

Лекции по алгебре и началам анализа

10 класс

Лекция №1



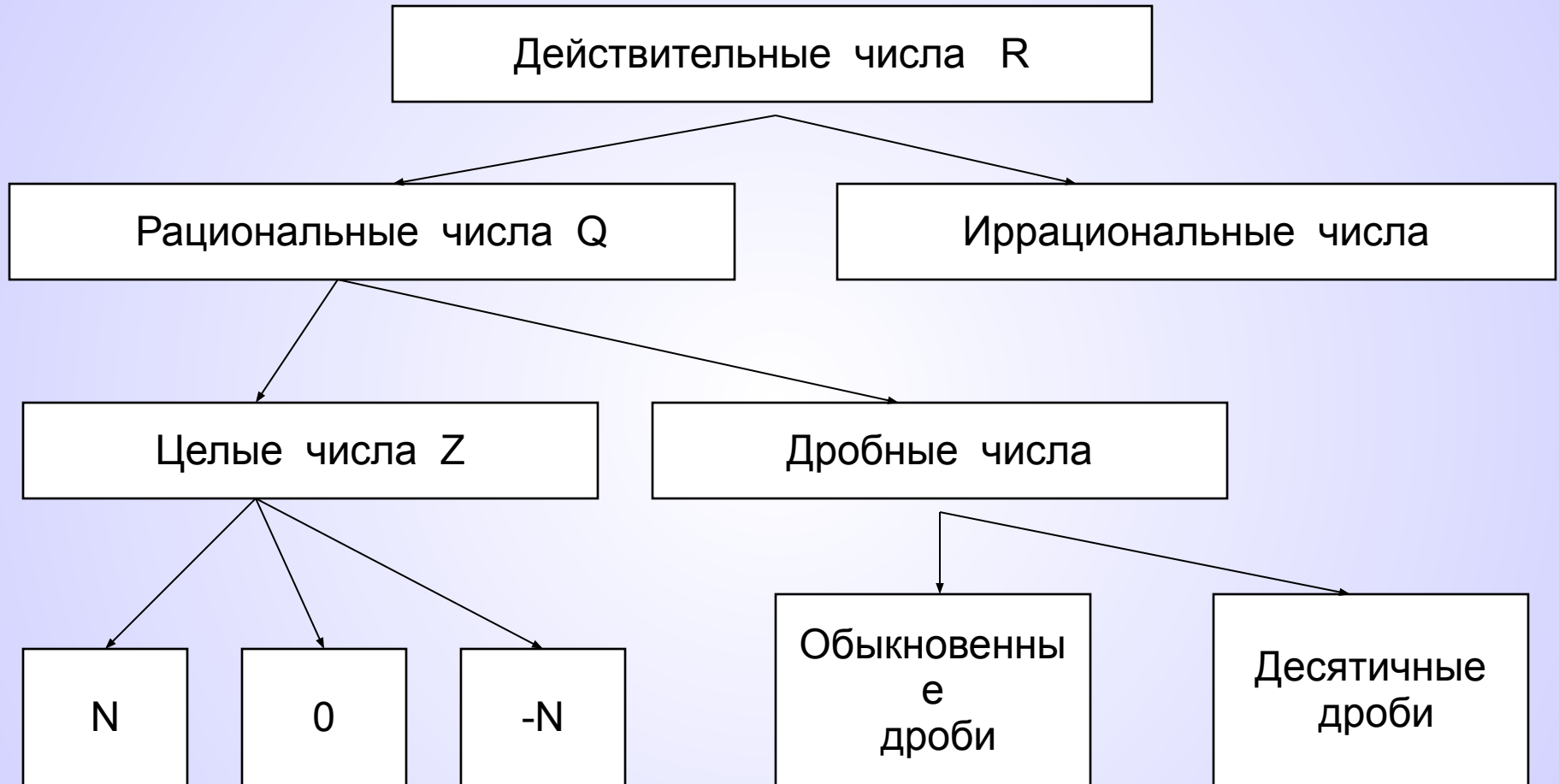
Натуральные числа.

Делимость натуральных чисел.

Действительные числа

и действия над ними.

1. Классификация действительных чисел.



2. Натуральные числа. Делимость натуральных чисел.

Определение.

Натуральные числа- числа, используемые при счете предметов: 1, 2, 3, 4, ...

Теорема.

Для любого натурального числа a и натурального числа b существует единственная пара чисел q и r таких, что $a=bq+r$, где q - натуральное число, r -натуральное число или нуль, причем $r < b$

Если остаток $r=0$, то число a делится на число b нацело (без остатка).

