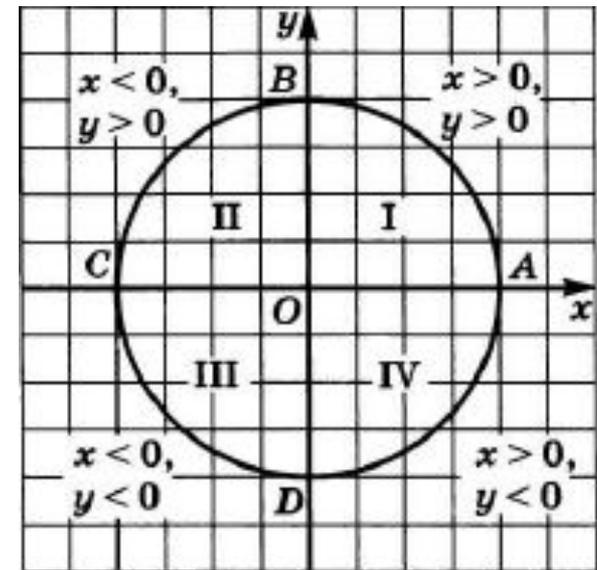


Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ НА
КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ.



Числовая окружность на координатной плоскости.

ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Определение.

Важные координаты числовой окружности.

Как искать координату числовой окружности?

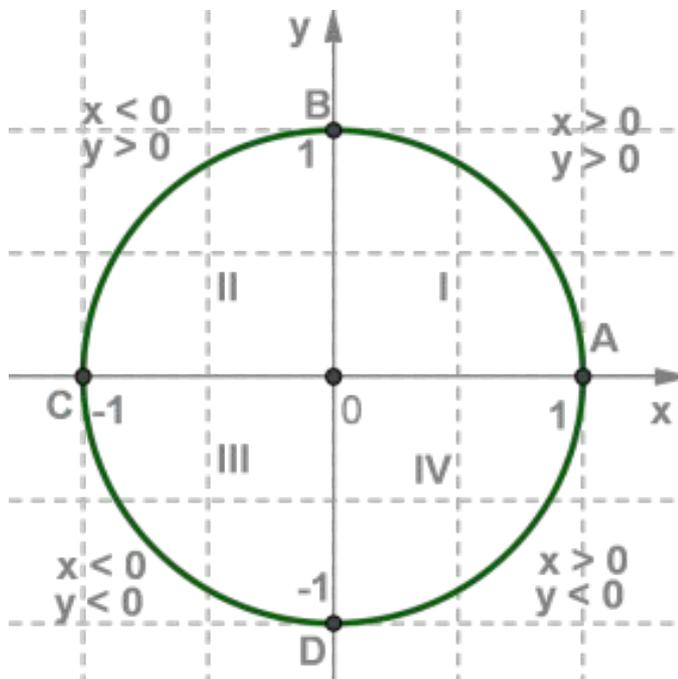
Таблица основных координат числовой окружности.

Примеры задач.

Числовая окружность на координатной плоскости.

Определение.

Расположим числовую окружность в координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а её радиус принимаем за единичный отрезок. Начальная точка числовой окружности A совмещена с точкой $(1;0)$.



Каждая точка числовой окружности имеет в координатной плоскости свои координаты x и y , причем:

- 1) $x > 0, y > 0$ в первой четверти;
- 2) $x < 0, y > 0$ во второй четверти;
- 3) $x < 0, y < 0$ в третьей четверти;
- 4) $x > 0, y < 0$ в четвертой четверти.

Для любой точки $M(x; y)$ числовой окружности выполняются неравенства $-1 < x < 1; -1 < y < 1$.

