ДЕЛЕНИЕ ВО МНОЖЕСТВЕ МНОГОЧЛЕНОВ

ЧТО ТАКОЕ МНОГОЧЛЕН?

Многочленом с переменной x (или от переменной x), называют сумму степеней переменной x с натуральным показателем, с некоторыми коэффициентами, то есть:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – некоторые числа, причем $a_0 \neq 0$, n – натуральное число. $P_n(x)$ – обозначение многочлена степень которого равна n.

Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x) \neq 0$, если $P(x) = Q(x) \cdot M(x)$,

где $M(x)$ – некоторый многочлен.

Свойства делимости многочленов «столбиком»:

1 свойство:

Если многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_k(x)$, а многочлен $Q_k(x)$ делится на многочлен $M_m(x)$, то многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $M_m(x)$.

2 свойство:

Если многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ делятся на многочлен $M_k(x)$, то многочлены $P_n(x)+Q_n(x)$ и $P_n(x)-Q_n(x)$ делятся на многочлен $M_k(x)$, а многочлен $P_n(x) \cdot Q_n(x)$ делится на многочлен $M^2_k(x)$.

3 свойство:

Если $P(x)$ делится на $Q(x)$, то всякий корень $Q(x)$ является корнем $P(x)$. Действительно если $P(x)= Q(x) \cdot M(x)$ и $Q(c)=0$, то $P(c)=Q(c)\,M(c)=0$.

Алгоритм деления многочленов «столбиком»

1. Расположить делимое и делитель в убывающих степенях *x*;
2. Разделить старший член делимого на старший член делителя; затем полученный одночлен сделать первым членом частного;
3. Первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная в результате разница является первым остатком;
4. Чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.
5. Это следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю или остаток, степень которого меньше степени делителя.

Разделить уголком многочлен $P(x)=10x^2-7x-12$ на многочлен $Q(x)=5x+4.$

Решение.

делимое $\_\,10x^2-7x-12 \;|\; 5x+4$ *делитель*

$10x2+8x \;|\; 2x-3$ *частное*

первый остаток $\_\,-15x-12$

$-15x-12$

0 *остаток*

Ответ: $2x-3.$

Разделить многочлен $P(x)=3x^4+2x^2-1$ на многочлен $Q(x)=x^2+x.$

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,3x^4+2x^2-1 & x^2+x \\
\quad 3x^4+3x^3 & \overline{3x^2-3x+5} \\
\hline
\_\,-3x^3+2x^2-1 & \\
\quad -3x^3-3x^2 & \\
\hline
\qquad \_\,5x^2-1 & \\
\qquad\quad 5x^2+5x & \\
\hline
\qquad\qquad -5x-1 &
\end{array}
$$

Ответ: частное $3x^2-3x+5$, остаток $-5x-1$.

Задача

При каких натуральных значениях n выражение $\dfrac{2n^2-11n+13}{n-3}$ является целым числом?

Решение.

Разделим числитель дроби на знаменатель с остатком:

$$\begin{array}{r|l} -\,2n^2-11n+13 & n-3 \\ \cline{2-2} 2n^2-6n & 2n-5 \\ \cline{1-1} -\,-5n+13 & \\ -5n+15 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

Таким образом, исходное выражение равно $2n-5-\dfrac{2}{n-3}$, что является целым числом тогда и только тогда, когда 2 нацело делится на n-3 . поскольку целыми делителями числа 2 являются числа -2, -1, 1, 2 и только они, получаем n=1, 2, 4, 5.

Ответ: n=1, 2, 4, 5.

Степень частного равна разности степеней делимого и делителя, а степень остатка всегда меньше степени делителя.

Алгоритм вычислений по схеме Горнера:

1 **шаг.** Под первым коэффициентом делимого a_0 пишется ещё раз этот коэффициент.

2 **шаг.** Под коэффициентом a_1 пишется число $b_1=a_0b+a_1$.

3 шаг. Под коэффициентом a_2 пишется число $b_2 = b_1 b + a_2$.

4 шаг. Под коэффициентом a_3 пишется число $b_3 = b_2 b + a_3$; $b_3 = R$ – остаток.

Для любого многочлена

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *и любого числа* **c** *можно написать разложение* **$P(x)$** *по степеням разности* **$x-c$**:

$$P(x)=b_0(x-c)^n+b_1(x-c)^{n-1}+\ldots+b_{n-1}(x-c)+b_n.$$

Разложить многочлен $P(x)=x^4-5x^3-3x^2+9$ по степеням разности $x-3$.

Решение.

