

Функции и их графики

Содержание

900igr.net



Содержание

Введение

Понятие функции

Общие свойства функции

Понятие обратной функции

Экстремумы функции. Наибольшее и
наименьшее значение функции

Непрерывность

Элементарные функции



Введение

При изучении явлений окружающего мира и в практической деятельности нам приходится рассматривать величины различной природы: длину, площадь, объём, массу, температуру, время и т. д. В зависимости от рассматриваемых условий одни из величин имеют постоянные числовые значения, у других эти значения переменные. Такие величины соответственно называются постоянными и переменными.

Математика изучает зависимость между переменными в процессе их изменения. Например, при изменении радиуса круга меняется и его площадь, и мы рассматриваем вопрос об изменении площади круга в зависимости от изменения его радиуса.

Математическим выражением взаимной связи реальных величин является идея функциональной зависимости. Понятие функции – важнейшее понятие математики. Слово «функция» (от латинского «Functio» - исполнение обязанностей, деятельность) впервые ввел немецкий ученый Г. Лейбниц.



Понятие функции

Пусть D и E – непустые числовые множества, а x и y – соответственно их элементы. Если каждому $x \in D$ (x принадлежит множеству D) ставится, в соответствии с некоторым законом, только одно значение $y \in E$, то говорят, что между переменными x и y существует функциональная зависимость, и x называют независимой переменной (или аргументом), а y – зависимой переменной (или функцией).

Символическая запись функции: $y = f(x)$ ($x \in D, y \in E$). Множество D называют областью определения функции и обозначают $D(f)$, а множество E называют областью изменения функции – $E(f)$. Говорят еще, что функция f отображает множество D на множестве E .



Общие свойства функции

Четность и нечетность

Периодичность

Нули функции

Промежутки знакопостоянства

Монотонность



Четность и нечетность

Определение: Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

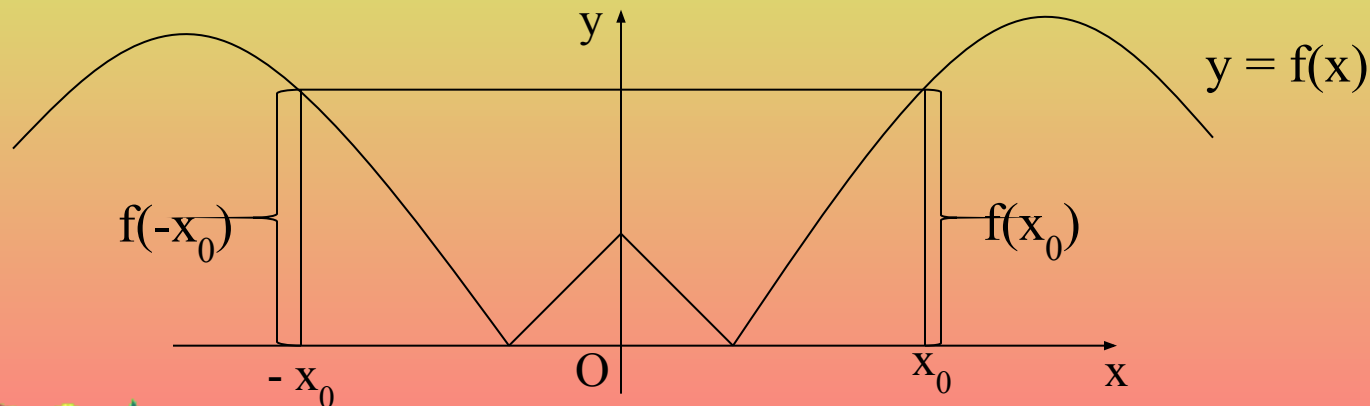
Примеры четных функций:

$$y = x^2; y = x^2 + 5; y = -3x^2 + 1; y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}; y = 3.$$

$$(y = x^2; y(1) = 1^2 = 1; y(-1) = (-1)^2 = 1; y(1) = y(-1)).$$

Согласно определению, четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат.

