

Производная

- Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при Δx , стремящемся к нулю.

Правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Пример

$$(x^2 + x^3)' =$$

$$\left(\frac{1}{x} + 5x - 2\right)' =$$

$$(x^3 + \sqrt{x})' =$$

$$\left(\frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}\right)' =$$

$$(\sqrt{x}(3x^5 - x))' =$$

Производная сложной функции

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Пример

$$((2x - 7)^8)' =$$

$$(\sqrt{4x^2 + 5})' =$$

$$((5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6})' =$$

Производная тригонометрических функций

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Пример

$$(2 \sin x)' =$$

$$(\cos x - \operatorname{tg} x)' =$$

$$\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)' =$$

$$(x^3 \cdot \sin 2x)' =$$

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' =$$

Метод интервалов

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$$

Пример

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$\frac{(x - 2)(x - 4)}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$$

Возрастание (убывание) функции

Найти промежутки возрастания и
убывания функции:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$$

Пример

$$f(x) = x^3 - 27x$$

$$f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$$

- Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции

Признак максимума функции

- Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума

Признак минимума функции

- Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюса, то x_0 есть точка минимума

Пример

- Исследовать на экстремумы функцию

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

Решение

$$y' = (2x^3)' - (15x^2)' + (36x)' + (1)'$$

$$y' = 6x^2 - 30x + 36$$

$$6x^2 - 30x + 36 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

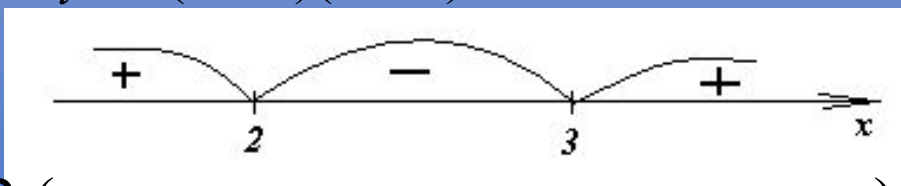
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

$$y' = (x - 3)(x - 2)$$



$x=2$ (меняет знак с плюса на минус) – точка максимума

$x=3$ (меняет знак с минуса на плюс) – точка минимума

$$x_{\max} = 2 \Rightarrow y_{\max} = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 1 = 29$$

$$x_{\min} = 3 \Rightarrow y_{\min} = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 + 1 = 28$$

Исследование функций и построение их графиков

Схема исследования функции (10 класс)

1. Найти область определения и значения данной функции
2. Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т.е. является ли функция: а) четной или нечетной; б) периодической
3. Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат
4. Найти промежутки знакопостоянства функции
5. выяснить, на каких промежутках функция возрастает, а на каких убывает
6. Найти точки экстремума, вид экстремума (max или min) и вычислить значения функции в этих точках
7. Исследовать поведение функции в окрестности характерных точек, не входящих в область определения и при больших (по модулю) значениях аргумента

- Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

Решение

1. Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$
2. Четность, нечетность, периодичность

$$y(-x) = \frac{(-x)^4}{4} - \frac{(-x)^3}{3} - (-x)^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$$

тогда функция является ни четной ни
нечетной

ни периодическая

3. Найдем точки пересечения графика

с Ox ($y = 0$):

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$$

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 16 + 144 = 160$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{160}}{6} = \frac{4 \pm 4\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{3}$$

$$x_2 \approx -1,4$$

$$x_3 \approx 2,8$$

Пересечения с Oy : $x = 0, y = 0$

Возьмем также дополнительные точки:

$$y(1) = -\frac{13}{12}$$

$$y(3) = \frac{9}{4}$$

4. Найдем производную:

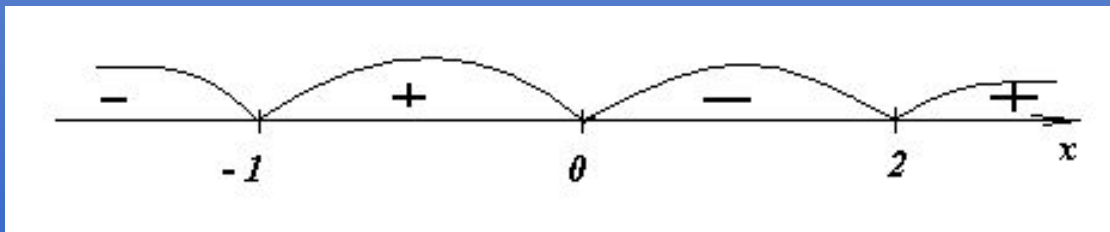
$$y' = \left(\frac{x^4}{4}\right)' - \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (x^2)' = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$





