# Диофантовы уравнения

Выполнила Сафронова  Наталья

10 класс

МБОУ «Звездненская общеобразовательная средняя школа»

**Цели учебно – исследовательской работы:**

изучить способы решения диофантовых уравнений;



повысить уровень математической культуры, прививая навыки самостоятельной исследовательской работы в математике

# Задачи:

- разобрать основные приемы и методы решения уравнений в целых числах;
- выполнить сопоставительно – аналитическую работу с контрольно – измерительными материалами ЕГЭ и олимпиадных заданий разных лет.

# Актуальность исследования

- В школьном курсе математики диофантовы уравнения не изучаются, но, например, в заданиях группы С6 в ЕГЭ встречаются диофантовы уравнения 2-ой степени, также диофантовы уравнения часто встречаются и в олимпиадных задачах. Значит, ученику для успешной сдачи ЕГЭ и решения олимпиадных задач нужно знать и теорию и методику решения диофантовых уравнений.

# Древнегреческий математик Диофант

- в III веке уже знал правило знаков и умел умножать отрицательные числа. Однако и он рассматривал их лишь как временные значения.

# Обозначения у Диофанта

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varsigma$ | неизвестное $(x)$ | $\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$ | «кубо-куб» $(x^6)$ |
| $\Delta^{\Upsilon}$ | квадрат неизвестного $(x^2)$ | $\pitchfork$ | знак отрицательной величины |
| $\mathrm{K}^{\Upsilon}$ | куб неизвестного $(x^2)$ | | |
| $\Delta\Delta^{\Upsilon}$ | «квадрато-квадрат» $(x^4)$ | $\mathrm{M}^{\circ}$ | свободный член |
| $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$ | «квадрато-куб» $(x^5)$ | $\lfloor$ | равенство |

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

$$\mathrm{K}^{\Upsilon}\,\bar{\alpha}\,\varsigma\,\bar{\eta}\,\pitchfork\,\Delta^{\Upsilon}\bar{\varepsilon}\,\mathrm{M}^{\circ}\,\bar{\alpha}\,\lfloor\,\varsigma\,\bar{\alpha}$$

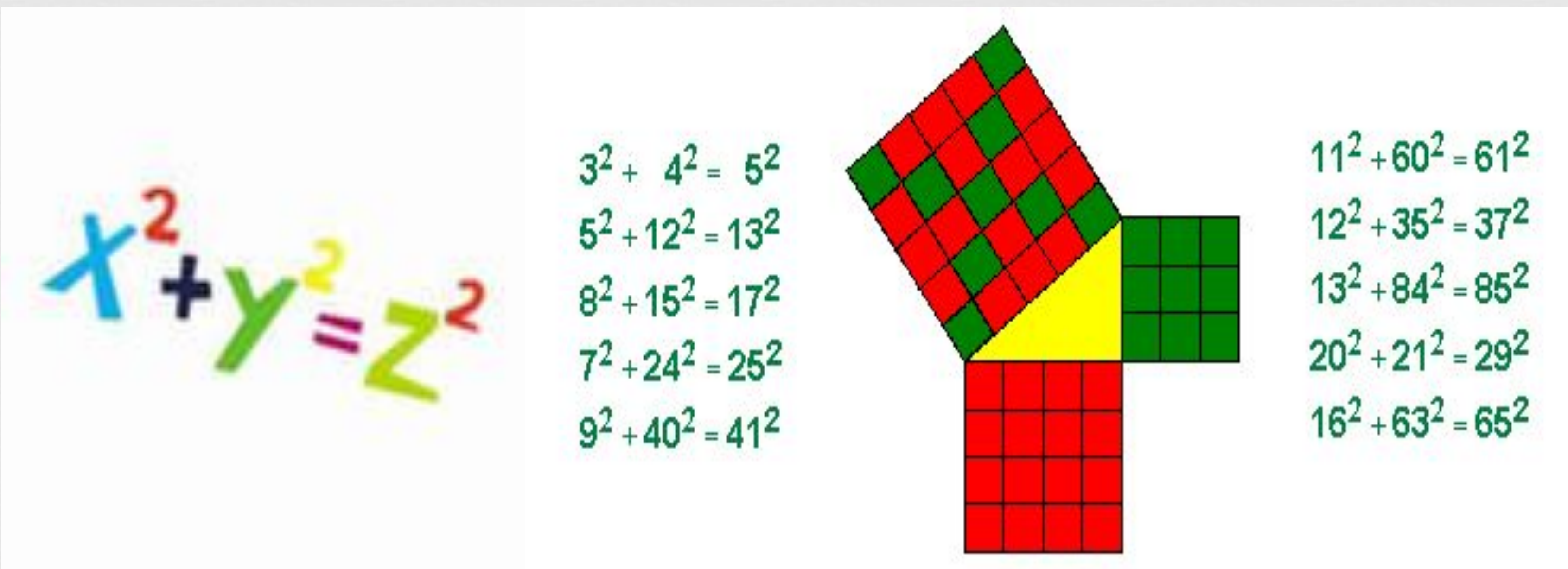
# Гипотеза

- Общего способа, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых числах, быть не может, не существует единого алгоритма, позволяющего за конечное число шагов решать в целых числах произвольные диофантовы уравнения.


Диофантовыми уравнениями называются уравнения вида

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где $P(x_1, \ldots, x_n)$ - многочлен с целыми коэффициентами.



