

СПРАВОЧНИК
по алгебре и началам анализа
10-11 классы

2009 г

Содержание.

- 1-3. *Содержание*
4. *Числовая окружность.*
5. *Числовая окружность на координатной плоскости*
6. *Синус и косинус.*
7. *Тангенс и котангенс.*
8. *Тригонометрические функции числового аргумента*
9. *Тригонометрические функции углового аргумента*
10. *Формулы приведения.*
11. *Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов.*
12. *Формулы преобразования тригонометрических функций.*
13. *Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.*
14. *Формулы двойного угла. . Формулы понижения степени.*
15. *Формулы половинного аргумента.*
16. *Универсальная подстановка*

Содержание

17. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения.
18. Формула дополнительного угла
19. Арксинус. Арккосинус. Арктангенс. Арккотангенс
20. Решение простейших тригонометрических уравнений
21. Однородные тригонометрические уравнения.
22. Решение однородных тригонометрических уравнений.
23. Введение вспомогательного угла.
24. Решение тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x < a$.
25. Решение тригонометрических неравенств вида $\cos x > a$, $\cos x < a$.
26. Решение тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$.
27. Решение уравнений и неравенств.
28. Решение уравнений и неравенств .
29. Решение неравенств с помощью систем.
30. Решение неравенств с помощью систем.

Тригонометрия.

Числовая окружность

Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

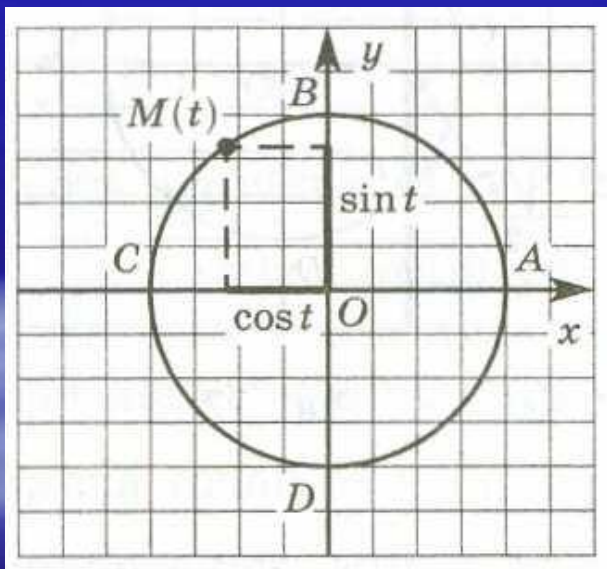
1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной t . Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

3) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A ; $A = A(0)$. Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть числовой окружностью.

Синус и косинус

Если точка M числовой окружности соответствует числу t , то абсциссу точки M называют косинусом числа t и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют синусом числа t и обозначают $\sin t$.



если $M(t)=M(x; y)$, то

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

Тангенс и котангенс

Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют тангенсом числа t и обозначают $\operatorname{tg} t$.

Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют котангенсом числа t и обозначают $\operatorname{ctg} t$.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq \frac{\pi}{2} + \pi, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq \pi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тригонометрические функции числового аргумента.

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1;$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq \frac{\pi}{2} + \pi, \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq \pi, \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1 \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq \frac{\pi}{2}, \in \mathbb{R};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq \frac{\pi}{2} + \pi, \in \mathbb{R};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq \pi, \in \mathbb{R};$$

Тригонометрические функции углового аргумента

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Угол в один радиан - это угол, опирающийся на дугу длиной 1, т.е. на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

$$1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ$$

Формулы приведения.

Функ ция	Аргумент						
	α	$90^\circ - \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ + \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов.

Функ ция	Аргумент						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Формулы преобразования тригонометрических функций

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tgy}};$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tgy}}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tgy}}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; x \neq \pm \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

Формулы половинного угла

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Универсальная подстановка

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \qquad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \sin y}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} \qquad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$$

*Преобразование выражения
 $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin (x+t)$
Формула дополнительного угла*

$$A \sin x + B \cos x = C \sin (x+t),$$

$$\text{где } \begin{cases} \sin t = \frac{B}{C}, \\ \cos t = \frac{A}{C}, \end{cases} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2};$$

Тригонометрические функции числового аргумента.

Арксинус.

Арккосинус. Арктангенс. Арккотангенс

Арксинусом числа a называется такое число

из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Арккосинусом числа a называется такое число

из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Арктангенсом числа a называется такое число

из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Арккотангенсом числа a называется такое число

из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение $f(x) = a$, где a данное число, а $f(x)$ – одна из основных тригонометрических функций, называют простейшим тригонометрическим уравнением.

$$\sin x = a, |a| \leq 1, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a, |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a, x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a, x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени;

уравнение вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \cos f(x) + c \cos^2 f(x) = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени;

1. Уравнения вида $a \operatorname{ctg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ приводятся к квадратному уравнению одной тригонометрической функции путем замены

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Решение однородных тригонометрических уравнений.

2. Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$)

решается делением обеих его частей на $\cos x$, $\cos x \neq 0$.

В результате получается уравнение вида

$$a \operatorname{tg} x + b = 0.$$

3. Уравнение вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \cos f(x) + c \cos^2 f(x) = 0$
($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)

решается делением обеих его частей на $\cos^2 f(x)$, $\cos^2 f(x) \neq 0$.

В результате получается уравнение вида $a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} f(x) + c = 0$.

4. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид

$$b \sin f(x) \cos f(x) + c \cos^2 f(x) = 0,$$

решается разложением левой части на множители:

$$\cos f(x)(b \sin f(x) + c \cos f(x)) = 0.$$

Решение тригонометрических уравнений.

Введение вспомогательного угла.

$A \sin x + B \cos x = C$, где A, B, C – данные числа и $AB \neq 0$.

Так как

$A^2 + B^2 > 0$, то разделив обе части уравнения на число

$\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$, получим $a \sin x + b \cos x = c$, где

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как $a^2 + b^2 = 1$, то можно подобрать такой угол α , что

$$a = \sin \alpha \text{ и } b = \cos \alpha;$$

$$\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = c \text{ или } \cos(x - \alpha) = c.$$

Если подобрать такой угол β , что $a = \cos \beta$ и $b = \sin \beta$, то уравнение можно записать в виде $\sin(x + \beta) = c$.

Решение тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x < a$.

1. Неравенства, содержащие переменную только под знаком тригонометрической функции, называют тригонометрическими.
2. При решении тригонометрических неравенств используют свойство монотонности тригонометрических функций, а также промежутки их знакопостоянства.
3. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, ($\sin x < a$.) используют единичную окружность или график функции $y = \sin x$.
4. Важным моментом является знание ,что

$$\sin x = 0, \text{ если } x = \pi n, n \in Z;$$

$$\sin x = -1, \text{ если } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin x = 1, \text{ если } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin x > 0, \text{ если } 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin x < 0, \text{ если } -\pi + 2\pi n < x < 2\pi n, n \in Z;$$

Решение тригонометрических неравенств вида $\cos x > a$, $\cos x < a$.

1. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\cos x > a$, ($\cos x < a$.) используют единичную окружность или график функции $y = \cos x$.
2. Важным моментом является знание ,что

$$\cos x = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = -1, \text{ если } x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = 1, \text{ если } x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x > 0, \text{ если } 2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x < 0, \text{ если } 2\pi n + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

Решение тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$.

1. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, ($\operatorname{tg} x < a$.) используют единичную окружность или график функции $y = \operatorname{tg} x$.

4. Важным моментом является знание ,что

$$\operatorname{tg} x > 0 \text{ если } \pi x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x < 0 \text{ если } \pi - \frac{\pi}{2} x < \pi n, \quad \mathbb{Z};$$

Тангенс не существует, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решение уравнений и неравенств

1. Для любого четного числа $2m$ ($m \in \mathbb{N}$) уравнение $\sqrt[2m]{f(x)} = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2m} \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

2. Для любого четного числа $2m$, $m \in \mathbb{N}$ уравнение $\sqrt[2m]{f(x)} = \sqrt[2m]{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

3. Уравнение $f(\varphi(x)) = \varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ – область существования функции $\varphi(x)$.

Решение уравнений и неравенств

4. Множество решений уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$
есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ x \in D(f_2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_2(x) = 0 \\ x \in D(f_1) \end{cases}$$

где $D(f_1)$ – область существования функции $f_1(x)$,
а $D(f_2)$ – область существования функции $f_2(x)$.

5. Уравнение $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Замечание: иногда при решении уравнения приходится применять несколько преобразований, приводящих к системе, равносильной исходному уравнению.

Решение неравенств с помощью систем.

1. Для любого четного числа $2m$ ($m \in \mathbb{N}$) неравенство $\sqrt[2m]{f(x)} < g(x)$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2m} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. Для любого четного числа $2m$, $m \in \mathbb{N}$ множество решений

неравенства $\sqrt[2m]{f(x)} > \sqrt[2m]{g(x)}$

есть объединение множеств решений систем

$$\begin{cases} f(x) > (g(x))^{2m} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

3. Для любого четного числа $2m$ ($m \in \mathbb{N}$) неравенство $\sqrt[2m]{f(x)} < \sqrt[2m]{g(x)}$

равносильно двойному неравенству

$$0 \leq f(x) < g(x)$$

4. Уравнение $f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) > 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ – область существования функции $\varphi(x)$.

Решение неравенств с помощью систем.

4. Множество решений каждого из неравенств

$$f_1(x) \cdot f_2(x) > 0 \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

5. Множество решений каждого из неравенств

$$f_1(x) \cdot f_2(x) < 0 \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$