$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

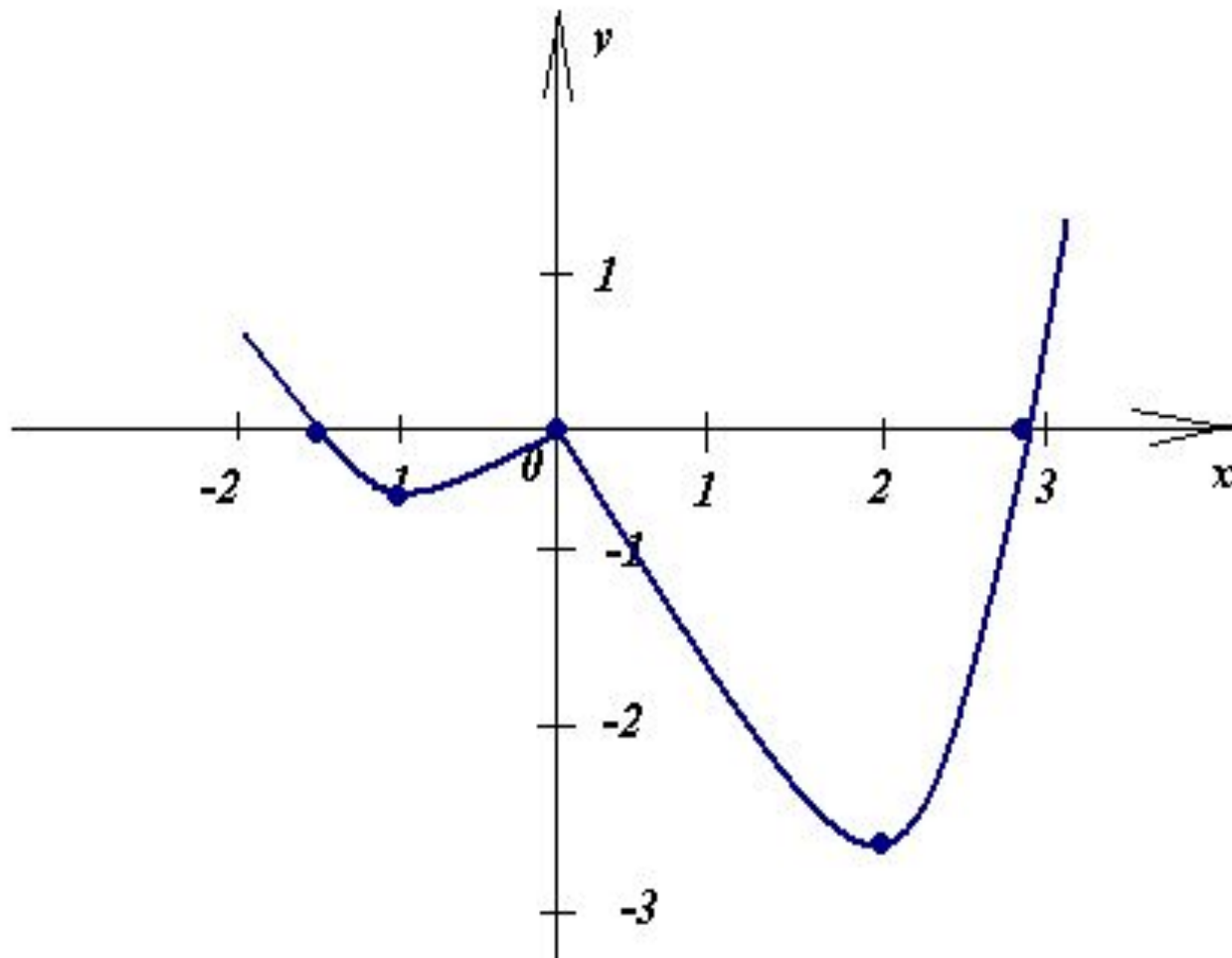
$$x_3 = 2$$



5. Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		$-\frac{5}{12}$		0		$-\frac{8}{3}$	
	<i>убывает</i>	<i>min</i>	<i>возрастает</i>	<i>max</i>	<i>убывает</i>	<i>min</i>	<i>возрастает</i>

6. Строим график:



Наибольшее и наименьшее значение функции

- Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезках, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример

- Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$$

на отрезке $[-2;0]$

Определение первообразной.
Основное свойство первообразной

- Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Пример № 1

- Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на интервале $(-\infty; \infty)$, т.к.

