


Диофантовы уравнения



Цели учебно – исследовательской работы:

изучить способы решения
диофантовых уравнений;
повысить уровень математической
культуры, прививая навыки
самостоятельной исследовательской
работы в математике

Задачи:

- разобрать основные приемы и методы решения уравнений в целых числах; 
- выполнить сопоставительно – аналитическую работу с контрольно – измерительными материалами ЕГЭ и олимпиадных заданий разных лет.

Актуальность исследования

- В школьном курсе математики диофантовы уравнения не изучаются, но, например, в заданиях группы С6 в ЕГЭ встречаются диофантовы уравнения 2-ой степени, также диофантовы уравнения часто встречаются и в олимпиадных задачах. Значит, ученику для успешной сдачи ЕГЭ и решения олимпиадных задач нужно знать и теорию и методику решения диофантовых уравнений.

Древнегреческий математик Диофант



в III веке уже знал правило знаков и умел умножать отрицательные числа. Однако и он рассматривал их лишь как временные значения.

Обозначения у Диофанта

ζ неизвестное (x)

Δ^r квадрат неизвестного (x^2)

K^r куб неизвестного (x^3)

$\Delta \Delta^r$ «квадрато-квадрат» (x^4)

ΔK^r «квадрато-куб» (x^5)

$K^r K$ «кубо-куб» (x^6)

\blacktriangleleft знак отрицательной
величины

M^o свободный член

\mid равенство

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

$$K^r \bar{\alpha} \zeta \bar{\eta} \blacktriangleleft \Delta^r \bar{\varepsilon} M^o \bar{\alpha} \mid \zeta \bar{\alpha}$$



Гипотеза



- Общего способа, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых числах, быть не может, не существует единого алгоритма, позволяющего за конечное число шагов решать в целых числах произвольные диофантовы уравнения.



Диофантовыми уравнениями называются уравнения вида

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

где $P(x_1, \dots, x_n)$ - многочлен с целыми коэффициентами.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

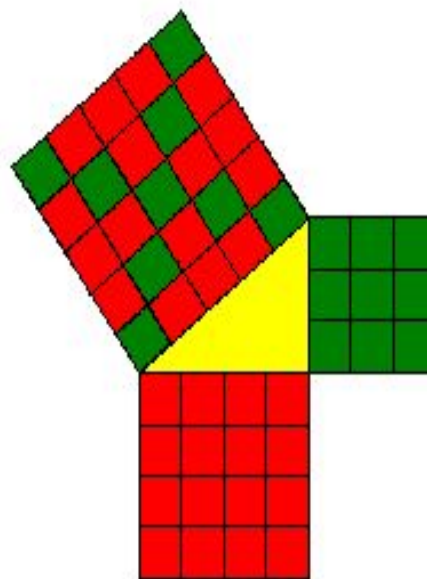
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$8^2 + 15^2 = 17^2$$

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

$$9^2 + 40^2 = 41^2$$



$$11^2 + 60^2 = 61^2$$

$$12^2 + 35^2 = 37^2$$

$$13^2 + 84^2 = 85^2$$

$$20^2 + 21^2 = 29^2$$

$$16^2 + 63^2 = 65^2$$

При исследовании диофантовых уравнений обычно ставятся следующие вопросы:

1. Имеет ли уравнение целочисленные решения;
2. Конечны или бесконечно множество его целочисленных решений;
3. Решить уравнение на множестве целых чисел, т. е. найти все его целочисленные решения;
4. Решить уравнение на множестве целых

Методы решения диофантовых уравнений

- 1. Алгоритм Евклида. Решение общих линейных уравнений.
- 2. Метод прямого перебора.
- 3. Метод разложения на множители.
- 4. Метод остатков.
- 5. Метод решения относительно одной переменной.
- 6. Метод бесконечного спуска.
- 7. Использование конечных цепных дробей.
- 8. Метод оценки.

