

Алгебра высказываний

Решение логических задач

Автор:

Сергеев

Евгений Викторович

МОУ СОШ №4 г. Миньяра

Челябинской области

sergeev73@mail.ru

<http://shk4-minyara.ucoz.ru>

Задача 1: Составьте сложное высказывание в словесной форме из простых, заданных математическим формулировкам:

- Высказывание А:

«Учащийся Иванов хорошо успевает по английскому языку»

- Высказывание В:

«Учащийся Иванов любит работать на компьютере».

$$\neg(A \wedge B)$$

«не (учащийся Иванов хорошо успевает по английскому языку и любит работать на компьютере)» =
«Учащийся Иванов не хорошо успевает по английскому языку и не любит работать на компьютере»

Задача 2:

Пусть p и q обозначают высказывания:

$p =$ «Я учусь в школе»

$q =$ «Я люблю информатику»

составьте и запишите следующие высказывания:

$\neg p \wedge q$

$p \wedge \neg q$

«Я не учусь в школе»

«не(Я не учусь в школе)» \equiv «Я учусь в школе»

«Я учусь в школе и люблю информатику»

«Я учусь в школе и не люблю информатику»

«Я учусь в школе или люблю информатику»

«Я не учусь в школе или люблю информатику»

«Я не учусь в школе или я не люблю
информатику»

«Я люблю информатику, потому, что учусь в

Задача 3:

Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите высказывания на формальном языке алгебры высказываний

1. 45 кратно 3 и 42 кратно 3
2. 45 кратно 3 и 12 не кратно 3
3. $2 \leq 5$
4. если 212 делится на 3 и на 4, то 212 делится на 12
5. 212 – трехзначное число, которое делится на 3 и на 4

1. $A \wedge B$, где $A = \text{«45 кратно 3»}$, $B = \text{«42 кратно 3»}$
2. $A \wedge \neg B$, где $A = \text{«45 кратно 3»}$, $B = \text{«12 кратно 3»}$
3. $A \vee B$, где $A = \text{«2 < 5»}$, $B = \text{«2 = 5»}$
4. $(A \wedge B) \rightarrow C$, где $A = \text{«212 делится на 3»}$,
 $B = \text{«212 делится на 4»}$ и $C = \text{«212 делится на 12»}$
5. $A \wedge B \wedge C$, где $A = \text{«212 – трехзначное число»}$, $B =$
 $\text{«212 делится на 3»}$ и $C = \text{«212 делится на 4»}$

Задача 4:

Составьте таблицу истинности для функции $A \vee \neg B$

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Задача 5:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Какие из следующих импликаций истинны

- | | |
|---------------------------------------|---------------|
| 1. если $2 \times 2 = 4$, то $2 < 3$ | истина |
| 2. если $2 \times 2 = 4$, то $2 > 3$ | ложь |
| 3. если $2 \times 2 = 5$, то $2 < 3$ | истина |
| 4. если $2 \times 2 = 5$, то $2 > 3$ | истина |

Задача 6:

Какие из следующих высказываний
противоречивы

- | | | |
|----|-------------------------|---------------|
| 1. | $a = 1, a \wedge b = 0$ | ИСТИНА |
| 2. | $a = 1, a \vee b = 0$ | ЛОЖЬ |
| 3. | $a = 1, a \wedge b = 1$ | ИСТИНА |
| 4. | $a = 1, a \vee b = 1$ | ИСТИНА |
| 5. | $a = 0, a \wedge b = 1$ | ЛОЖЬ |
| 6. | $a = 0, a \vee b = 1$ | ИСТИНА |
| 7. | $a = 0, a \wedge b = 0$ | ИСТИНА |
| 8. | $a = 0, a \vee b = 0$ | ИСТИНА |

Задача 7:

Пусть:

$a = \langle 7 - \text{простое} \rangle$, $b = \langle 7 - \text{составное} \rangle$,

$c = \langle 8 - \text{простое} \rangle$ и $d = \langle 8 - \text{составное} \rangle$

Определите истинность высказываний

9. $a \wedge b \vee c \vee c$ **ЛОЖЬНА**

10. $a \wedge b \vee d \vee d$ **ИСТИНА**

13. $b \vee c \vee c \vee c$ **ЛОЖЬНА**

18. $c \wedge d \vee d \vee d$ **ЛОЖЬНА**

Задача 8:

Какие из следующих высказываний истинны

- | | | |
|-----|--|--------|
| 8. | $p \neg(p \wedge (p \Leftrightarrow \neg p))$ | ИСТИНА |
| 9. | $p(p \rightarrow p) \vee \neg p$ | ИСТИНА |
| 10. | $\neg(p \Leftrightarrow p) (\neg p \rightarrow p \wedge$ | ИСТИНА |
| 4. | $p \Rightarrow \neg p$ | ЛОЖЬ |
| 15. | $\neg p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \neg p)$ | ЛОЖЬ |
| 10. | $p \Leftrightarrow (p \rightarrow p)$ | ИСТИНА |
| 13. | $(p \rightarrow p) \rightarrow p$ | ИСТИНА |
| 14. | $(p \vee p) \rightarrow (p \wedge p)$ | |