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Пример № 2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$F(x) = ?$$

Решить

$$(\dots)' = 7x$$

$$(\dots)' = \cos x$$

$$(\dots)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\dots)' = 2 \sin x$$

$$(\dots)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\dots)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\dots)' = \sin 3x$$

$$(\dots)' = \sin(2x + 3)$$

Теорема

- Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде

$$F(x) + C,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I , а C – произвольная постоянная

Таблица первообразных

Функция	k (постоянная)	x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Общий вид первообразных для f	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Правило № 1

- Если F есть первообразная для f , а G – первообразная для g , то $F + G$ есть первообразная для $f + g$

Пример

- Найти общий вид первообразных для функции

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$$

Правило № 2

- Если F есть первообразная для f , а k - постоянная, то функция kF – первообразная для kf

Пример

- Найдем одну из первообразных для функции

$$f(x) = 5 \cos x$$

Правило № 3

- Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то

$$\frac{1}{k} F(kx + b)$$

есть первообразная для $f(kx + b)$

Пример

- Найдем одну из первообразных для функции

$$f(x) = \frac{1}{(7 - 3x)^5}$$

Решить

$$f(x) = 2 \sin 3x$$

$$f(x) = 3 \cos 2x$$

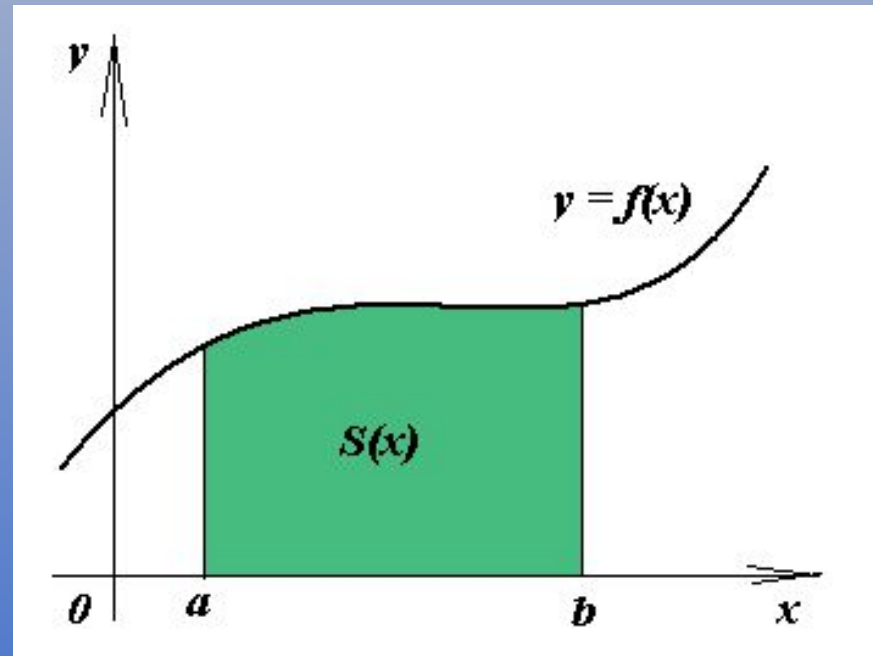
$$f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$$

Площадь криволинейной трапеции

- Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е.

$$S = F(b) - F(a)$$



Пример

- Вычислим площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2$, прямыми $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$

Понятие об интеграле

- Для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f (не обязательно неотрицательной) S_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к некоторому числу. Это число называется *интегралом функции f* от a до b и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»
- Числа a и b – пределы интегрирования: a – нижний предел, b – верхний предел
- Функция f – подынтегральная функция
- x – переменная интегрирования

Формула Ньютона - Лейбница

- Если F – первообразная для f на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример

- Вычислить $\int_{-1}^2 x^2 dx$