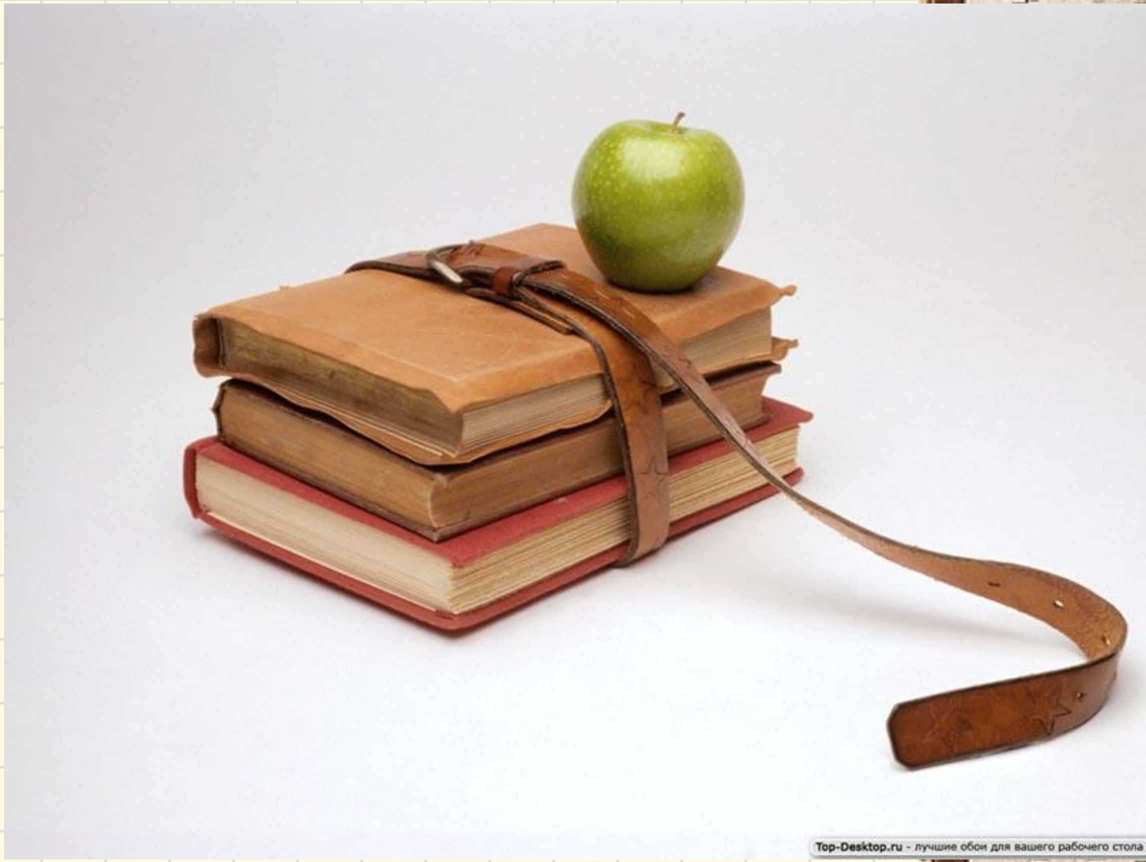
Выполним деление по схеме Горнера:

	1	-5	-3	0	9
3	1	-2	-9	-27	-72
	1	1	-6	-45	
	1	4	6		
	1	7			
	1				

Таким образом,

$$P(x)=(x-3)^4+7(x-3)^3+6(x-3)^2-45(x-3)-72.$$

Теорема Безу



Определение.

Остаток от деления многочлена *P(x)* на двучлен *x-a* равен значению этого многочлена при *x=a*: *P(a)=R*.

Следствие №1. Если $x=a$ – корень уравнения $P_n(x)=0$, то $R=0$ и многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $x-a$.

Следствие №2. Если многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $x-a$, то $x=a$ – корень уравнения $P_n(x)=0$.

Задача

Выяснить, делится ли нацело многочлен $P(x)=x^{100}+3x^{79}+x^{48}-x^{27}$ на $x+1$.

Решение.

Остаток от деления $P(x)$ на $x+1$ равен $P(-1)=(-1)^{100}+3\cdot(-1)^{79}+(-1)^{48}-(-1)^{27}$ $=1-3+1+1=0$.

Ответ: многочлен $P(x)$ нацело делится на $x+1$

Список используемой литературы

- Гусев В.А., Мордкович А.Г. Мат.: Справочные материалы: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1988 – 416с.:ил.
- Дорофеев Г.Д. «Многочлены с одной переменной». / Журнал математика для школьников. – 2005год. – №3
- Колягин Ю. «Многочлены и уравнения высших степеней». / Учебно-методическая газета «Математика» – 2005год – №2
- Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / С.М.Никольских, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевпин. – М.: Просвещение, 2006год
- Факультативный курс по математике: Учебное пособие для 7-9класс средней школы / Составитель И.Л.Никольская. – М.: Просвещение, 1991год
- Энциклопедический словарь юного математика: сост. Савин А.П. – М.: Педагогика, 1985 – 352с.:ил.