

# ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

# Решение систем линейных уравнений

- 1. Определить, является система совместной (имеет решение) или несовместной (не имеет решения).
- 2. Если система совместна, то выяснить, является ли она определённой (т. е. имеет единственное решение) или неопределённой (т. е. имеет множество решений).
- 3. Если совместная система определена, то требуется найти её единственное решение.
- 4. Если совместная система не определена, то надо найти общее решение, а затем частное, если требуется по условию задачи.

# Метод Крамера (метод определителей)

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})X_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})X_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

В общем случае

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \cdot X_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot X_2 = \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta \cdot X_n = \Delta_n \end{array} \right.$$

# Определитель системы 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

# Определитель системы 3-го порядка

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

# Основные свойства определителей.

**Свойство 1.** Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо *i*-строки на их алгебраические дополнения

$$\Delta_{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} .$$

**Свойство 2.** Сумма произведений элементов *i*-той строки на алгебраические дополнения любой другой строки равняется нулю.

# СВОЙСТВО 3

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_1 & a_{32} + b_2 & a_{33} + b_3 \end{vmatrix} = D_1 + D_2 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$



**Свойство 4.** Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Это свойство называется *транспонированием определителя* и читается так: *транспонирование определителя не меняет его величины*.

**Следствие.** Правила (свойства), сформулированные для строк, верны и для столбцов (и наоборот).

**Свойство 5.** Перестановка двух строк (или двух столбцов) определителя равносильна умножению его на  $(-1)$ .

Например, 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**Свойство 6.** Умножение всех элементов одного столбца (или одной строки) определителя на любое число  $\lambda$  равносильно умножению определителя на это число  $\lambda$ . Иначе, если все элементы какого-либо столбца содержат общий множитель, его можно вынести за знак определителя.

$$\text{Например, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**Свойство 7.** Если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на любой общий множитель  $\lambda$ , то величина определителя не изменится.

$$\text{Например, } \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**Свойство 8.** Если определитель имеет два одинаковых столбца (или две одинаковых строки), то он равен нулю.

**Свойство 9.** Если все элементы некоторого столбца (или некоторой строки) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

**Свойство 10.** Если элементы двух столбцов (или двух строк) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказывается с помощью свойств 6 и 8.

Например,  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ , т. к. первый и второй

столбец определителя пропорциональны.

**Свойство 11.** Если в определителе какой-либо столбец (строка) является линейной комбинацией других столбцов (строк), такой определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21} + \beta a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{31} + \beta a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказывается с помощью свойств 3 и 6.

**Определение 1.13.** Если определитель  $D$  квадратной матрицы  $A$  отличен от нуля, то матрица  $A$  называется невырожденной.

**Замечание.** Если квадратные матрицы  $A, B$  – одного порядка, то  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .





**Теорема 1.2.** (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1.3) совместна тогда, и только тогда, когда ранг основной матрицы этой системы равен рангу её расширенной матрицы.

# Матрицы. Определения и классификация

**Определение 1.1.** Прямоугольная таблица, составленная из каких-либо элементов, имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется матрицей размера  $m \times n$ .

Приняты следующие обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn},$$

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\| = \|a_{ij}\|_{mn},$$

где  $a_{ij}$  называются *элементами матрицы*; это могут быть числа, функции, векторы и т.д. Первый индекс  $i$  – номер строки ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), второй  $j$  – номер столбца ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).