*Алгоритм Евклида.
Решение линейных уравнений.*

$$ax + by = c$$

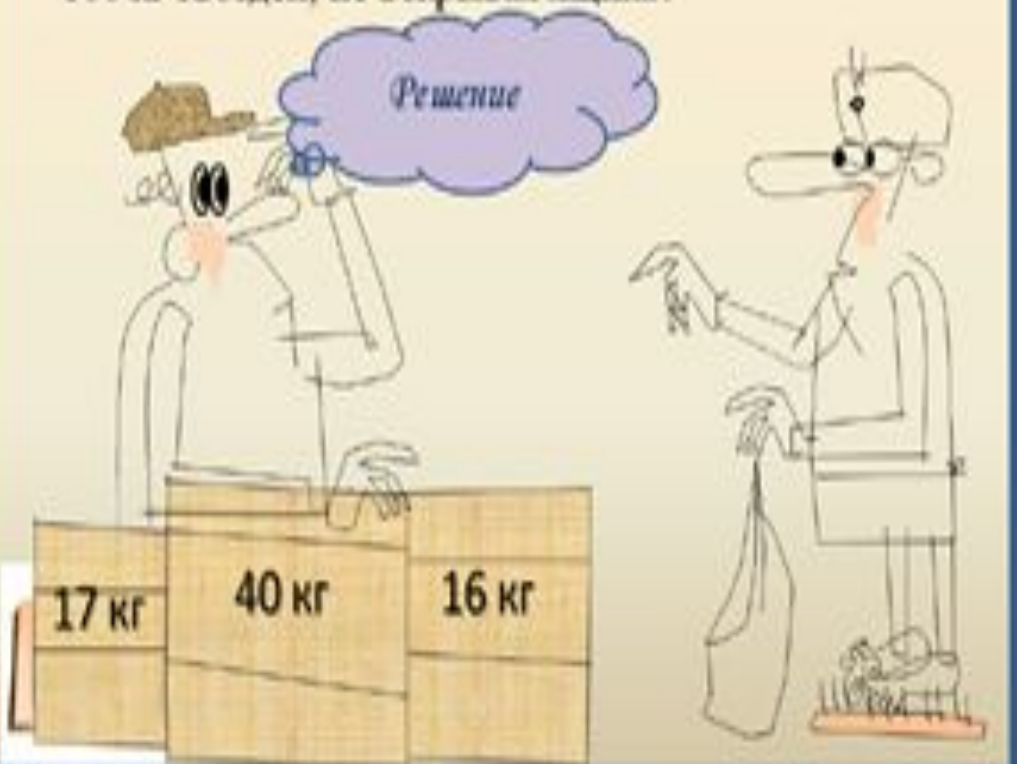
Множество решений исходного уравнения лежит на
множестве чисел

$$x = x_0 + bn; \quad y = y_0 - an.$$

$ax^2 + by = c$, сделав предварительно замену

$x^2 = t$, получим линейное уравнение $at + by = c$.

Задача 1. На складе имеются гвозди в ящиках по 16, 17 и 40 кг. Может ли кладовщик выдать 100 кг гвоздей, не вскрывая ящика?



*Метод
прямого
перебора*

$$17x + 40y + 16z = 100$$

Ответ: да, может
4 ящика по 17 кг и 2
ящика по 16 кг.

