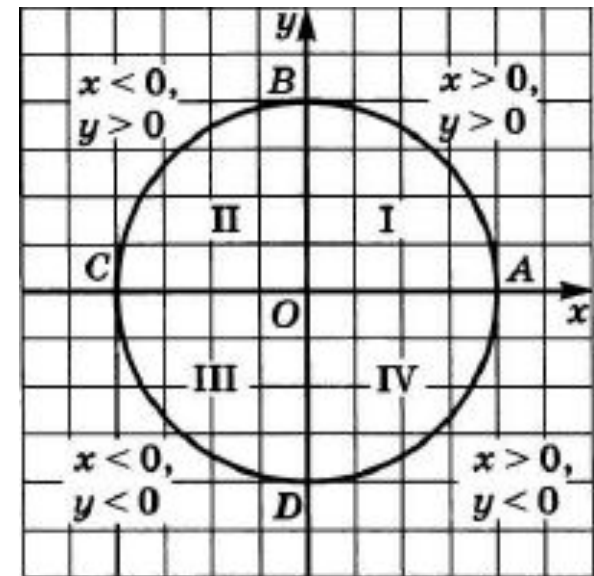


# Занимательная математика

## АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:  
ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ НА  
КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ.



# Числовая окружность на координатной плоскости.

## ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Определение.

Важные координаты числовой окружности.

Как искать координату числовой окружности?

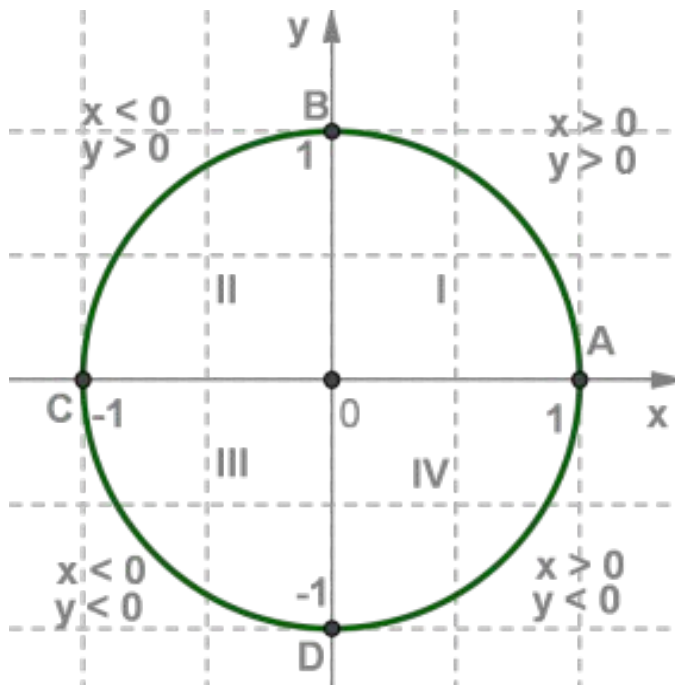
Таблица основных координат числовой окружности.

Примеры задач.

# Числовая окружность на координатной плоскости.

## Определение.

Расположим числовую окружность в координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а её радиус принимаем за единичный отрезок. Начальная точка числовой окружности  $A$  совмещена с точкой  $(1;0)$ .



Каждая точка числовой окружности имеет в координатной плоскости свои координаты  $x$  и  $y$ , причем:

- 1)  $x > 0, y > 0$  в первой четверти;
- 2)  $x < 0, y > 0$  во второй четверти;
- 3)  $x < 0, y < 0$  в третьей четверти;
- 4)  $x > 0, y < 0$  в четвертой четверти.

Для любой точки  $M(x; y)$  числовой окружности выполняются неравенства  $-1 < x < 1; -1 < y < 1$ .