График четной функции симметричен относительно оси ординат:



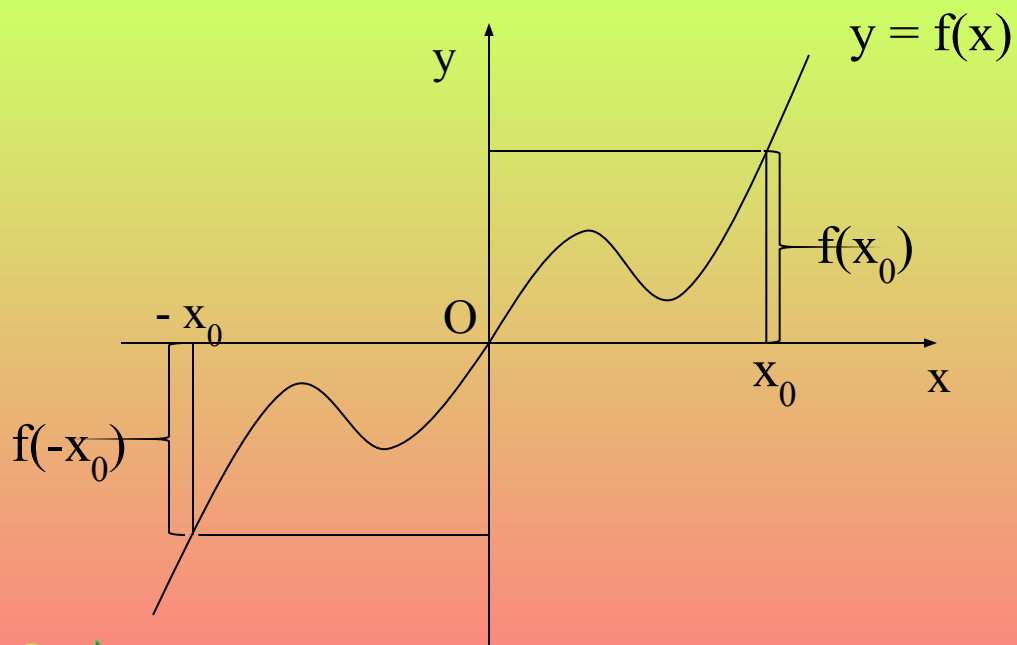
Определение: Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Примеры нечетных функций:

$$y = x^3; y = x^3 + x.$$

$$(y = x^3; y(1) = 1^3 = 1; y(-1) = (-1)^3 = -1; y(-1) = -y(1)).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат:



При построении графиков четной и нечетной функции достаточно построить только правую ветвь графика для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно начала координат для нечетной функции и относительно оси ординат для четной функции.

Произведение двух четных или двух нечетных функций представляет собой четную функцию, а произведение четной и нечетной функций – нечетную функцию.

Конечно, большинство функций не являются ни четными, ни нечетными.

Пример:

$$y = x^3 + x^2$$

$$y(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

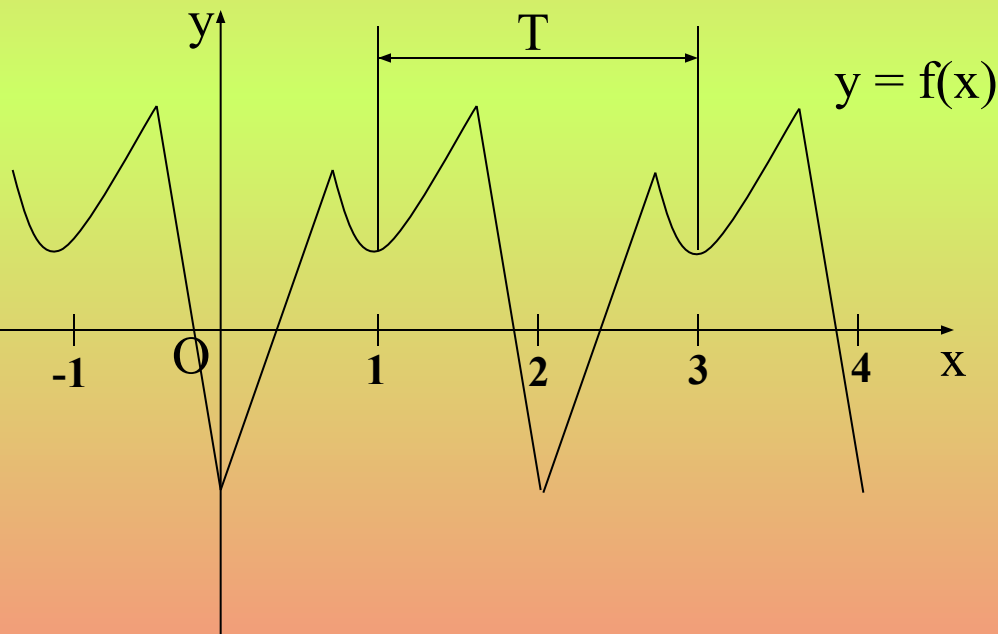
$$y(1) = (1)^3 + (1)^2 = 1 + 1 = 2$$



Периодичность

Определение: Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения x , взятого из области определения, значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T):$$



Число T называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное число периодов. В самом деле, числа вида nT при любом целом n также являются периодом функции $f(x)$, так как $f(x + nT) = f(x + (n - 1)T + T) = f(x + (n - 1)T) = f(x + (n - 2)T + T) = f(x + (n - 2)T) = \dots = f(x)$.

