ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Решение систем линейных уравнений

- 1. Определить, является система совместной (имеет решение) или несовместной (не имеет решения).
- 2. Если система совместна, то выяснить, является ли она определённой (т. е. имеет единственное решение) или неопределённой (т. е. имеет множество решений).
- 3. Если совместная система определена, то требуется найти её единственное решение.
- 4. Если совместная система не определена, то надо найти общее решение, а затем частное, если требуется по условию задачи.

Метод Крамера
(метод определителей)

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})X_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})X_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

В общем случае

$$\begin{cases} \Delta \cdot X_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot X_2 = \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta \cdot X_n = \Delta_n \end{cases}$$

Определитель системы 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель системы 3-го порядка

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Основные свойства определителей.

Свойство 1. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо *i-строки* на их алгебраические дополнения

$$\Delta_{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

Свойство 2. Сумма произведений элементов i–той строки на алгебраические дополнения любой другой строки равняется нулю.

Свойство 3

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_1 & a_{32} + b_2 & a_{33} + b_3 \end{vmatrix} = D_1 + D_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Это свойство называется *транспонированием определителя* и читается так: *транспонирование определителя не меняет его величины.*

Следствие. Правила (свойства), сформулированные для строк, верны и для столбцов (и наоборот).

Свойство 5. Перестановка двух строк (или двух столбцов) определителя равносильна умножению его на (-1).

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Свойство 6. Умножение всех элементов одного столбца (или одной строки) определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ. Иначе, если все элементы какого-либо столбца содержат общий множитель, его можно вынести за знак определителя.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Свойство 7. Если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на любой общий множитель λ, то величина определителя не изменится.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Свойство 8. Если определитель имеет два одинаковых столбца (или две одинаковых строки), то он равен нулю.

Свойство 9. Если все элементы некоторого столбца (или некоторой строки) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 10. Если элементы двух столбцов (или двух строк) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказывается с помощью свойств 6 и 8.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, т. к. первый и второй столбец определителя пропорциональны.

Свойство 11. Если в определителе какой-либо столбец (строка) является линейной комбинацией других столбцов (строк), такой определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21} + \beta a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{31} + \beta a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказывается с помощью свойств 3 и 6.

Определение 1.13. *Если определитель D квадратной матрицы A отличен от нуля, то матрица A называется невырожденной.*

Замечание. Если квадратные матрицы A, B – одного порядка, то $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m. \end{cases}$$

Теорема 1.2. *(Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1.3) совместна тогда, и только тогда, когда ранг основной матрицы этой системы равен рангу её расширенной матрицы.*

Матрицы. Определения и классификация

Определение 1.1. Прямоугольная таблица, составленная из каких-либо элементов, имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей размера m × n.

Приняты следующие обозначения матриц:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{mn},$$

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}=\left\|a_{ij}\right\|_{mn},$$

где a_{ij} называются *элементами матрицы;* это могут быть числа, функции, векторы и т. д. Первый индекс i – номер строки ($i = 1, 2, \ldots, m$), второй j – номер столбца ($j = 1, 2, \ldots, n$).