- Зафиксировать значение  $x$ , найти  $f(x)$ .
- Дать аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ ,  
перейти в новую точку  $(x + \Delta x)$ , найти  $f(x + \Delta x)$
- Найти приращение функции:  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$
- Составить отношение приращения функции к  
приращению аргумента

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Предел такого отношения вычисляется при условии, что приращение аргумента стремится к нулю и является производной функции

$\Delta x \rightarrow 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Пример нахождения производной по определению

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x$$

# Формулы дифференцирования

Функция      производная

$$C \quad 0$$

$$X \quad 1$$

$$X^n \quad nX^{n-1}$$

$$\sqrt{X} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$u + v \quad u' + v'$$

$$u * v \quad u'v + uv'$$

$$\frac{u}{v} \quad \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Функция

производная

$$\sin \alpha \quad \cos \alpha$$

$$\cos \alpha \quad -\sin \alpha$$

$$tg \alpha \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

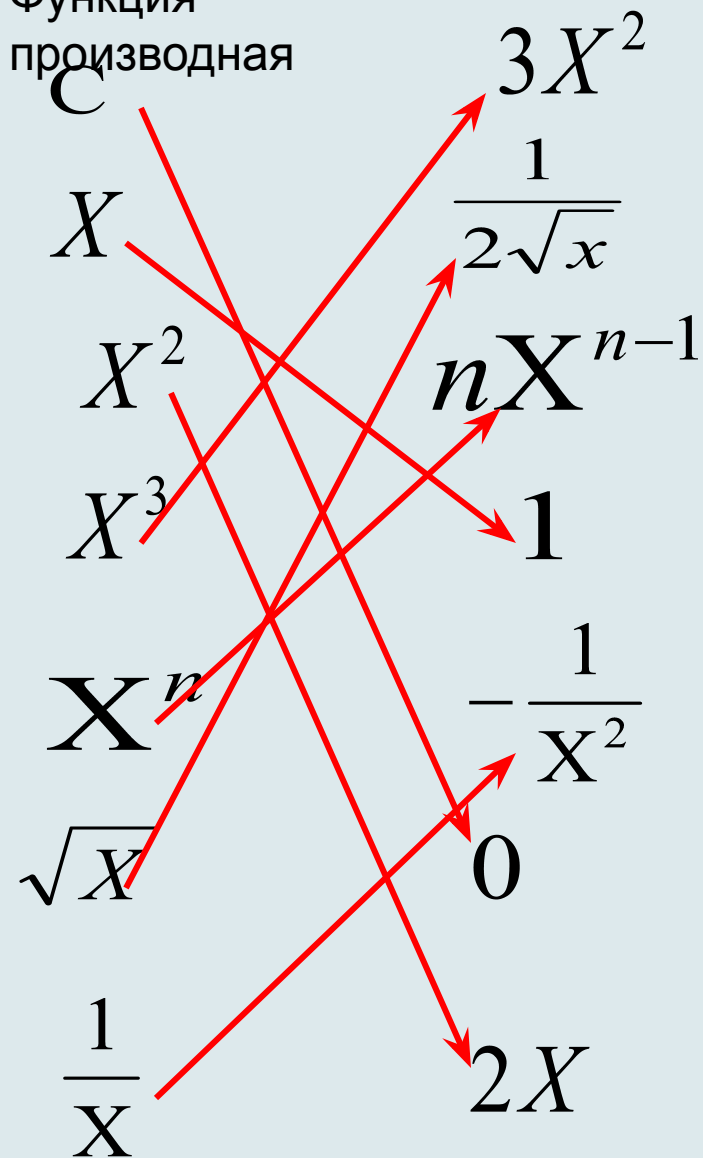
$$ctg \alpha \quad -\frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$g(f(\chi)) \quad g'(f(\chi)) * f'(\chi)$$