Иногда периодом называют наименьшее их всех чисел $T > 0$, удовлетворяющее данному выше определению. Примеры периодических функций:

$$y = \sin x; y = \operatorname{ctg} x; y = \sin^3 x.$$

Периодической является и всякая постоянная функция, причем ее периодом служит любое ненулевое число. Например: $y = 2$; $y = 10$.



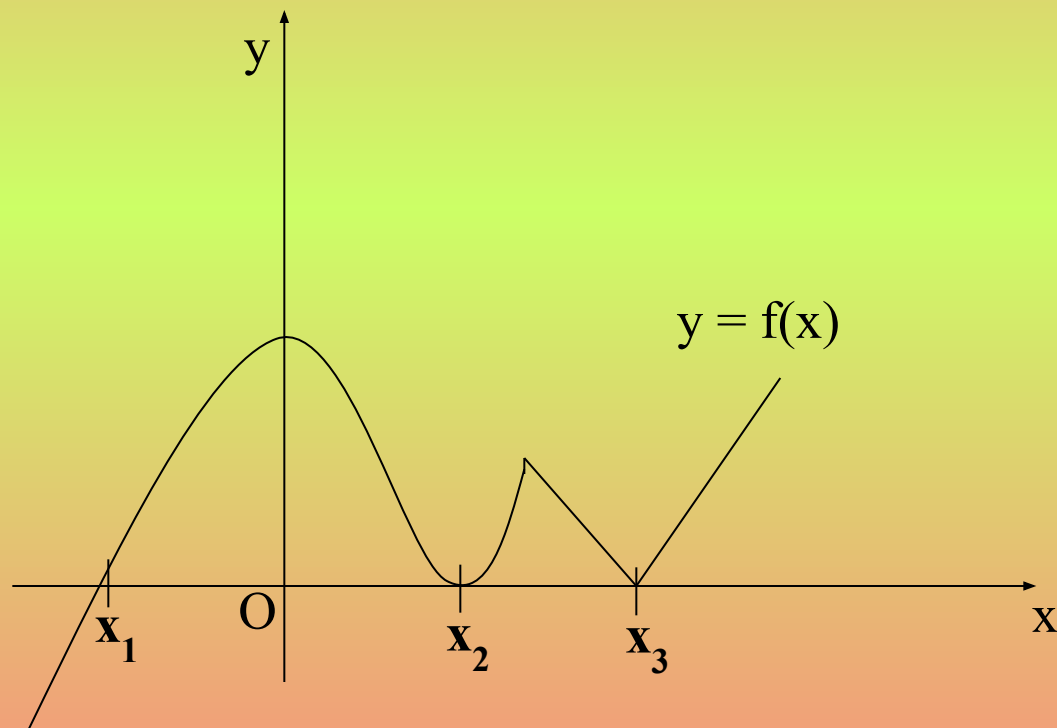
Нули функции

Определение: Нулем функции называется такое действительное значение x , при котором значение функции равно нулю.

Для того, чтобы найти нули функции, следует решить уравнение **$f(x) = 0$** .

Действительные корни этого уравнения являются нулями функции **$y = f(x)$** , и наоборот.

Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается ее, либо имеет общую точку с этой осью.



