

# Франсуа Виет и его теорема как инструмент для решения уравнений

Человек живет, пока думает. Решайте задачи и живите долго!

Человек живет, пока думает. Решайте задачи и живите долго!

# Франсуа Виет

(1540-1603)

**В 2010 году исполнилось 470 лет со дня рождения замечательного французского математика, положившего начало алгебре как науке о преобразовании выражений, создателя буквенного исчисления, Франсуа Виета.**

# Актуальность

- **Уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений.**
- **Уравнения решали двадцать пять веков назад. Они создаются и сегодня – как для использования в учебном процессе, так и для конкурсных экзаменов в вузы, для олимпиад самого высокого уровня.**

---

## Цель:

изучить материал о великом учёном, французском математике – Франсуа Виете, рассмотреть квадратные уравнения частного порядка, научиться использовать теорему Виета как инструмент для решения уравнений и задач, связанных с корнями и коэффициентами уравнения  $n$ -ой степени.

## *Задачи:*

**выяснить из различных источников кто такой Франсуа Виет, его вклад в математику;**

**узнать историю его жизни;**

**повторить понятие квадратного уравнения,**

**узнать об уравнениях частного порядка и их решении рациональным способом;**

**узнать какие уравнения называются**

**уравнениями высших степеней;**

**рассмотреть теорему Виета как инструмент для решения уравнений и других задач.**

# Кто Вы, господин Виет?



**Франсуа Виет – крупнейший французский математик 16 века**  
Родился в 1540 году во Франции в городе Фонтене-ле-Конт. По образованию юрист. Но все свое свободное время он отдавал занятиям математикой, а также астрономией. Особенно увлеченно он начал работать в области математики с 1584г. Виет детально изучил труды, как древних, так и современных ему математиков. Разработал почти всю элементарную алгебру. Известны «формулы Виета», дающие зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения. Ввел буквенные обозначения для коэффициентов в уравнениях.

# Математические открытия

---



Франсуа Виет  
1540—1603

Главные открытия Ф. Виета изложены в знаменитом **«Введении в аналитическое искусство»**, опубликованном в 1591 году. Основной замысел ученого замечательно удался: **началось преобразование алгебры в мощное математическое исчисление**. Франсуа называл алгебру аналитическим искусством. Он писал в письме к де Партене: **«Все математики знали, что под алгеброй скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти...»**



# Интересные факты из жизни и деятельности ученого

---

- Франсуа Виет, вычисляя периметры вписанного и описанного **322 216**-угольников, получил **9** точных десятичных знаков.
- Впервые обозначать десятичные дроби с помощью запятой предложил Франсуа Виет. До него изображение дробей было весьма сложным. Так, например, дробь **0,3469** писалась так: **3(1)4(2)6(3)9(4)**.
- Виет первым стал обозначать буквами не только неизвестные, но и данные величины. Тем самым он внедрил в науку великую мысль о возможности выполнять алгебраические преобразования над символами, т.е. ввести понятие математической формулы.
- Ученый мог работать по трое суток без сна!

- **Теорему Виета можно обобщить на многочлены любой степени.**
- **Непосредственно применение трудов Виета очень затруднялось тяжелым и громоздким изложением. Из-за этого они полностью не изданы до сих пор.**
- **Г.Г. Цейтен отмечал, что чтение работ Виета затрудняется несколько изысканной формой, в которой повсюду сквозит его большая эрудиция, и большим количеством изобретенных им и совершенно не привившихся греческих терминов. Потому влияние его, столь значительное по отношению ко всей последующей математике, распространялось сравнительно медленно.**
- **Виет первым стал применять скобки, которые, правда, у него имели вид не скобок, а черты над многочленом.**

## ***Квадратные уравнения***

Квадратным уравнением называют уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

---

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – любые действительные числа, причём  $a \neq 0$ .

Квадратное уравнение называют приведённым, если его старший коэффициент равен 1.

**Пример:**

$$x^2 + 2x + 6 = 0.$$

Квадратное уравнение называют не приведенным, если старший коэффициент отличен от 1.

**Пример:**

$$2x^2 + 8x + 3 = 0.$$

Полное квадратное уравнение – квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых, иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты  $b$  и  $c$  отличны от нуля.

## *Теорема Виета*

Очень любопытное свойство корней квадратного уравнения обнаружил

---

французский математик Франсуа Виет. Это свойство назвали теорема Виета:

**Чтобы числа  $x_1$  и  $x_2$  являлись корнями уравнения:**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

необходимо и достаточно выполнения равенства

$$x_1 + x_2 = -b/a \text{ и } x_1 x_2 = c/a$$

Пример.

