

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



элективный курс для учащихся 9 класса

Содержание:

- Предмет теории вероятностей
- $n!$
- Перестановки
- Размещения
- Сочетания
- События
- Вероятность события
- Условная вероятность
- Сумма вероятностей
- Умножение вероятностей
- Полная вероятность

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий возможности наступления какого – либо события в определенных условиях.

Основатели: французские ученые 17 века
Пьер Ферма и Блез Паскаль

Комбинаторика – раздел математики о выборе и расположении элементов множества на основании каких – либо условий



n – факториал - произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 2)(n - 1)n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Вычисли:

$$5! : 3! =$$

$$4! : 6! =$$

$$15! \cdot 16 =$$

$$(n - 1)! \cdot n =$$

Ответы:

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$1 : (5 \cdot 6) = 1/30$$

$$16!$$

$$n!$$



Перестановки из n элементов – каждое
расположение этих элементов в
определенном порядке

$$P_n = n!$$

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

**Пустое множество можно
упорядочить одним
способом, т. е. $0! = 1$**



Решите задачи:

1

$$4! = 24$$

2

$$7! = 5040$$

$$3! = 6$$

- 1) $1+3+5+7 = 16$ – сумма цифр каждого из чисел
- 2) $4! = 24$ – всего таких чисел
- 3) $16 \cdot 24 = 384$ – сумма цифр всех таких чисел

а) $1 \cdot 3! = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (для цифры 3 одно расположение, для оставшихся трех $1 \cdot 2 \cdot 3$)

б) т. к. кратно 15, то делится на 3 и 5. сумма цифр числа $3+5+7+9=24$ делится на 3, а чтобы делилось и на 5, оно должно оканчиваться цифрой 5, т. е. для цифры 5 – 1 расположение, для остальных трех цифр 3! Ответ: 6

1) Число перестановок для букв к, о, н $3!=6$

2) Число перестановок для букв кон-у-с $3!=6$

3) Всего перестановок $6 \cdot 6 = 36$

1) Число способов для расположения сборников стихов $5!=120$

2) Число способов для расположения сборников стихов и 7 оставшихся книг $8!= 40320$

3) Всего способов $120 \cdot 40320 = 4\ 838\ 400$

$$5! \cdot 5! = 120 \cdot 120 = 14\ 400$$

Размещения – комбинации из m элементов по n , ($n < m$), которые отличаются друг от друга или самими элементами, или порядком элементов

$$A_m^n - A \text{ из } m \text{ по } n$$

m – число всех элементов множества

n – число элементов в каждой комбинации

$$A_4^2 = 12$$

Число размещений из 4 элементов по 2 равно 12

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots$$

n множителей

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

(4 группы по 3 комбинации)

$$A_m^n = m! / (m - n)!$$

$$A_4^2 = 4! / (4 - 2)! = 24 / 2 = 12$$

$$A_m^m = m!$$



Решите задачи:

1.

$$A^3_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ способа}$$

2.

$$A^2_{30} = 30 \cdot 29 = 870 \text{ способов}$$

3.

$$A^3_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ способов}$$

4.

$$A^2_6 = 6 \cdot 5 = 30 \text{ способов}$$

$$A^4_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$A^6_6 = 6! = 720$$

5.

1. $A^3_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ чисел всего;

2. $A^2_6 = 6 \cdot 5 = 30$ чисел, которые начинаются с нуля;

3. $210 - 30 = 180$ чисел всего

6.

$$A^7_{10} - A^6_9 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (10 - 1) = 544320 \text{ номеров}$$

Сочетания – все комбинации из m элементов по n , которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом ($n \leq m$)

C_m^n – С из m по n

**Число сочетаний
из m элементов по n**

$$C_4^2 = 6$$

Два сочетания
отличаются друг от
друга хотя бы одним
элементом

AB и BA – не
сочетания.

В сочетаниях порядок
не имеет значения:
 ABC, BAC, CBA – в
сочетаниях это одна
комбинация



$$C_m^n = A_m^n / P_n$$

$$C_4^2 = A_4^2 / P_2 = (4 \cdot 3) / 2 = 12 : 2 = 6$$

$$C_m^n = m! / (n!(m - n)!)$$

$$C_4^2 = 4! / (2!(4 - 2)!) = 3 \cdot 4 / 2 = 12 : 2 = 6$$

основное свойство сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

Упрощает вычисления, если $n > \frac{1}{2} m$

$$C_m^m = m! / (m!(m - m)!) = 1$$
$$0! = 1$$



Решите задачи:

1
$$C^3_{30} = 30!:(3!(30 - 3)!) =$$
$$(28 \cdot 29 \cdot 30):6 = 4060$$

2
$$C^2_{78} = 78!:(2! \cdot 76!) =$$
$$(77 \cdot 78):2 = 3003$$

3
$$C^5_{36} = 36!:(5! \cdot 31!) =$$
$$(32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36):(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 376992$$

$$C^3_{80} \cdot C^1_3 = 246\,480$$

$$C^4_{16} \cdot C^3_{12} = 400\,400$$

Испытание – всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами в одинаковых условиях



Задания:

1. Укажите среди данных событий случайные, достоверные, невозможные: а) свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом; б) более двух попаданий в мишень при двух выстрелах; в) в следующем году снег в Бекетовской выпадет в понедельник; г) не более двух попаданий в мишень при двух выстрелах; д) в следующем году снег в Бекетовской не выпадет; е) при бросании кубика выпадет четное число очков; ж) в следующем году снег в Бекетовской выпадет.