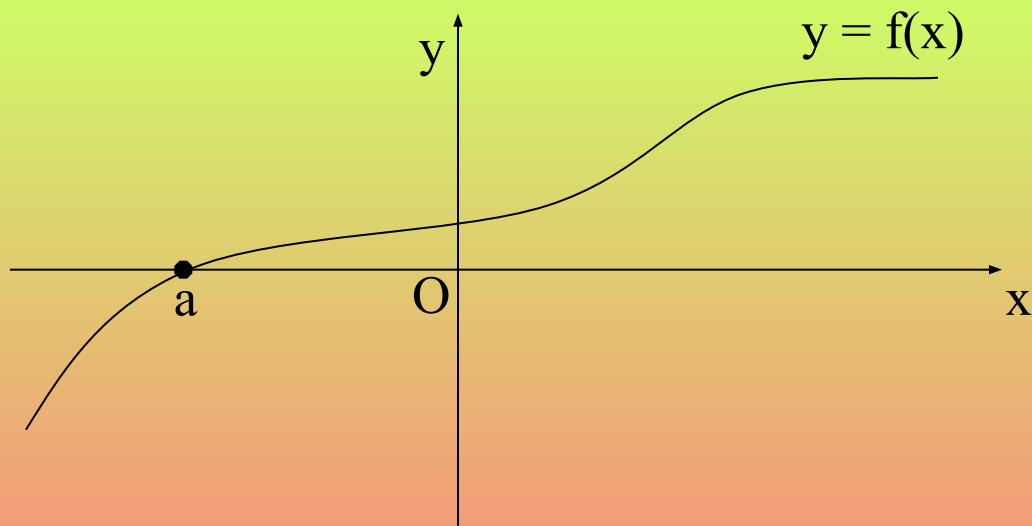
x_1, x_2, x_3 — нули функции $y = f(x)$.



Промежутки знакопостоянства

Определение: Числовые промежутки, на которых непрерывная функция сохраняет свой знак и не обращается в нуль, называются промежутками знакопостоянства.

Над этими промежутками график функции лежит выше оси абсцисс, если $f(x) > 0$, и ниже оси абсцисс, если $f(x) < 0$.



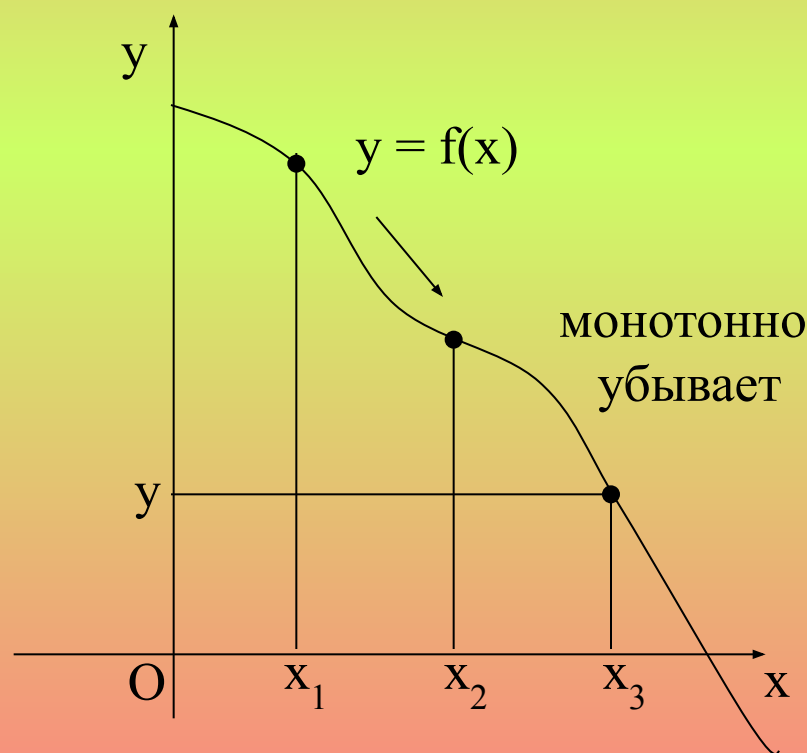
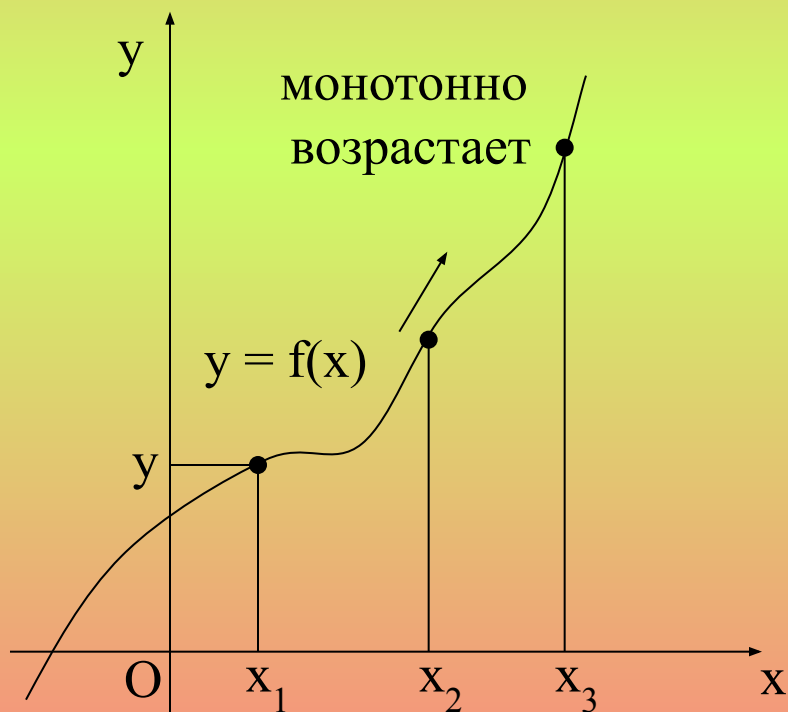
$$f(x) > 0 \text{ при } x > a$$