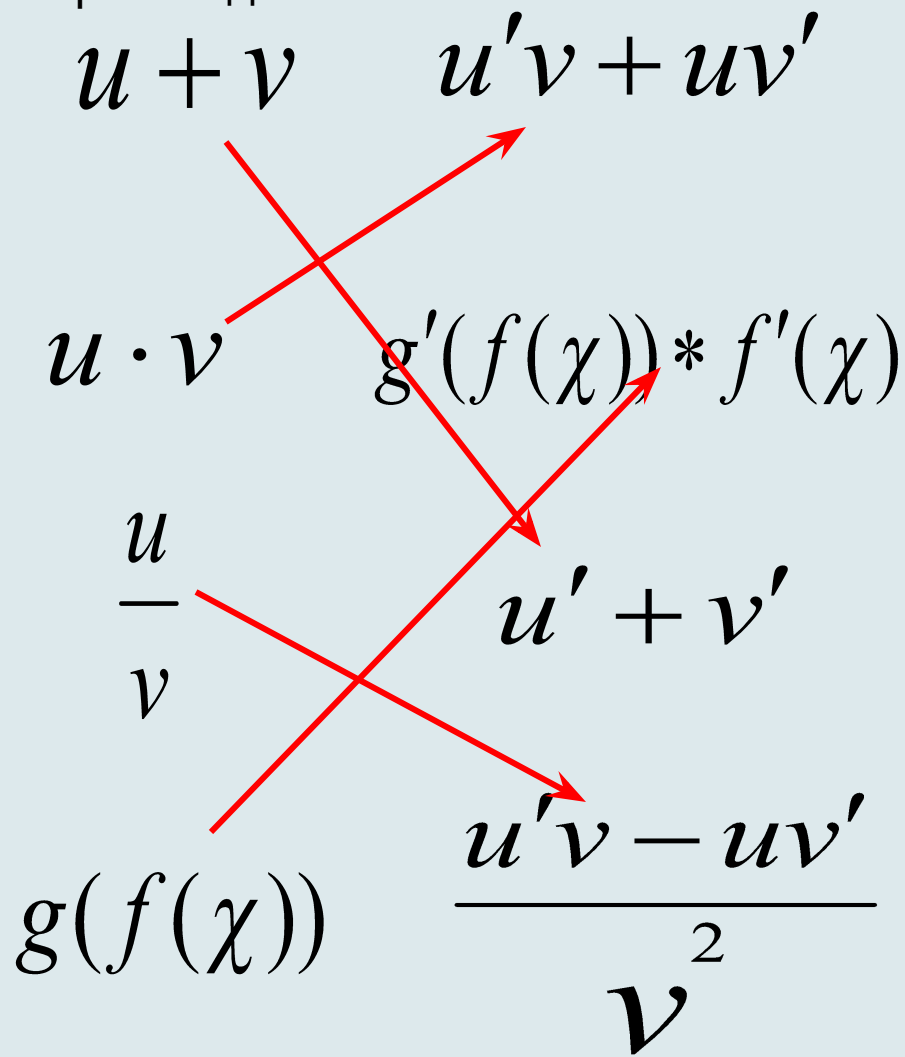


# Поставьте соответствие

Функция  
производная



Функция  
производная



# Найти производную функции

## Самостоятельная работа

- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7$
- $f(x) = 7x^5 - 9x^3 + 3x - 3,5$
- $f(x) = (x^3 - 2x)(x^2 + 3)$
- $f(x) = \frac{x^2 - 5}{2x + 4}$