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 6$$

По праву в стихах быть воспета  
О свойствах корней теорема Виета.

~~Что лучше, скажи, постоянства~~  
такого:

Умножишь ты корни и дробь уж  
готова:

В числителе  $C$ , в знаменателе  $A$ ,  
А сумма корней тоже дроби равна  
Хоть с минусом дробь эта, что за  
беда-

В числителе  $B$ , в знаменателе  $A$ .

И. Дырченко

## **Квадратные уравнения частного характера**

1) Если  $a + b + c = 0$  в уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$ , то  
 $x_1 = 1$ , а  $x_2 = \frac{c}{a}$

2) Если  $a - b + c = 0$ , в уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$ , то:

$$x_1 = -1, \text{ а } x_2 = \frac{c}{a}$$

3) Метод “переброски”

Корни квадратных уравнений  $y^2 + by + ac = 0$  и  $ax^2 + bx + c = 0$

связаны соотношениями:

$$x_1 = \frac{y_1}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{y_2}{a}$$

# Пример

---

$$418x^2 - 1254x + 836 = 0$$

Этот пример очень тяжело решить через дискриминант, но, зная выше приведенную формулу его с легкостью можно решить.

$$a = 418, b = -1254, c = 836.$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

# Формула Виета для многочленов (уравнений) высших степеней

---

Формулы, выведенные Виетом для квадратных уравнений, верны и для многочленов высших степеней.

Пусть многочлен

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  имеет  $n$  различных корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

В этом случае он имеет разложение на множители вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Разделим обе части этого равенства на  $a_0 \neq 0$  и раскроем в первой части скобки. Получим равенство:

$$x^n + \left( \frac{a_1}{a_0} \right) x^{n-1} + \dots + \left( \frac{a_n}{a_0} \right) = x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x^{n-1} +$$

$$+ x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) x^{n-2} + \dots + (-1)^n x_1x_2 \dots x_n$$



Но два многочлена тождественно равны в том и только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны. Отсюда следует, что выполняется равенство

---

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = - \frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Например, для многочленов третьей степени  $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  имеем тождества

$$x_1 + x_2 + x_3 = - \frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 = - \frac{a_3}{a_0}$$

Если старший коэффициент многочлена  $a_0 \neq 1$ , то для применения формул Виета нужно разделить все коэффициенты на  $a_0$ .

В этом случае формулы Виета дают выражение для отношений всех коэффициентов к старшему. Из последней формулы Виета следует, что если корни многочлена целочисленные, то они являются делителями его свободного члена, который также целочисленен.

# Обратные корни

---

Напишем приведённое кубическое уравнение

$y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0$  , корни которого обратны  
корням уравнения  $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$

Решение:

1) Пусть  $x_1, x_2, x_3$  - корни уравнения  $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$

2) Т.к.  $a = 1$  , то по формулам Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = -5 \end{cases}$$

3) Пусть  $y_1, y_2, y_3$  - корни уравнения  $y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0$

---

4) Тогда  $y_1 = \frac{1}{x_1}$ ,  $y_2 = \frac{1}{x_2}$ ,  $y_3 = \frac{1}{x_3}$ .

5) Т.к.  $a=1$ , то по формулам Виета

$$b_1 = -(y_1 + y_2 + y_3) = -\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -\frac{7}{5}$$