$$f(x) < 0 \text{ при } x < a$$



МОНОТОННОСТЬ

Функцию называют монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается, и монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается.



Определение: Функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ называется монотонно убывающей на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Интервал (a, b) предполагает взятым из области определения функции.

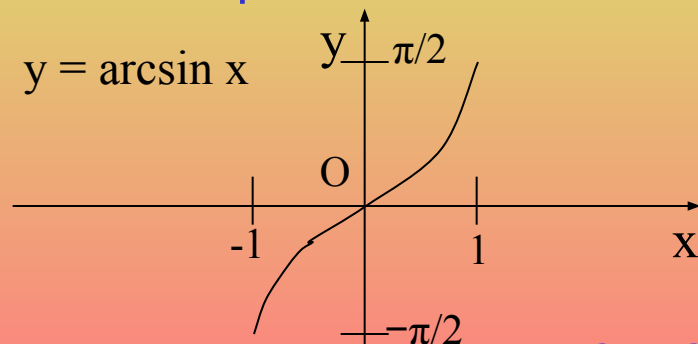
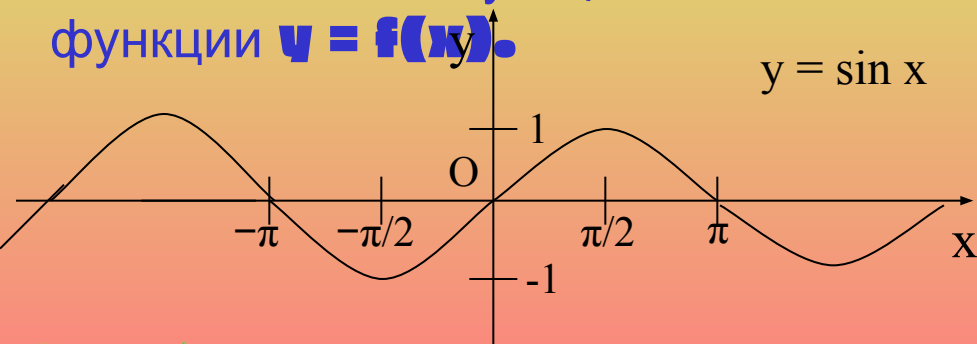


Понятие обратной функции

Функция, принимающая каждое свое значение в единственной точке области определения, называется обратимой. Таким образом, при $k \neq 0$ функция $f(x) = kx + b$ обратима, а функция $f(x) = x^2$ не является обратимой.

Если между величинами x и y существует функциональная зависимость, то, вообще говоря, безразлично, какую из этих величин считать аргументом, а какую - функцией.

Пусть задана функция $y = f(x)$, где y является зависимой переменной, x - аргументом. Очевидно, в этом случае x и y можно поменять ролями, т. е. x будет функцией, а y - аргументом. Тогда рассматриваемая функциональная зависимость между x и y запишется так: $x = \varphi(y)$. Функция $x = \varphi(y)$ называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.



