Полный дифференциал функции нескольких переменных

Лекция 2

Полное приращение функции 2-х переменных

Если обеим переменным дать приращение, то функция получит полное приращение

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Определение дифференцируемой функции

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой в точке М(x,y),*** если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \ ,$$

где Δx и Δy -произвольные приращения аргументов x и y в некоторой окрестности точки М(x,y), А и В – постоянные, независящие от Δx и Δy, $o(\rho)$- бесконечно малая более высокого порядка, чем

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ -расстояние между $M(x,y)$ и

$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$

Определение дифференциала

Главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции $z = f(x, y)$ называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается dz или $df(x,y)$.

Таким образом, $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Формула для вычисления дифференциала

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M(x,y),то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x, y)$и $f'_y(x, y)$, причем $f'_x(x, y)$ =*A*, а $f'_y(x, y)$ =*B* .

Таким образом,

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad .$$

Если положить $\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$,то

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Дифференциалы высшего порядка

Дифференциалом второго порядка функции $z=f(x,y)$ называется

$$d^2z = d(dz)$$

Вообще: $d^n z = d(d^{n-1}z)$

Если x и y независимые переменные, то

$$d^2 z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

ВГУЭС

Достаточные условия дифференцируемости функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки M(x,y) имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, которые непрерывны в самой точке M. Тогда функция $z = f(x, y)$ ***дифференцируема*** в этой точке.

Достаточные условия дифференцируемости функции

Опр. Функция, имеющая в некоторой точке непрерывные частные производные, называется ***непрерывно дифференцируемой*** в этой точке.

Экстремумы функции двух переменных

Определение. Говорят, что в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x,y)$ этой окрестности, отличных от $P_0(x_0, y_0)$, выполнено неравенство

$$f(P_0) > f(P)$$

Аналогично определяется минимум функции.

Минимум и максимум функции называются ее экстремумами.

Экстремумы функции двух переменных

Теорема (необходимое условие экстремума). В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых выполнены эти условия, называются *критическими.*

Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Теорема. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ в которой $z'_x = z'_y = 0$. Если при этом в этой точке выполнено условие $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, то точка M_0 является точкой экстремума функции, причем точкой максимума, если $z''_{xx} < 0$, и точкой минимума, если $z''_{xx} > 0$.

Если же в этой точке $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$, то экстремума в точке M_0 нет.

В том случае, если $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ в точке M_0 теорема ответа не дает.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется абсолютным экстремумом функции (абсолютным минимумом или абсолютным максимумом соответственно) в этой области.

Согласно теореме Вейерштрасса непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений.

Абсолютный экстремум достигается функцией либо в критических точках, либо на границе области.

Скалярное поле

Лекция 3

Основные определения

Пусть в области D пространства $Oxyz$ задана функция $u=u(x,y,z)$. В этом случае говорят, что в области D задано **скалярное поле**, а саму функцию $u=u(x,y,z)$называют функцией поля. Например, поле давлений, температур и т.д.

Основные определения

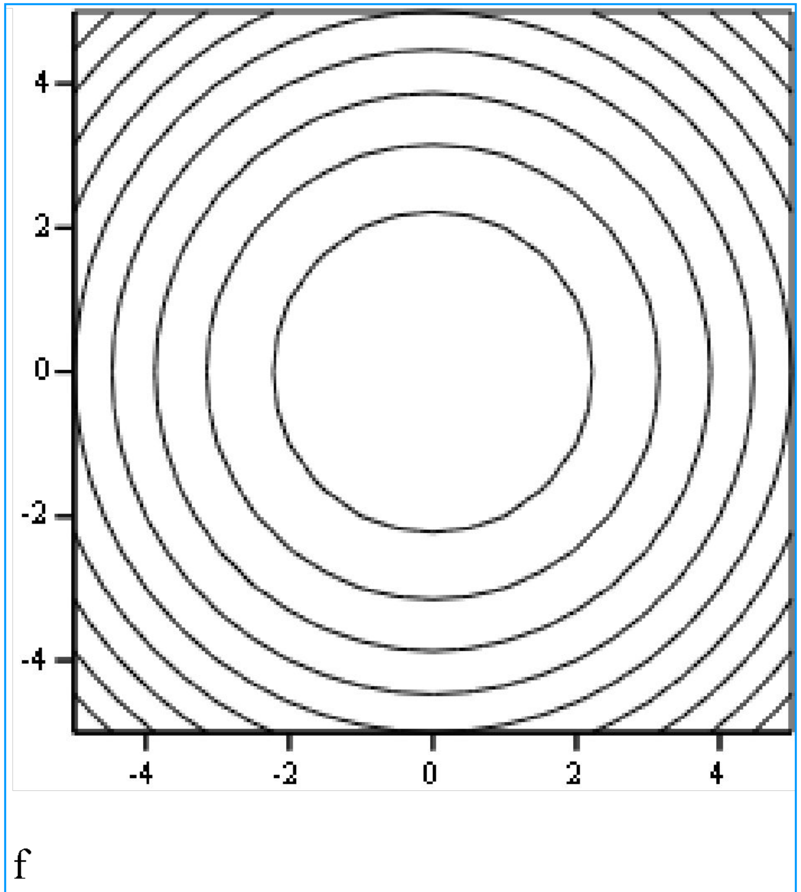
Множество точек M области D, для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение, т. е. $u(M)=C$, называется *поверхностью уровня* (или изоповерхностью) скалярного поля.