Задача 9:

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

1. $x \wedge (y \wedge z)$

2. $(x \wedge y) \wedge z$

3. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$

4. $x \wedge y \rightarrow z$

5. $(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg y)$

6. $((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$

Задача 9.1:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$x \wedge (y \wedge z)$$

$$x \wedge (1 \wedge 1)$$

$$x \wedge 1$$

$$0 \wedge 1$$

$$0 \text{ (ЛОЖЬ)}$$

Задача 9.2:

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$(x \wedge y) \wedge z$$

$$(0 \wedge 1) \wedge z$$

$$0 \wedge z$$

$$0 \wedge 1$$

$$0 \text{ (ЛОЖЬ)}$$

Задача 9.3:

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

$$x \rightarrow (1 \rightarrow 1)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$0 \rightarrow 1$$

1 (истина)

Задача 9.4:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Даны значения: $x = 0, y = 1, z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$x \wedge y \rightarrow z$$

$$0 \wedge 1 \rightarrow z$$

$$0 \rightarrow z$$

$$0 \rightarrow 1$$

1 (истина)

Задача 9.5:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg y)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg 1)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee 0)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee 0)$$

$$(0 \wedge 1) \Leftrightarrow (1 \vee 0)$$

$$0 \Leftrightarrow 1$$

0 (ЛОЖЬ)

Задача 9.6:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Даны значения: $x = 0, y = 1, z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

$$((0 \vee 1) \wedge z) \Leftrightarrow ((0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1))$$

$$((1) \wedge z) \Leftrightarrow ((0) \vee (1))$$

$$(1 \wedge 1) \Leftrightarrow (0 \vee 1)$$

$$1 \Leftrightarrow 1$$

Задача 10:

Упростите выражение:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (1)$$

$$A$$

Задача 11:

Упростите выражение:

$$(A \vee \neg A) \wedge B$$

$$(A \vee \neg A) \wedge B$$

$$(1) \wedge B$$

$$B$$

Задача 12:

Упростите выражение:

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (1)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge 1 \text{ \{з-н поглощения\}}$$

$$A \wedge 1$$

$$A$$

Задача 13:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Доказать справедливость

закона поглощения для дизъюнкции:

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ по таблицам истинности

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Задача 14:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Доказать справедливость

закона поглощения для конъюнкции:

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ по таблицам истинности

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Задача 15:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Доказать справедливость

первого закона де Моргана: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

по таблицам истинности

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Задача 16:

Таблицы
ИСТИННОСТИ

Доказать справедливость

второго закона де Моргана: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

по таблицам истинности

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Задача 17:

Составить расписание занятий так, чтобы **математика** была **первым или вторым** уроком, **информатика** **первым или третьим** уроком, а **физика** – **вторым или третьим**.

В расписании всего три урока. Сколько вариантов расписания с такими условиями можно составить?

Задача 17. Решение

Пусть:

- $M1 = \text{«Математика первым уроком»}$
- $M2 = \text{«Математика вторым уроком»}$
- $I1 = \text{«Информатика первым уроком»}$
- $I3 = \text{«Информатика третьим уроком»}$
- $F2 = \text{«Физика вторым уроком»}$
- $F3 = \text{«Физика третьим уроком»}$

Тогда расписание можно свести к выражению:

$$(M1 \vee M2) \wedge (I1 \vee I3) \wedge (F2 \vee F3)$$

Задача 17. Решение. Раскрытие скобок

$$(M1 \vee M2) \wedge (И1 \vee И3) \wedge (\Phi2 \vee \Phi3)$$

$$(M1 \wedge И1 \vee M1 \wedge И3 \vee M2 \wedge И1 \vee M2 \wedge И3) \wedge (\Phi2 \vee \Phi3)$$

$$M1 \cdot И1 \cdot \Phi2 \vee M1 \cdot И3 \cdot \Phi2 \vee M2 \cdot И1 \cdot \Phi2 \vee M2 \cdot И3 \cdot \Phi2 \vee \\ M1 \cdot И1 \cdot \Phi3 \vee M1 \cdot И3 \cdot \Phi3 \vee M2 \cdot И1 \cdot \Phi3 \vee M2 \cdot И3 \cdot \Phi3$$

Выбираем только непротиворечивые комбинации:

Ответ:

1 вариант – Математика, Физика, Информатика

2 вариант – Информатика, Математика, Физика

Задача 18:

В одной из смежных аудиторий может быть либо кабинет информатики, либо кабинет физики.

На одной двери написано: **«В одном из этих двух кабинетов точно есть кабинет информатики»**, а на двери другого: **«Кабинет информатики не здесь»**.

Известно также, что высказывания на табличках тождественны.