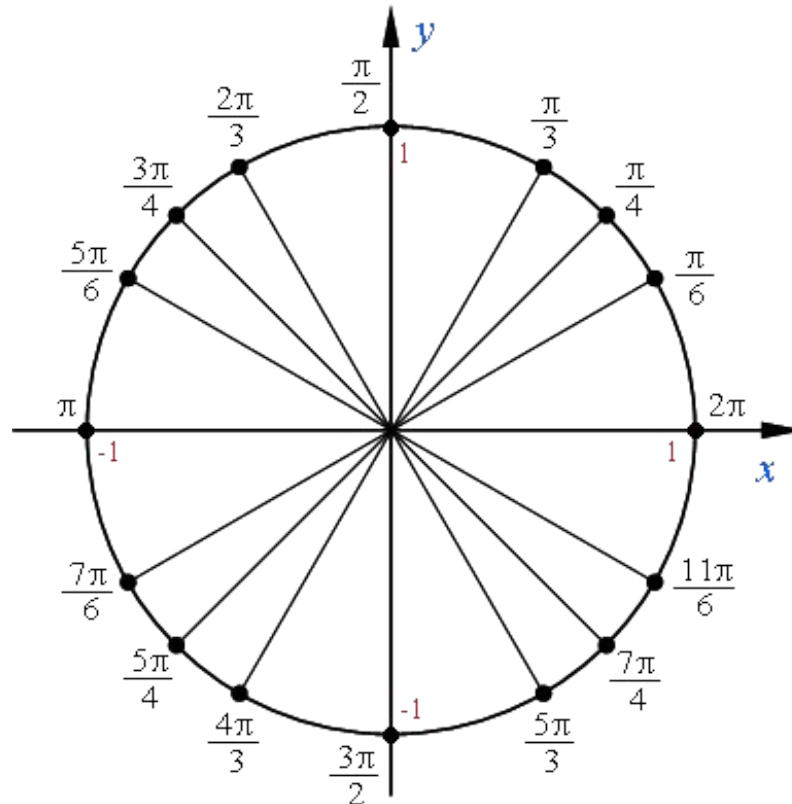
**Запомните!**

**уравнение числовой окружности:**

$$x^2 + y^2 = 1$$

# Числовая окружность на координатной плоскости.

Нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности представленных на рисунке ниже:



# Числовая окружность на координатной плоскости.

**Найдем координату точки  $\pi/4$ :**

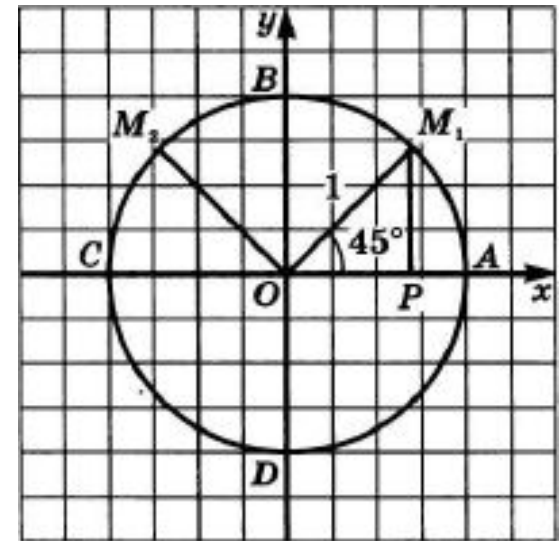
Точка  $M(\pi/4)$  — середина первой четверти. Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MP$  на прямую  $OA$  и рассмотрим треугольник  $OMP$ . Так как дуга  $AM$  составляет половину дуги  $AB$ , то  $\angle MOP = 45^\circ$

Значит, треугольник  $OMP$  — равнобедренный прямоугольный треугольник и  $OP = MP$ , т.е. у точки  $M$  абсцисса и ордината равны:  $x = y$

Так как координаты  $(x; y)$  удовлетворяют уравнению числовой окружности  $x^2 + y^2 = 1$  с нахождения  $x = y$  Решив данную систему получаем:  $y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  нужно решить систему уравне

Получили, что координаты точки  $M$ , соответствующей числу  $\pi/4$  будут  $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Аналогичным образом рассчитываются координаты точек представленных на предыдущем слайде.



# Числовая окружность на координатной плоскости.

Координаты точек числовой окружности.

Точка окружности.									
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
Абсцисса $x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината $y$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

# Числовая окружность на координатной плоскости.

Координаты точек числовой окружности.

Точка окружности.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса $x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината $y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

# Числовая окружность на координатной плоскости.

## Пример

Найти координату точки числовой окружности:  $P(45\pi/4)$

**Решение:**

*Т.к. числам  $t$  и  $t+2\pi \cdot k$  ( $k$ -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:*

$$45\pi/4 = (10 + 5/4) \cdot \pi = 10\pi + 5\pi/4 = 5\pi/4 + 2\pi \cdot 5$$

*Значит, числу  $45\pi/4$  соответствует та же точка числовой окружности, что и числу  $5\pi/4$ . Посмотрев значение точки  $5\pi/4$  в таблице получаем:*

$$P\left(\frac{45\pi}{4}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



# Числовая окружность на координатной плоскости.

## Пример

Найти координату точки числовой окружности:  $P(-37\pi/3)$

**Решение:**

*Т.к. числам  $t$  и  $t+2\pi \cdot k$  ( $k$ -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:*

$$-37\pi/3 = -(12 + 1/3) \cdot \pi = -12\pi - \pi/3 = -\pi/3 + 2\pi \cdot (-6)$$

*Значит, числу  $-37\pi/3$  соответствует та же точка числовой окружности, что и числу  $-\pi/3$ , а числу  $-\pi/3$  соответствует та же точка что и  $5\pi/3$ . Посмотрев значение точки  $5\pi/3$  в таблице получаем:*

$$P\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = P\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