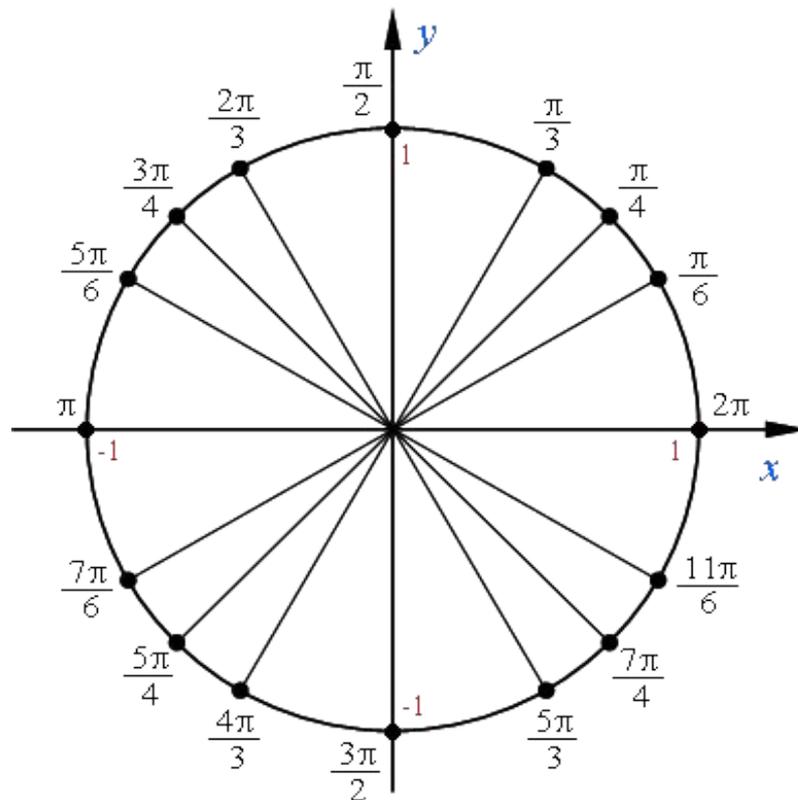
Запомните!

уравнение числовой окружности:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Числовая окружность на координатной плоскости.

Нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности представленных на рисунке ниже:



Числовая окружность на координатной плоскости.

Найдем координату точки $\pi/4$:

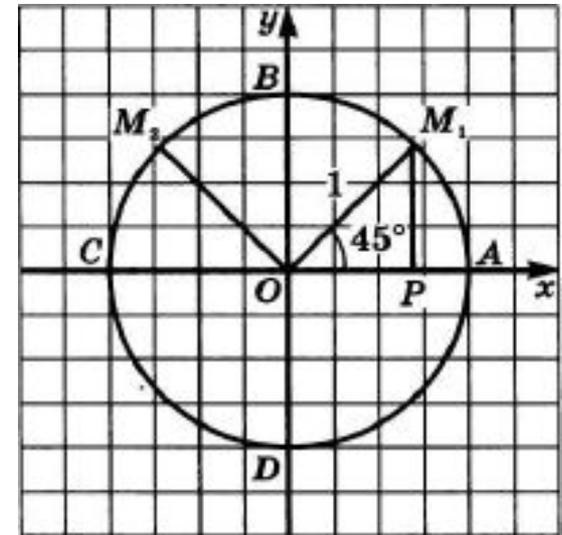
Точка $M(\pi/4)$ — середина первой четверти. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую OA и рассмотрим треугольник OMP . Так как дуга AM составляет половину дуги AB , то $\angle MOP = 45^\circ$

Значит, треугольник OMP — равнобедренный прямоугольный треугольник и $OP = MP$, т.е. у точки M абсцисса и ордината равны: $x = y$

Так как координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$ с нахождения $x = y$ Решив данную систему получаем: $y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ нужно решить систему уравне

Получили, что координаты точки M , соответствующей числу $\pi/4$ будут $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Аналогичным образом рассчитываются координаты точек представленных на предыдущем слайде.



Числовая окружность на координатной плоскости.

Координаты точек числовой окружности.

Точка окружности.									
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Числовая окружность на координатной плоскости.

Координаты точек числовой окружности.

Точка окружности.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Числовая окружность на координатной плоскости.

Пример

Найти координату точки числовой окружности: $P(45\pi/4)$

Решение:

Т.к. числам t и $t+2\pi \cdot k$ (k -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:

$$45\pi/4 = (10 + 5/4) \cdot \pi = 10\pi + 5\pi/4 = 5\pi/4 + 2\pi \cdot 5$$

Значит, числу $45\pi/4$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $5\pi/4$. Посмотрев значение точки $5\pi/4$ в таблице получаем:

$$P\left(\frac{45\pi}{4}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Числовая окружность на координатной плоскости.

Пример

Найти координату точки числовой окружности: $P(-37\pi/3)$

Решение:

Т.к. числам t и $t+2\pi \cdot k$ (k -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:

$$-37\pi/3 = -(12 + 1/3) \cdot \pi = -12\pi - \pi/3 = -\pi/3 + 2\pi \cdot (-6)$$

Значит, числу $-37\pi/3$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $-\pi/3$, а числу $-\pi/3$ соответствует та же точка что и $5\pi/3$. Посмотрев значение точки $5\pi/3$ в таблице получаем:

$$P\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = P\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Числовая окружность на координатной плоскости.

