Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)$$

Формула Бейеса

$$P(Hi|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

Задачи

- 1. В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Используя формулу полной вероятности определить, какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта ?

Решение:

Пусть **A** - событие, состоящее в том, что взятая деталь окажется первого сорта, а **H1**, **H2** и **H3** - гипотезы, что она изготовлена соответственно на 1, 2 и 3 станке.

Вероятности этих гипотез соответственно равны: $P(H_1) = 0.51$

$$P(H_2) = 0.24$$

$$P(H_3) = 0.25$$

далее, из условия задачи следует, что:

$$P(A \mid H_1) = 0{,}9;$$

$$P(A \mid H_2) = 0{,}8;$$

$$P(A \mid H_3) = 0{,}7.$$

Используя формулу полной вероятности, получим искомую вероятность

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) =$$

$$= 0{,}51 \cdot 0{,}9 + 0{,}24 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}826$$

Задачи

- 2. В водоеме обнаружено загрязнение с превышением ПДК.
- Потенциальные источники - два предприятия, причем выбросы на первом происходят в 9 раз чаще, чем на втором.
- Только 15% сбросов первого предприятия превышают ПДК. Для второго предприятия эта вероятность равна 92%
- Кто виноват?!
- Решение:

$$P(H_1) = 0.9 \quad P(A|H_1) = 0.15$$

$$P(H_2) = 0.1 \quad P(A|H_2) = 0.92$$

$$P(H_1|A) = \frac{0.15 \cdot 0.9}{0.15 \cdot 0.9 + 0.92 \cdot 0.1} = 0.595$$

$$P(H_2|A) = \frac{0.92 \cdot 0.1}{0.15 \cdot 0.9 + 0.92 \cdot 0.1} = 0.405$$

Задачи

3. Два стрелка подбрасывают монетку и выбирают, кто из них стреляет по мишени (одной пулей). Первый стрелок попадает по мишени с вероятностью 1, второй стрелок — с вероятностью 0.00001. Пуля попала в цель. Кто стрелял?

Решение:

Можно сделать два предположения:

$H_1 = \{\text{стреляет 1-й стрелок}\}$ $H_2 = \{\text{стреляет 2-й стрелок}\}$

$\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(H_2) = 1/2$

Рассмотрим событие : $A = \{\text{пуля попала в мишень}\}$

Известно, что : $\mathsf{P}(A|H_1) = 1, \quad \mathsf{P}(A|H_2) = 0.00001.$

Поэтому вероятность пуле попасть в мишень $\mathsf{P}(A) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0.00001$

Очевидно, что первая из этих гипотез много вероятнее второй (а именно, в 100000 раз). Действительно,

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{1/2 \cdot 1}{1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0.00001} = \frac{1}{1 + 0.00001}; \quad \mathsf{P}(H_2|A) = \frac{1/2 \cdot 0.00001}{1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0.00001} = \frac{0.00001}{1 + 0.00001}.$$

Задачи

4. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике находится 26 белых шаров, во втором 15 белых и 11 черных, в третьем ящике 26 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что белый шар вынут из первого ящика.

Решение:

Пусть **A** - событие, состоящее в том, что взятый шар окажется белым, а $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ - гипотезы, что шар был взят из 1-го , 2-го, 3-го ящика.

Вероятности указанных гипотез равны:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

Из условия задачи следует, что:

$$P(A \mid H_1) = 1;$$
$$P(A \mid H_2) = 15/26$$
$$P(A \mid H_3) = 0.$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)} =$$

$$= \frac{1/3 \cdot 1}{1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 15/26 + 1/3 \cdot 0} = \frac{26}{41}$$

Предпоследняя задача

- 5. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что второй студент взял «хороший» билет.
- Решение:
- A={второй студент взял «хороший» билет}
- H_1={первый взял «хороший» билет},
- H_2={первый взял «плохой» билет}.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) =$$
$$= 5/25 * 4/24 + 20/25 * 5/24 = 1/5$$

Последняя задача

- 6. Из 10 учеников, пришедших на экзамен, трое подготовились отлично, четверо хорошо, двое удовлетворительно и один совсем не подготовился. В билетах 20 вопросов. Отличники могут ответить на все вопросы, хорошисты – на 16, троечники – на 10, а двоечники – на 5 вопросов. Каждый ученик получает 3 вопроса. Приглашенный первый ученик ответил на три вопроса. Какова вероятность, что он отличник?
- Решение:
- A={ученик ответил на три вопроса},
- H_1={приглашенный ученик отличник},
- H_2={ученик-хорошист},
- H_3={ученик-троечник},
- H_4={ученик-двоечник}.

$$P(H_1) = 0{,}3;\quad P(H_2) = 0{,}4;\quad P(H_3) = 0{,}2;\quad P(H_4) = 0{,}1.$$

$$P(A \mid H_1) = 1;\quad P(A \mid H_2) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} = 28/57;\quad P(A \mid H_3) = \frac{C_{10}^3}{C_{20}^3} = 2/19;\quad P(A \mid H_4) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = 1/114$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1)\cdot P(A \mid H_1) + P(H_2)\cdot P(A \mid H_2) + P(H_3)\cdot P(A \mid H_3)} =$$

$$= \frac{0.3\cdot 1}{0.3\cdot 1 + 0.4\cdot 28/57 + 0.2\cdot 2/19 + 0.1\cdot 1/114} \approx 0.58$$