# При исследовании диофантовых уравнений обычно ставятся следующие вопросы:

1. Имеет ли уравнение целочисленные решения;
2. Конечно или бесконечно множество его целочисленных решений;
3. Решить уравнение на множестве целых чисел, т. е. найти все его целочисленные решения;
4. Решить уравнение на множестве целых

# Методы решения  диофантовых уравнений

- 1. Алгоритм Евклида. Решение общих линейных уравнений.
- 2. Метод прямого перебора.
- 3. Метод разложения на множители.
- 4. Метод остатков.
- 5. Метод решения относительно одной переменной.
- 6. Метод бесконечного спуска.
- 7. Использование конечных цепных дробей.
- 8. Метод оценки.

# *Алгоритм Евклида. Решение линейных уравнений.*

$$ax + вy = c$$

Множество решений исходного уравнения лежит на множестве чисел

$$x = x_0 + bn; \quad y = y_0 - an.$$

$ax^2 + by = c,$ сделав предварительно замену $x^2 = t,$ получим линейное уравнение $at + by = c.$


# *Метод прямого перебора*

**$17x+40y+16z=100$**

Ответ: да, может

4 ящика по 17 кг и 2 ящика по 16 кг.

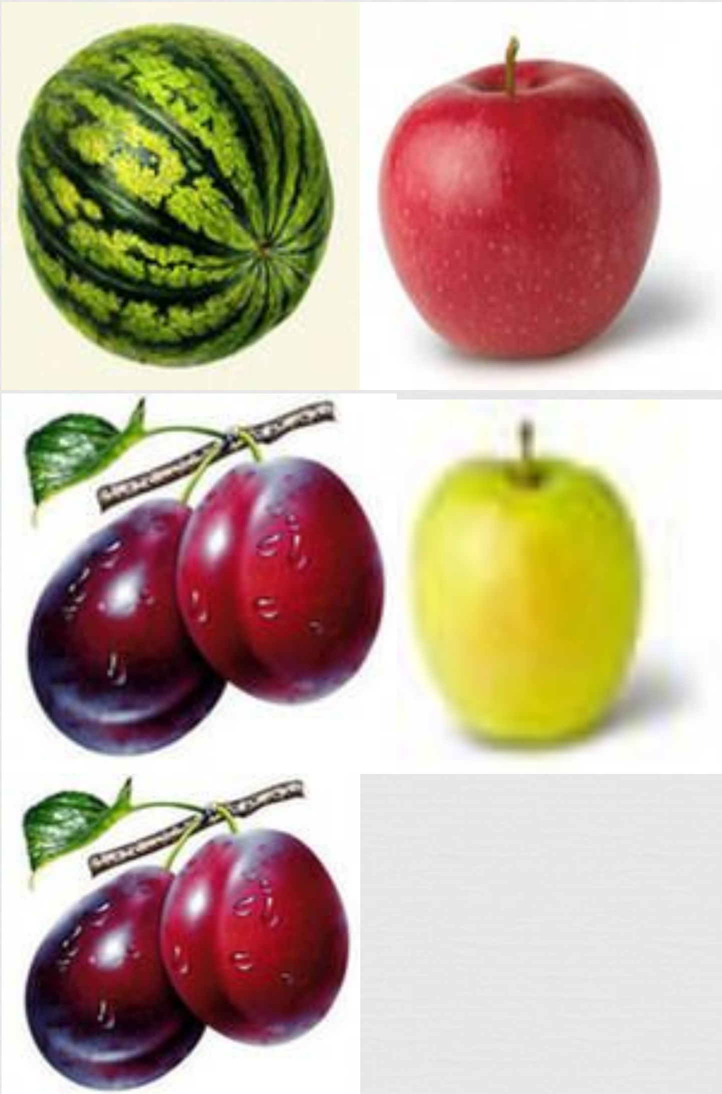
В загоне находятся одноглавые сороконожки и трехглавые змеи. Всего у них 298 ног и 26 голов. Сколько ног у трехглавых змей?

# Решение:

- Обозначим за «x» сороконожек, а за «y» трехглавых змей, тогда голов 3y + x = 26.
- Обозначим за «z» количество ног у одного змея, тогда ног yz + 40x = 298.
- Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3y + x = 26, \\ yz + 40x = 298 \end{cases}$$

Ответ: у трехглавого змея 14 ног.



На 5 рублей куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты таковы:  арбуз 1 штука 50 коп, яблоко 1 штука 10 коп, слива 1 штука 1 коп. Сколько фруктов каждого рода было куплено?

Ответ: 1 арбуз, 39 яблок, 60 слив.

***Метод разложения на множители.***

- вынесение множителя за скобку;
- использование формул сокращённого умножения;
- способ группировки;
- предварительное преобразование.

# *Метод оценки*

а) использование известных неравенств

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

неравенство Коши

б) приведение к сумме неотрицательных выражений

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_{\text{п}} - a_{\text{п}})^2 =$$

с

## *Метод решения относительно одной переменной.*

- выделение целой части;
- использование дискриминанта (неотрицательность);
- решение уравнений в целых числах как квадратных относительно  какой-либо переменной.

# Выводы:

- к решению неопределенных уравнений в целых числах уравнение вида $ax + by = c$ применяется теория делимости; для линейных уравнений с двумя переменными, т.е. уравнения вида $ax+by=c$, алгоритм решения существует; при любых взаимно простых коэффициентах при неизвестных уравнение имеет имеет бесконечное множество решений;

- при решении неопределенных уравнений в целых числах применяются свойства, оценка выражений, входящих в уравнение; выражение одной переменной через другую и выделение целой части дроби; метод разложения многочлена на множители, метод полного перебора всех возможных значений переменных, входящих в уравнение; метод, основанный на выделении полного квадрата; решение уравнений с двумя переменными как квадратных относительно одной из переменных.

# Благодарю за внимание