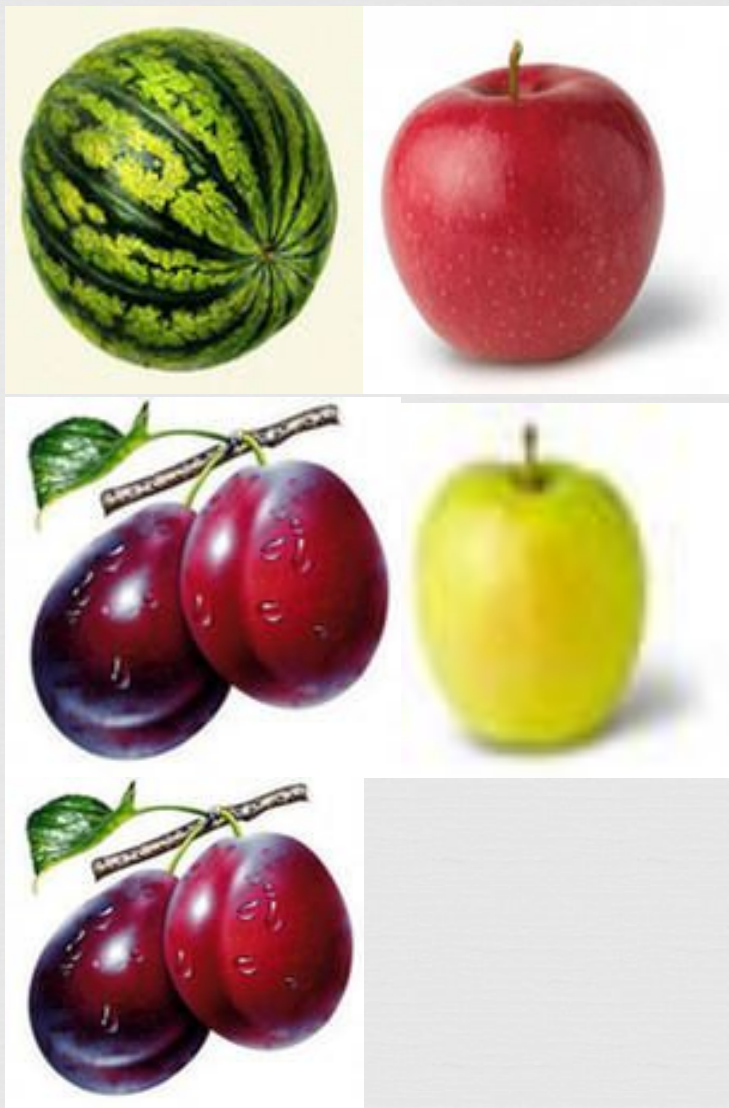


В загоне находятся
одноглавые
сороконожки и
трехглавые змеи. Всего
у них 298 ног и 26 голов.
Сколько ног у
трехглавых змей?

Решение:

- Обозначим за «x» сороконожек, а за «y» трехглавых змей, тогда голов $3y + x = 26$.
- Обозначим за «z» количество ног у одного змея, тогда ног $yz + 40x = 298$.
- Имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} 3y + x = 26, \\ yz + 40x = 298 \end{cases}$$

Ответ: у трехглавого змея 14 ног.



На 5 рублей куплено
100 штук разных
фруктов. Цены на
фрукты таковы: арбуз
1 штука 50 коп, яблоко
1 штука 10 коп, слива 1
штука 1 коп. Сколько
фруктов каждого рода
было куплено?

Ответ: 1 арбуз, 39
яблок, 60 слив.

Метод разложения на множители.

- ▣ вынесение множителя за скобку;
- ▣ использование формул сокращённого умножения;
- ▣ способ группировки;
- ▣ предварительное преобразование.

Метод оценки



а) использование известных

неравенств

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

неравенство Коши

б) приведение к сумме неотрицательных

выражений

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_{\Pi} - a_{\Pi})^2 =$$

с

Метод решения относительно одной переменной.



- выделение целой части;
- использование дискриминанта (неотрицательность);
- решение уравнений в целых числах как квадратных относительно какой-либо переменной.

Выводы:



- к решению неопределенных уравнений в целых числах уравнение вида $ax + by = c$ применяется теория делимости; для линейных уравнений с двумя переменными, т.е. уравнения вида $ax + by = c$, алгоритм решения существует; при любых взаимно простых коэффициентах при неизвестных уравнение имеет бесконечное множество решений;

- при решении неопределенных уравнений в целых числах применяются свойства, оценка выражений, входящих в уравнение; выражение одной переменной через другую и выделение целой части дроби; метод разложения многочлена на множители, метод полного перебора всех возможных значений переменных, входящих в уравнение; метод, основанный на выделении полного квадрата; решение уравнений с двумя переменными как квадратных относительно одной из переменных.

Благодарю

за

внимание