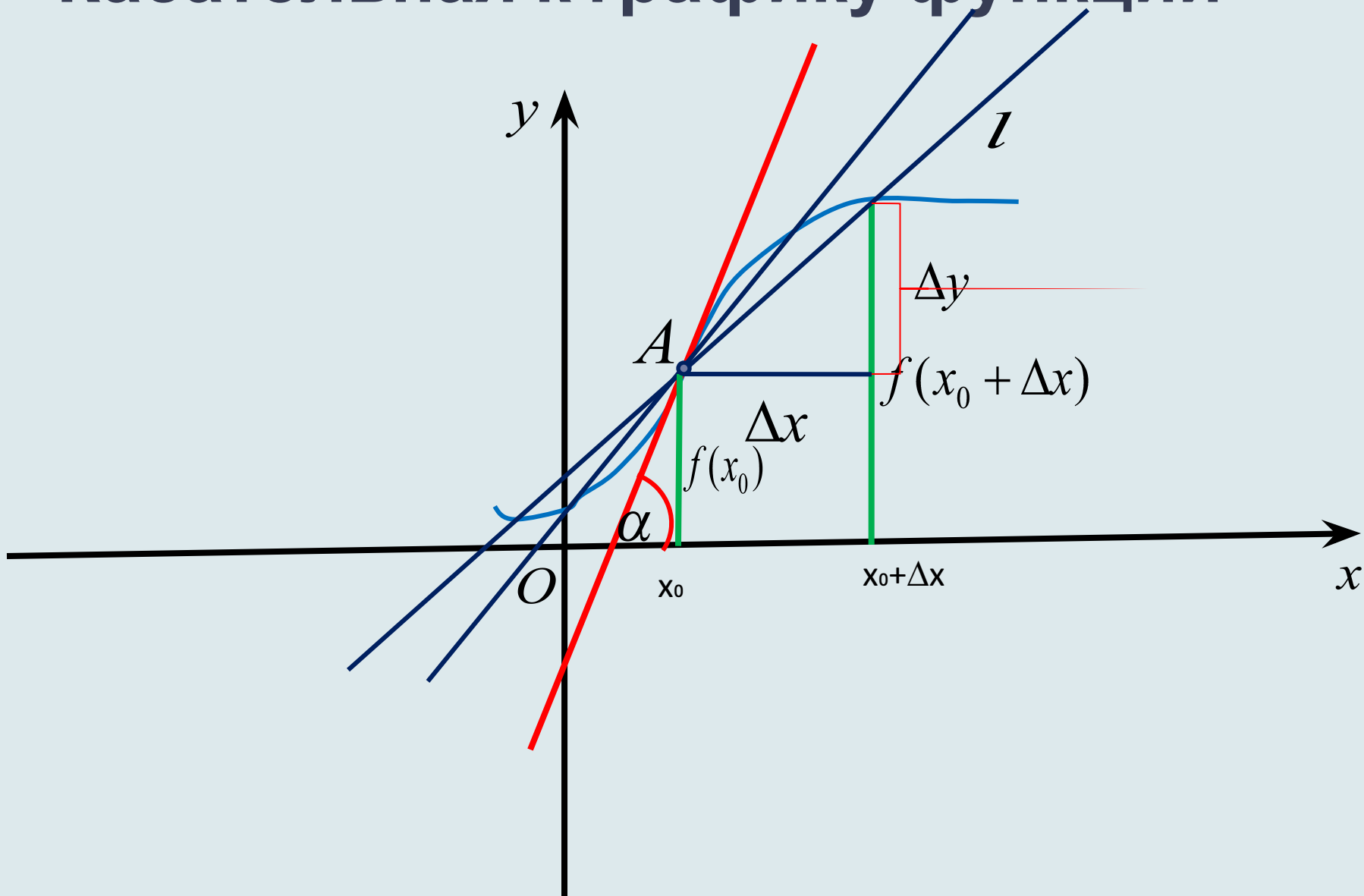
# ОТВЕТЫ

- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$
- $f'(x) = 35x^4 - 27x^2 + 3$
- $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 6$
  
- $f'(x) = \frac{2x^2 + 8x + 10}{(2x + 4)^2}$

# Критерии оценок

- «5» - без ошибок;
- «4» - 3 задания решены верно;
- «3» - 2 задания решены верно;

# Касательная к графику функции



# Геометрический смысл производной

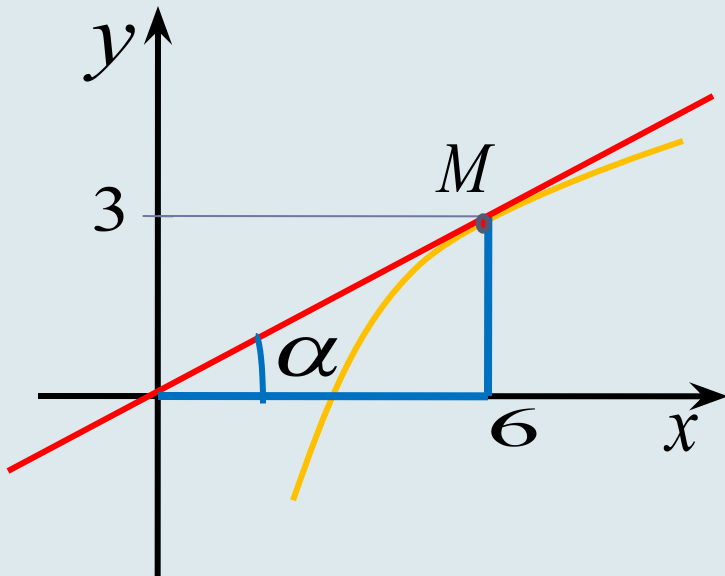
## Геометрический смысл производной

состоит в том, что значение производной функции  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой  $x_0$ :

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

# Решить задачу

- Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции  $y = f(x)$  в точке  $M(6;3)$ . Найдите  $f'(6)$ .



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\operatorname{tg} \alpha > 0$$

