15. Биномиальное распределение

Случайная величина X называется распределенной по <u>биномиальному закону</u> с параметрами n,p >0, если X принимает значения: 0,1,2,…n и вероятность того, что случайная величина примет значение X=m находится по формуле Бернулли:

$$p(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

где *q=1-p.*

Случайную величину *X*, распределенную по биномиальному закону, можно трактовать следующим образом:

Рассмотрим событие *A*, которое происходит в опыте с вероятностью *p* и не происходит с вероятностью *q=1-p*. Производится серия из n опытов в одинаковых условиях и независимо друг от друга. Случайная величина *X* - сколько раз событие *A* произошло в данной серии опытов.

ПРИМЕР.

Составить ряд распределения величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n=4$, $p=1/3$.

Решение:

Производится серия из n=4 опытов. Случайная величина X - число опытов, в которых может произойти событие А, может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Соответствующие вероятности находятся по формуле Бернулли при n=4, p=1/3, q=1-1/3=2/3.

$$p(X=m)=C_4^m\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4-m}$$

Вероятность того, что событие А не произойдет ни в одном опыте (m=0):

$$p(X=0)=C_4^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

Вероятность того, что событие А произойдет в одном опыте (m=1):

$$p(X=1)=C_4^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

Аналогично находим вероятности того, что это событие произойдет в двух (m=2), в трех (m=3) и в четырех (m=4) опытах:

$$p(X=2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$p(X=3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

$$p(X=4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины X будет выглядеть так:

X_m	0	1	2	3	4
P_m	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

Можно убедиться, что суммарная вероятность действительно равна 1.

Найдем математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

X - число опытов в серии из n, в которых произошло событие A.

Введем для каждого i=1,2…n случайную величину Z_i .

Пусть Z_i принимает всего два значения: 1 - если событие A произойдет в i-ом опыте и 0 - если событие A не произойдет в i-ом опыте.

Тогда событие X выразится через сумму событий Z_i :

$$X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Zn$$

Тогда математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X]=M[Z_1]+M[Z_2]+\ldots+M[Z_n]$$

Найдем математическое ожидание Z_i

Ряд распределения Z_i имеет вид:

Z_i	*0*	*1*
P_i	*q*	*p*

Тогда $M[Z_i]=p$ и $M[X]=np$.

Найдем дисперсию случайной величины Z_i

$$D[Z_i] = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = pq$$

Так как случайные величины Z_i независимы, то

$$D[X] = D[Z_1] + D[Z_2] + \ldots + D[Z_n] =$$

$$= n \cdot D[Z_n] = n \cdot p \cdot q$$

Таким образом, для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$M[X] = n \cdot p$$

$$D[X] = n \cdot p \cdot q$$