Пример: $28 = 9 \cdot 3 + 1$; $28 = 7 \cdot 4 + 0$

3. Признаки делимости натуральных чисел

Натуральное число n делится на натуральное число p , равное

- 1) **2**, если его последняя цифра четная или 0;
- 2) **5**, если его последняя цифра 5 или 0;
- 3) **10**, если его последняя цифра 0;
- 4) **4 (25)**, если две его последние цифры нули или образуют число, делящаяся на 4(25);
- 5) **8 (125)**, если три его последние цифры нули или образуют число, делящаяся на 8 (125);
- 6) **3 (9)**, если сумма всех его цифр делится на 3 (9);
- 7) **7 (11, 13)**, если разность между суммой его цифр стоящих на четных местах и суммой цифр, стоящих на нечетных местах делится на 7 (11,13).

3. Признаки делимости натуральных чисел

Пример:

1) 2: 264; 37860

2) 5: 379800; 4675

3) 10: 3786300

4) 4 (25): 4500; 5316; 254750

5) 8 (125): 53064 45250

6) 2745; 366

7) 3872;



4. Взаимно простые числа.

Определение.

Два числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей кроме 1.

- 1) Если число a делится на каждое из двух взаимно простых чисел b и c , то оно делится на их произведение.
 $75 \square 3, 75 \square 5 \Rightarrow 75 \square (3 \cdot 5)$
- 2) Если произведение ab делится на c , причем a и c взаимно простые числа, то b делится на c .
 $(3 \cdot 25) \square 5 \Rightarrow 25 \square 5$

5. НОК и НОД натуральных чисел.

Определение.

Наименьшее общее кратное (НОК) натуральных чисел n_1, n_2, \dots, n_k – наименьшее число n , которое делится нацело на числа n_1, n_2, \dots, n_k .

$$n = \text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

Определение.

Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел n_1, n_2, \dots, n_k – наибольшее число n , на которое делятся нацело числа n_1, n_2, \dots, n_k .

$$n = \text{НОД}(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

Пример

$$49896 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11$$

$$26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

$$\text{НОК} (49896; 26460) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^1$$

$$\text{НОД} (49896; 26460) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0$$

6. Основная теорема арифметики.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$p_1; p_2; \dots; p_k$ – различные простые множители

$\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k$ – натуральные числа

Представленное в теореме разложение числа называется каноническим разложением числа n .



7. Делимость суммы и произведения.

- 1) Если в сумме чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число: $3+27+9+117=3m$.
- 2) Если два числа делятся на некоторое число, то их разность делится на это число: $104-16 = 4m$.
- 3) Если в сумме чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число:
 $3+27+35+117 \neq 3m$.
- 4) Если в произведении чисел один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число:
 $25 \cdot 17 \cdot 131 = 5m$

8. Свойства, связанные с последовательным расположением натуральных чисел.

- 1) Одно из n последовательных целых чисел делится на n ;
- 2) Одно из двух последовательных четных чисел делится на 4;
- 3) Произведение трех последовательных целых чисел делится на 6;
- 4) Произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

9. Целые числа.

Определение.

Целые числа – натуральные числа, числа противоположные натуральным и нуль.

Многие свойства делимости целых чисел аналогичны свойствам делимости натуральных чисел.



10. Дробные числа.

Определение.

Обыкновенная дробь (дробь) – число, представимое в виде $\frac{p}{q}$, где p - числитель дроби (целое число), q - знаменатель дроби (натуральное число).

Основное свойство дроби.

Если числитель и знаменатель данной дроби умножить на одно и то же число, отличное от нуля или разделить на их общий множитель, то получится дробь равная данной.

$$\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}; \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

Определение.

Положительная дробь $\frac{p}{q}$ правильная, если ее числитель меньше знаменателя, в противном случае – дробь неправильная.

10. Дробные числа.

Определение.

Несократимая дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой содержит только множители 2 и 5, можно записать в виде конечной десятичной дроби.

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{75}{1000} = 0,075$$

Определение.

Несократимая дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой содержит другие простые множители кроме 2 и 5, можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби. При этом повторяющаяся группа цифр, называется периодом.

$$\frac{59}{110} = 0,536363636... = 0,5(36)$$

Определение.

Число представимое в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби называется рациональным числом.

11. Иррациональные числа.

Определение.

Иррациональное число – бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Пример: $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$