# Числовая окружность на координатной плоскости.

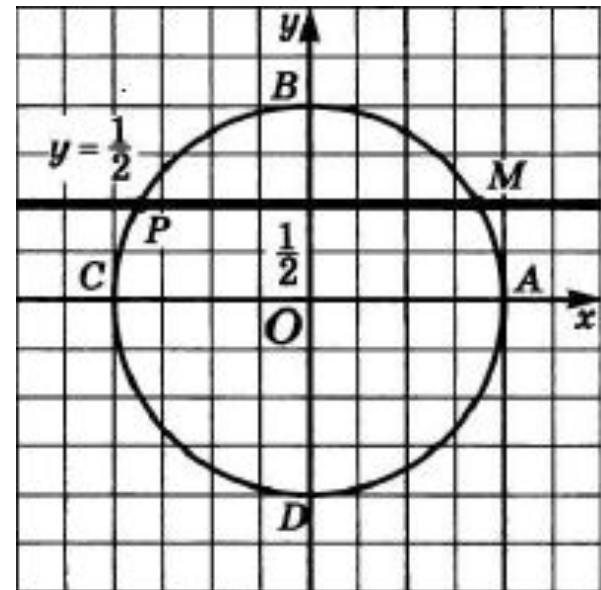
## Пример

Найти на числовой окружности точки с ординатой  $y = 1/2$  и записать, каким числам  $t$  они соответствуют.

Прямая  $y = 1/2$  пересекает числовую окружность в точках  $M$  и  $P$ . Точка  $M$  соответствует числу  $\pi/6$  (из данных таблицы) значит, и любому числу вида  $\pi/6 + 2\pi \cdot k$ . Точка  $P$  соответствует числу  $5\pi/6$ , а значит, и любому числу вида  $5\pi/6 + 2\pi \cdot k$

Получили, как часто говорят в таких случаях, две серии значений:  $\pi/6 + 2\pi \cdot k$  и  $5\pi/6 + 2\pi \cdot k$

Ответ :  $t = \pi/6 + 2\pi \cdot k$  и  $t = 5\pi/6 + 2\pi \cdot k$



# Числовая окружность на координатной плоскости.

## Пример

Найти на числовой окружности точки с абсциссой  $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

и записать, каким числам  $t$  они соответствуют.

Прямая  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  пересекает числовую окружность в точках  $M$  и  $P$ . Неизвестно, какому значению  $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  соответствуют точки дуги  $PM$ .

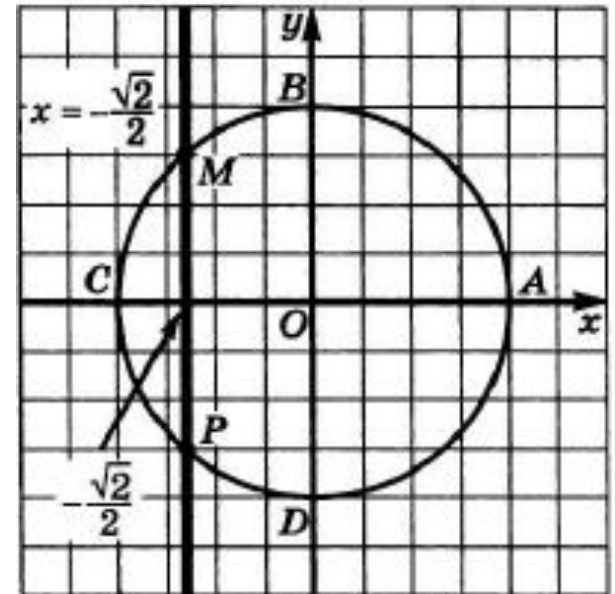
Точка  $M$  соответствует числу  $3\pi/4$  (из данных таблицы) значит, и любому числу вида  $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k$ .

Точка  $P$  соответствует числу  $-3\pi/4$ , а значит, и любому числу вида –

$-3\pi/4 + 2\pi \cdot k$

Тогда получим  $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k \leq t \leq 3\pi/4 + 2\pi \cdot k$

Ответ :  $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k \leq t \leq 3\pi/4 + 2\pi \cdot k$



# Числовая окружность на координатной плоскости.

Задачи для самостоятельного решения.

- 1) Найти координату точки числовой окружности:  $P(61\pi/6)$ ?
- 2) Найти координату точки числовой окружности:  $P(-52\pi/3)$
- 3) Найти на числовой окружности точки с ординатой  $y = -1/2$  и записать, каким числам  $t$  они соответствуют.
- 4) Найти на числовой окружности точки с ординатой  $y \geq -1/2$  и записать, каким числам  $t$  они соответствуют.
- 5) Найти на числовой окружности точки с абсциссой  $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  и записать, каким числам  $t$  они соответствуют.