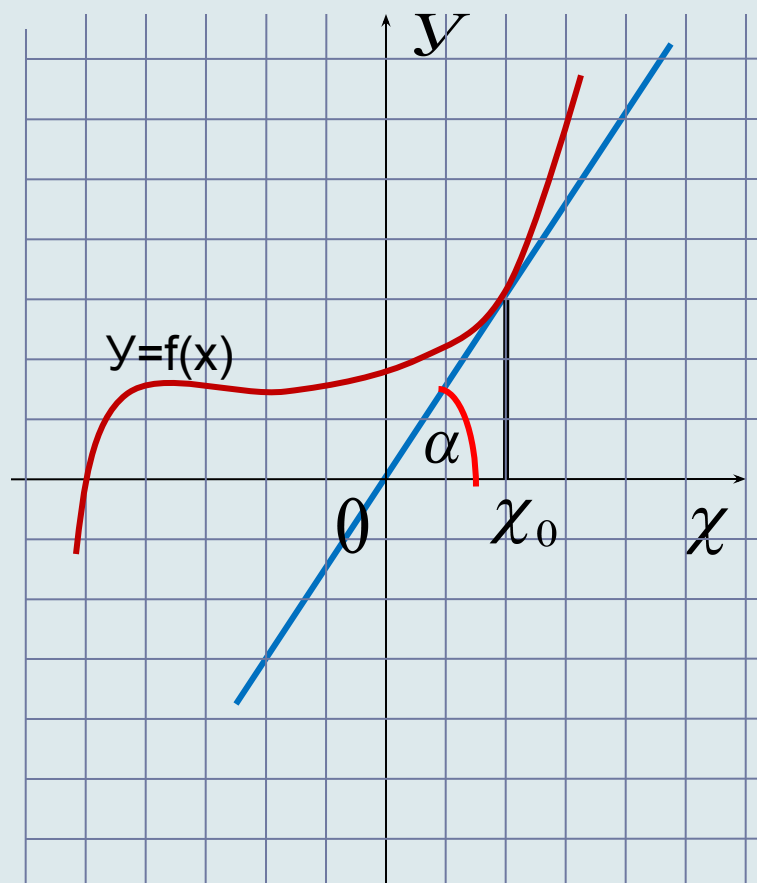


Рис а

$$\operatorname{tg} \alpha < 0$$

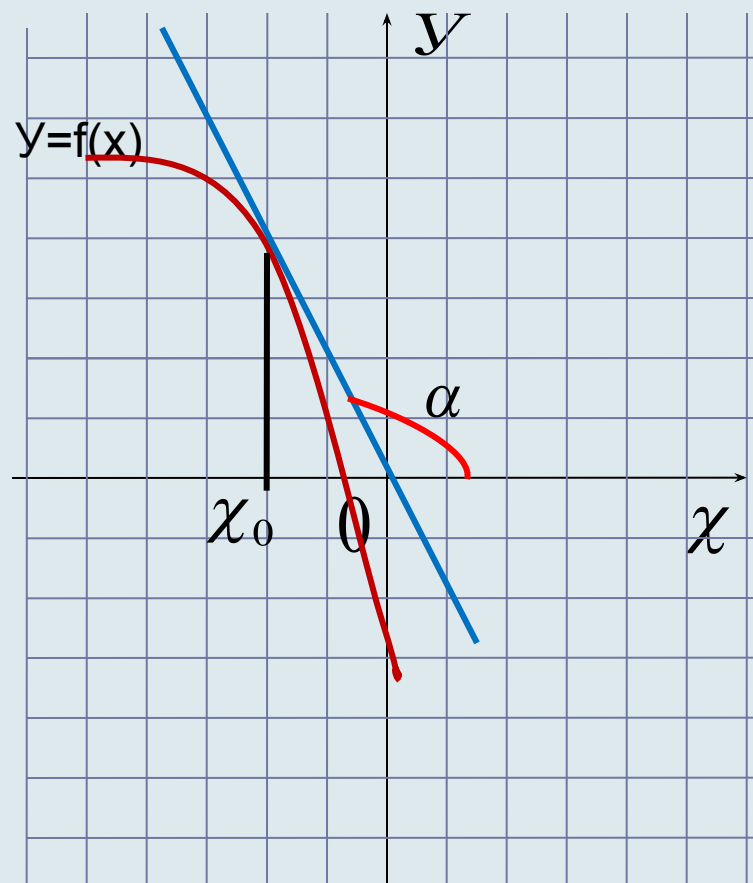


Рис б

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ .



# Уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = kx + b$$

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

Найти уравнение касательной к  
графику функции

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad x_0 = 2$$

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 * 2^2 + 1 = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 3 * 2^2 - 4 * 2 = 4$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = 1 + 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 7$$

# Механический смысл производной

$$y = f(x)$$

$$f'(x) \quad \text{скорость}$$

$$f''(x) \quad \text{ускорение}$$

# Задача

Точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 2t^3 - 3t$

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени  $t$ ;

б) в момент времени  $t=2c$ .

Решение.

$$\text{а) } v(t) = s'(t) = (2t^3 - 3t)' = 2 * 3t^2 - 3 * 1 = 6t^2 - 3$$

$$\text{б) } v(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(\text{м} / \text{с})$$

## Задача №268

- Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t)=t^3-4t^2$
- Найдите скорость и ускорение в момент времени  $t=5$ с.

(Перемещение измеряется в метрах)

$$v(t) = (x(t))' = 3t^2 - 4 * 2t = 3t^2 - 8t$$

$$v(5) = 3 * 5^2 - 8 * 5 = 75 - 40 = 35(\text{м/с})$$

$$a(t) = (v(t))' = (3t^2 - 8t)' = 6t - 8$$

$$a(5) = 6 * 5 - 8 = 22(\text{м/с}^2)$$

# Литература

- Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразоват. учреждений.-6-е изд. – М: Мнемозина, 2005.
- Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, 2004.