Определить, где какой кабинет

Задача 18. Решение

Пусть:

A = «Информатика в кабинете 1»,

B = «Информатика в кабинете 2»

Тогда:

$\neg A$ = «Физика в кабинете 1»,

$\neg B$ = «Физика в кабинете 2»

Высказывание *«В одном из этих двух кабинетов точно есть кабинет информатики»*: $X = A \vee B$,

Высказывание *«Кабинет информатики не здесь»*: $Y = \neg A$

Исходя из условия: $X \Leftrightarrow Y$, т.е.

$$Y = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \Rightarrow (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \vee \neg Y$$

Заменяем X и Y их выражениями:

$$(\neg(A \vee B) \vee \neg A) \wedge (\neg(\neg A) \vee (A \vee B)) \vee \neg(\neg A)$$

Задача 18. Решение (продолжение)

$$((\neg(A \vee B)) \vee \neg A) \wedge ((\neg(\neg A)) \vee (A \vee B)) \vee \neg(\neg A)$$

Упрощаем выражение:

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A) \wedge (A \vee (A \vee B)) \vee A \Rightarrow$$

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A) \wedge (A \vee (A \vee B)) \vee A \Rightarrow$$

$$((\neg A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \wedge (A \vee A \vee B \vee A) \Rightarrow$$

$$(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg A)) \wedge (A \vee B) \Rightarrow$$

$$\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow$$

$$(\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow$$

$$\neg A \wedge B$$

Т.о. выражение $\neg A \wedge B$ соответствует высказыванию:

«Физика в кабинете 1 и информатика в кабинете 2»

Задача 19.

Следователь допрашивает Клода, Жака и Дика.

Клод утверждает, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик призывает не слушать ни того, ни другого.

Кто из допрашиваемых говорил правду?

Решение:

Пусть показания свидетелей будут называться буквами **К**, **Ж** и **Д**. Тогда известно, что:

1. Если Клод сказал правду (**К**), то Жак лжет (**¬Ж**), иначе (если Клод солгал, **¬К**), то Жак сказал правду (**Ж**)
2. Если Жак сказал правду (**Ж**), тогда Дик не прав, (**¬Д**), иначе лжет Жак (**¬Ж**), а Дик – прав (**Д**)
3. Если лжет Дик (**Д**), то Клод и Жак правы (**Ж и К**), иначе последние лгут (**¬(Ж и К)**), а Дик – прав (**Д**)

Задача 19. Решение

Выразим эти высказывания на формальном языке логики:

1. $K \wedge \neg J \vee \neg K \wedge J$
2. $J \wedge \neg D \vee \neg J \wedge D$
3. $D \wedge \neg K \wedge \neg J \vee \neg D \wedge (K \vee J)$

Задача будет решена, если все три высказывания будут истинны, т.е. истинна их конъюнкция:

$$(K \cdot (\neg J \vee J) \vee (\neg K \cdot J)) \cdot (J \cdot (\neg D \vee D) \vee (\neg J \cdot D)) \cdot (D \cdot (\neg K \wedge \neg J) \vee (\neg D \cdot (K \vee J)))$$
$$((K \vee \neg K) \cdot J \cdot \neg D \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \vee \neg K \cdot J \cdot \neg J \cdot D) \wedge$$
$$\wedge (D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot K \vee \neg D \cdot J)$$

$$(K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D) \wedge (D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot K \vee \neg D \cdot J)$$

$$(K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot \neg D \cdot J \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot \neg D \cdot J \vee \vee$$
$$\neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \vee$$
$$\vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J$$

$$\neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \equiv \neg K \wedge \neg D \wedge J$$

Итак, только Жак говорил правду

Задача 20.

Нерадивый студент сдает компьютерный тест. Все ответы сводятся к ответам типа «Да» или «Нет». Один правильный ответ – один балл. Студенту известно, что:

- Первый и последний ответы противоположны
- Второй и четвертый ответы одинаковы
- Хотя бы один из первых двух ответов – «Да»
- Если четвертый ответ «Да», то пятый – «Нет»
- Ответов «Да» больше, чем ответов «Нет»

Требуется получить 4 или более баллов

Задача 20. Решение

Пусть:

- A. Первый ответ «Да»
- B. Вторым ответ «Да»
- C. Третий ответ «Да»
- D. Четвертый ответ «Да»
- E. Пятый ответ «Да»

Тогда:

1. $A \wedge \neg E$
2. $B \wedge D$
3. $A \vee B$
4. $D \rightarrow \neg E \equiv \neg D \vee \neg E$

Отсюда:

$$\begin{aligned} & (A \wedge \neg E) \wedge (B \wedge D) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \wedge (A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \wedge (A \neg D \vee A \neg E \vee B \neg D \vee B \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \vee A \neg E B D \Rightarrow \mathbf{A \neg E B D} \end{aligned}$$

Таблицы истинности

1
2
3
4
5
6
7
8
9
9.
1
9.
2
9.
3
9.
4

Конъюнкция

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1

Дизъюнкция

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1

Импликация

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1

Эквиваленция

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24