[на главную](#)



Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции

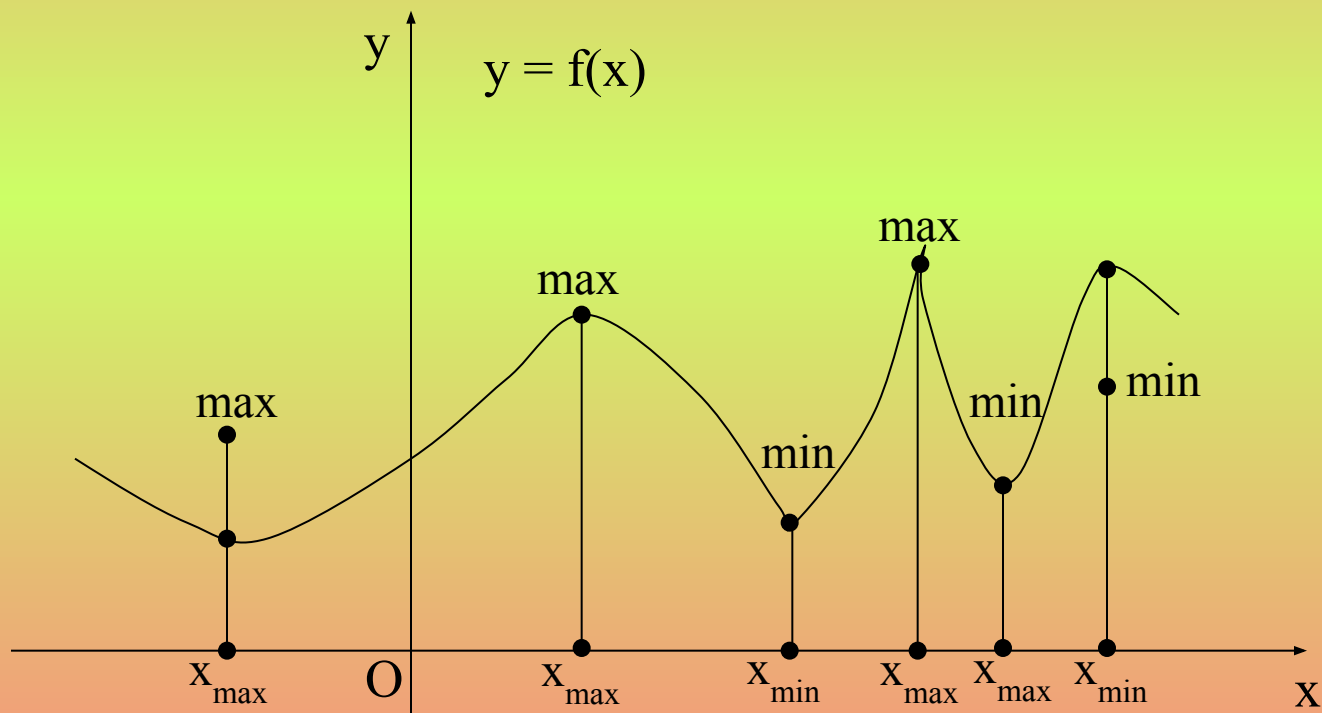
Точка x_0 называется точкой максимума (точкой минимума) для функции $f(x)$, если значение в этой точке больше (меньше), чем значение функции в ближайших соседних точках.

для обозначения максимума и минимума существует общий термин «экстремум» (от латинского «крайний»).



Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Говорят, что функция имеет максимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0 , целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x , принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Под окрестностью точки x_0 понимают интервал длины 2ϵ с центром в точке x_0 , т. е. $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$, где ϵ - произвольное положительное число.



Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Говорят, что функция имеет минимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0 , целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x , принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

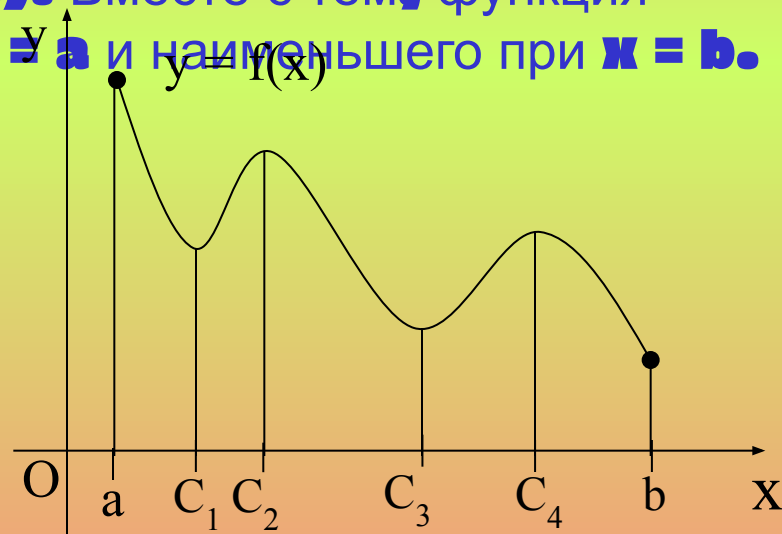
Максимумы и минимумы функции не являются обязательно наибольшими и наименьшими значениями этой функции во всей области определения. Например, функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, имеет четыре экстремума: два минимума ($x = c_1$ и $x = c_3$) и два максимума ($x = c_2$ и $x = c_4$). Вместе с тем, функция достигает наибольшего значения при $x = a$ и наименьшего при $x = b$.