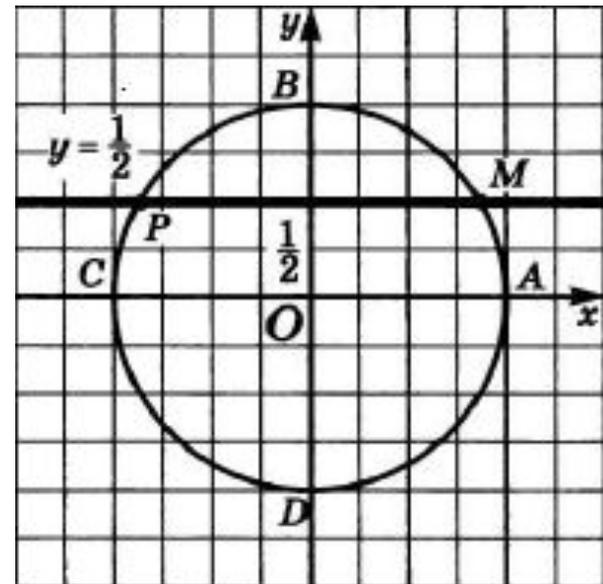
Пример

Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = 1/2$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Прямая $y = 1/2$ пересекает числовую окружность в точках M и P . Точка M соответствует числу $\pi/6$ (из данных таблицы) значит, и любому числу вида $\pi/6 + 2\pi \cdot k$. Точка P соответствует числу $5\pi/6$, а значит, и любому числу вида $5\pi/6 + 2\pi \cdot k$

Получили, как часто говорят в таких случаях, две серии значений: $\pi/6 + 2\pi \cdot k$ и $5\pi/6 + 2\pi \cdot k$

Ответ : $t = \pi/6 + 2\pi \cdot k$ и $t = 5\pi/6 + 2\pi \cdot k$



Числовая окружность на координатной плоскости.

Пример

Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

и записать, каким числам t они соответствуют.

Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P . Неизвестно, какому значению $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки дуги PM .

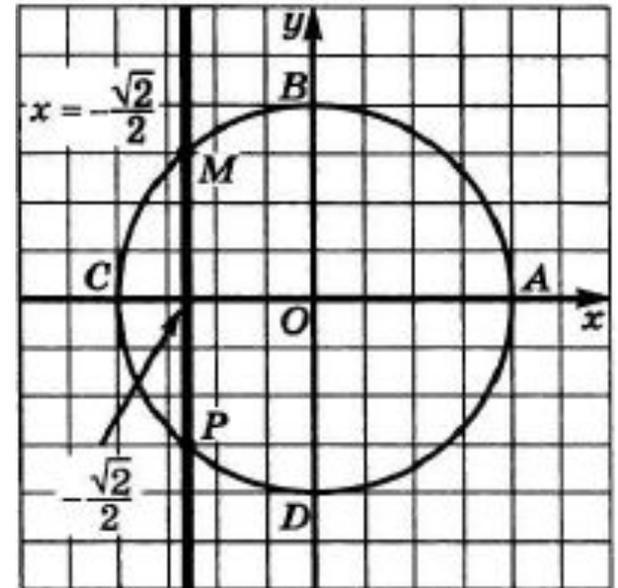
Точка M соответствует числу $3\pi/4$ (из данных таблицы) значит, и любому числу вида $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k$.

Точка P соответствует числу $-3\pi/4$, а значит, и любому числу вида –

$-3\pi/4 + 2\pi \cdot k$

Тогда получим $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k \leq t \leq 3\pi/4 + 2\pi \cdot k$

Ответ : $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k \leq t \leq 3\pi/4 + 2\pi \cdot k$



Числовая окружность на координатной плоскости.

Задачи для самостоятельного решения.

- 1) Найти координату точки числовой окружности: $P(61\pi/6)$?
- 2) Найти координату точки числовой окружности: $P(-52\pi/3)$
- 3) Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = -1/2$ и записать, каким числам t они соответствуют.
- 4) Найти на числовой окружности точки с ординатой $y \geq -1/2$ и записать, каким числам t они соответствуют.
- 5) Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.