Если область D расположена на плоскости Oxy, то поле $u=u(x,y)$ является плоским.

Поверхности уровня называют в этом случае *линиями уровня*.

Линии уровня

Пример: пусть $z = x^2 + y^2$. Линии уровня этой поверхности имеют вид



Производная по направлению

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля $u=u(x,y,z)$.

- ***Производной этой функции по направлению l*** называется

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial l}$$

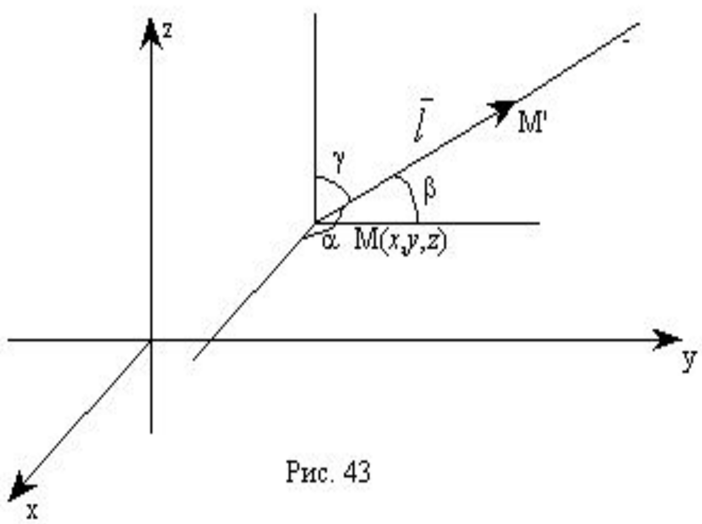


Рис. 43

Вычисление производной по направлению

Производную по направлению вычисляют по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

где cosα, cosβ , cosγ-направляющие косинусы вектора $\overline{MM_1}$.

Для плоского скалярного поля

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$$

Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля $u=u(x,y,z)$, где $u=u(x,y,z)$- дифференцируемая функция, называется вектор с координатами

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Таким образом, $grad\,u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

или $grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Пример

Найти градиент функции u=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M(6,2,3).

Решение. Вычислим градиент функции.

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Тогда grad u = $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k}$

Направление градиента

Теорема. Производная u'_l функции по направлению равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

Направление градиента

Так как производная по направлению представляет собой скорость изменения функции в данном направлении , а проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению, то

градиент функции в данной точке указывает направление наиболее быстрого возрастания функции. .

Величина градиента плоского скалярного поля

Величина градиента плоского скалярного поля ,т.е.

$$| \text{grad } u | = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

обозначается $\mathrm{tg}\phi$ и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности u = $f(x, y)$.

Продолжение

Градиент скалярного поля в данной точке по величине и направлению равен максимальной скорости изменения поля в этой точке, т. е.

$$\max_{l} \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^*} = |grad u|$$

где $\overline{l^*} \Uparrow grad u$.

Направление градиента

Точка P, в которой $grad u(P)=0$, называется *особой* точкой скалярного поля. В противном случае эту точку называют *неособой* или *обыкновенной* точкой поля.

Теорема. Во всякой неособой точке плоского скалярного поля градиент поля направлен по нормали к линии уровня , проходящей через эту точку, в сторону возрастания поля.