$$b_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{3}{5}$$

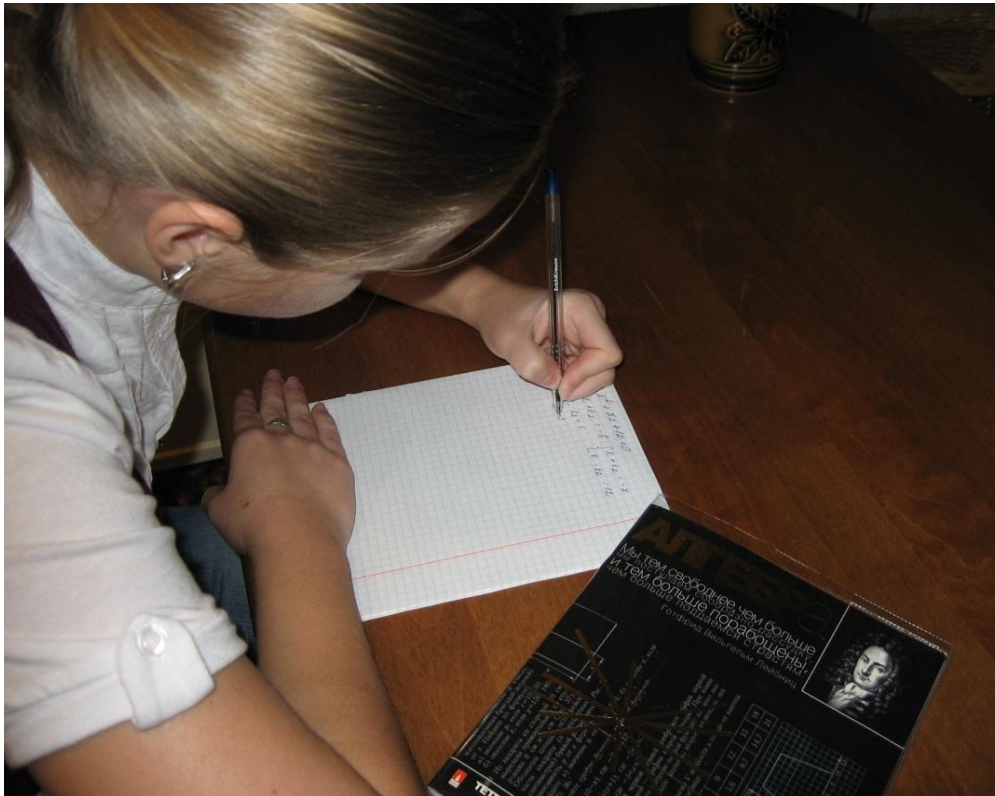
$$b_3 = -y_1y_2y_3 = -\frac{1}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{5}$$

6) Следовательно искомое уравнение имеет вид:

$$y^3 + \frac{7}{5}y^2 - \frac{3}{5}y + \frac{1}{5} = 0, \text{ или } 5y^3 + 7y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Покажем, что формулы Виета позволяют рационально решать уравнения 2-й и 3-й степеней.

Проведём эксперимент для уравнения 2-й степени



В это опыте я сравнила время, потраченное на решение уравнения  $x^2+3x+2=0$  через дискриминант, и время на решение этого же уравнения с помощью теоремы Виета. В результате получилось, что в первом случае ученик тратит **35** секунд, а во втором- **15!**

**Вывод:** С формулами Виета можно сэкономить время!

# Проведём эксперимент для уравнения 3-й степени

---

Дано уравнение:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

Ищем корень среди чисел:

$$\pm 1; \pm 3$$

Подбором находим один из корней уравнения, - 1.

Следовательно,  $x^3 - 3x^2 - x + 3$  делится на  $(x + 1)$ .

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 - x + 3 & x + 1 \\
 \hline
 x^3 + x^2 & x^2 - 4x + 3 \\
 \hline
 -4x^2 - x & \\
 -4x^2 - 4x & \\
 \hline
 3x + 3 & \\
 -3x + 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$(x + 1)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad \text{ИЛИ} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

По формулам Виета:

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 1$$

Ответ:  $-1; 1; 3$ .

# Теперь решим то же уравнение с помощью формул Виета

---

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

По формулам Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1 \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$$

Следовательно, корни уравнения равны  $-1; 1; 3$ .

Вывод: формулы Виета позволяют **рационально решить** это уравнение.



---

При решении уравнений было замечено, что  
уравнения

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

и

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

имеют взаимно обратные корни.

# Гипотеза

---

Корни уравнений  $ax^2 + bx + c = 0$

и  $cx^2 + bx + a = 0$ , где  $a \neq 0, c \neq 0$ ,

взаимно обратные.

# Доказательство

---

По формулам Виета из первого уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Рассмотрим числа  $\frac{1}{x_1}$  и  $\frac{1}{x_2}$ .

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}$$

---

Значит, эти числа являются корнями уравнения  $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$ , что равносильно уравнению

$$cx^2 + bx + a = 0$$

	<b>Кол-во чел. опрошенных</b>	<b>Кол-во чел. знающих квадратные уравнения</b>	<b>Кол-во чел. умеющих решать их с помощью т. Виета</b>	<b>Кол-во чел. знающих уравнения высших степеней</b>	<b>Кол-во чел. умеющих решать уравнения высших степеней с помощью т. Виета</b>
9Б класс	25	25	12	18	8
10 класс	14	14	14	2	2
11 класс	14	14	14	2	0
Преподаватели	4	3	3	3	2

---

Спасибо

за

внимание!