Признак максимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

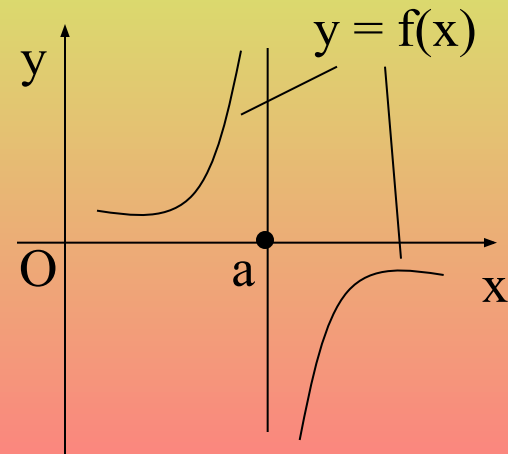
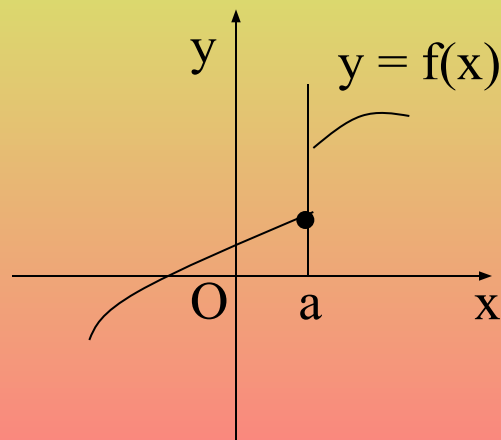
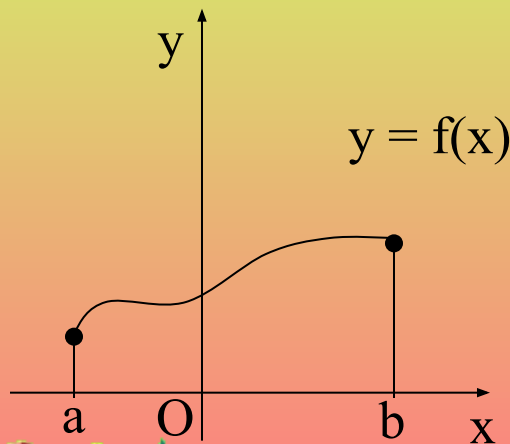


Непрерывность

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на промежутке, если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка.

Геометрическая непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на данном промежутке изображен сплошной линией без скачков и разрывов. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции.

Если при $x = a$ функция $y = f(x)$ существует в окрестности этой точки, но в самой точке $x = a$ не выполняется условие непрерывности, говорят, что точка $x = a$ есть точка разрыва функции. В самой точке $x = a$ функция может существовать, а может и не существовать.



Элементарные функции

Линейная

Обратная пропорциональность

Квадратичная

Степенная

Показательная

Логарифмическая

Тригонометрические

[на главную](#)



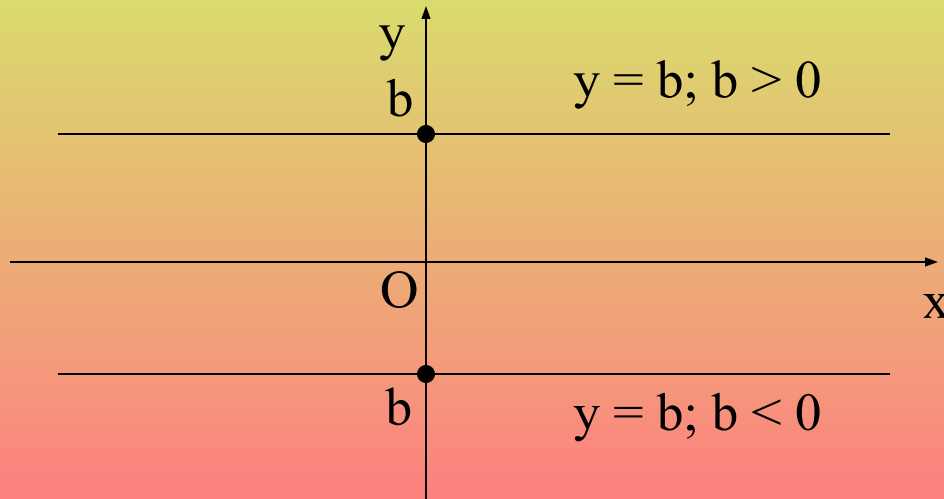
Линейная функция

Определение: Функция вида $y = kx + b$, где k и b некоторые числа, называется линейной функцией.