а, в, е

г, ж

б, д

2. Какие пары событий совместные и какие несовместные? а) идущий впереди человек работает инженером; идущего впереди человека зовут Иваном; б) вышедший из библиотеки человек является офицером; вышедший из библиотеки человек – допризывник; в) наудачу взятая цифра кратна 5; наудачу взятая цифра больше 7; г) наудачу взятое двузначное число окажется нечетным; наудачу взятое двузначное число разделится на 73.

а, г

б, в

3. Какие исходы возможны при следующих испытаниях:

- а) производится анализ группы крови человека; I, II, III, IV
б) у случайного прохожего спрашивают, на какой день недели приходится его День рождения; 7 исходов
в) производится 5 выстрелов в мишень. 6 исходов

4. Какие из перечисленных событий образуют полную систему событий: а) «одно попадание», «2 попадания» и «3 попадания» при трех выстрелах в мишень; б) «задумано четное число» и «задумано нечетное число» при задумывании целого числа; в) «задумано простое число» и «задумано составное число» при задумывании натурального числа. 6

5. Являются ли противоположными события: а) «два промаха при двух выстрелах» и «хотя бы одно попадание при двух выстрелах»; б) «хотя бы один герб при двух бросаниях монеты» и «хотя бы одна цифра при двух бросаниях монеты»; в) «выпадение на игральной кости менее трех очков» и «выпадение на игральной кости более трех очков»; г) «выпадение в сумме 12 очков» и «выпадение в сумме не более 12 очков» при бросании двух костей.

а, в

Вероятность события – это число, которое показывает возможность наступления искомого события A в определенных условиях

Число бросков	отн. частота выпадения «орла»
4040	0,5070
4092	0,5005
10 000	0,4979
20 480	0,5068
24 000	0,5005

Определение вероятности

Статистическое
(опыты)
 $P(A) \sim m/n$
 m – все исходы
 n – нужные исходы

Классическое
(логика)
 $P(A) = m/n$
 m – благоприятные исходы
 n – равновозможные исходы

$P(A)$
probabilite



Решите задачи:

1.

$$n = 6, m = 2, P(A) = 2 : 6 = 1/3$$

2.

Равновозможные исходы $n = 4$, благоприятные исходы $m = 1$

1 монета о о р р

о - орел

2 монета о р р о

р – решка

$$P(A) = 1 : 4 = 0,25 = 25\%$$

3.

а) $n = 25, m = 25 - (8 + 11) = 6, P(A) = 6 : 25 = 0,24 = 24\%$

б) $n = 25, m = 8 + 11 = 19, P(A) = 19 : 25 = 0,76$

4.

а) $n = C_{36}^3, m = C_{35}^3, P(A) = 11/12$

б) для противоположных событий $P(A) + P(\bar{A}) = 1,$

значит $P(\bar{A}) = 1 - 11/12 = 1/12$

Вероятность события A при условии, что наступило событие B , называют *условной вероятностью* события A

$P(A/B)$ – *условная вероятность события A , или вероятность события A при условии, что наступило событие B*



$$P(A/B) = P(AB) : P(B)$$

$P(AB)$ – вероятность одновременного наступления событий A и B



Пример: пусть в корзине находится 30 последовательно пронумерованных шаров.

Событие А: извлечен шар с номером, кратным трем.

Событие В: извлечен шар с номером, большим 10.

Как эти события связаны друг с другом?

Найдем вероятность наступления события

А:

$n = 30$ – всего шаров,
 $m = 10$ – число шаров,
номер которых кратен
3,

$$P(A) = m/n = 10/30 = 1/3$$

Найдем вероятность события А при условии наступления события В, т. е. извлечен шар, с номером, кратным 3, но большим 10.

$n = 20$ – всего шаров с номером, большим 10,
 $m = 10 - 3 = 7$ шаров с номером, большим 10, и кратных 3.

$$P(A) = m/n = 7/20, \text{ или } P(A/B) = 7/20$$

$$P(A/B) > P(A)$$

*Наступление события В
повысило вероятность
события А*

$$P(AB) = 7/30$$

$$P(B) = 20/30$$

$$P(A/B) = 7/30 : 20/30 = 7/20$$

Сложение вероятностей

СУММОЙ конечного числа несовместных событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них
А или В

$A + B$ – сумма двух событий

$A_1 + A_2 + \dots + A_n$ – сумма n событий

$P(A) + P(B) + \dots + P(M) = 1$ – вероятность суммы событий полной системы событий;
 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ – сумма вероятностей противоположных событий



Умножение вероятностей

Произведением конечного числа независимых событий называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдёт.

А и В

$A \cdot B$ –
произведение
двух событий

$$P(ABC...N) = P(A)P(B)P(C)...P(N)$$



ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть полная система состоит из несовместных событий B_1, B_2, B_3, \dots

Рассматриваемое событие A может произойти только вместе с одним из событий B_1, B_2, B_3, \dots

*В этом случае находят так называемую **ПОЛНУЮ ВЕРОЯТНОСТЬ** события A*

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \dots$$