1. Если $k = 0$, тогда $y = b$.

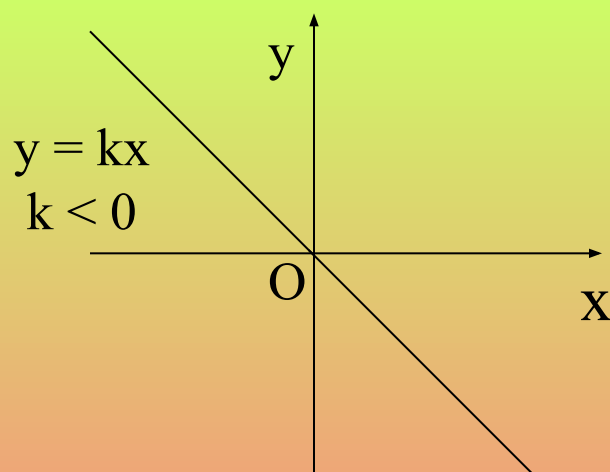
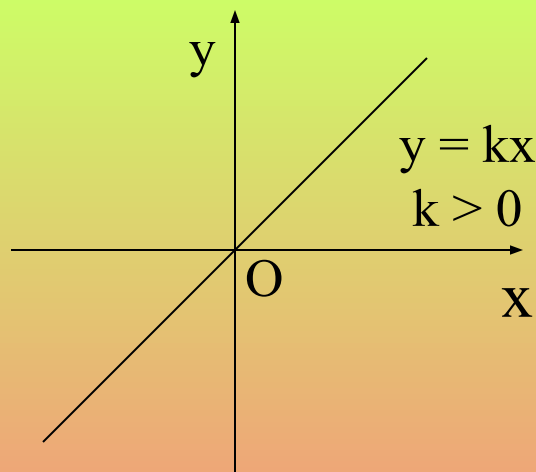
Эта функция определена на множестве \mathbf{R} и для каждого x принимает одно и то же значение, равное b .

Графиком является прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от нее на $|b|$ единиц вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$; если $b = 0$, то прямая совпадает с осью Ox .



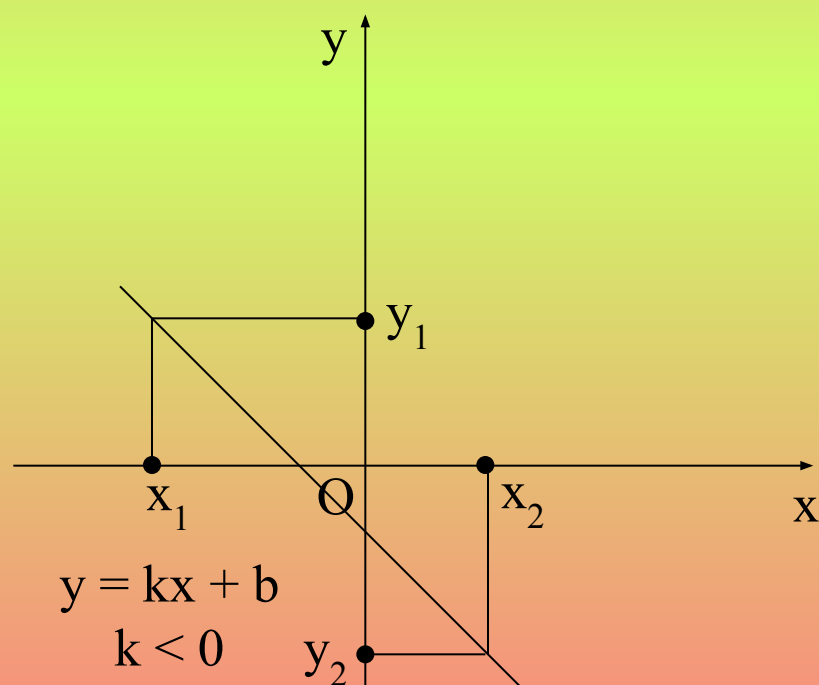
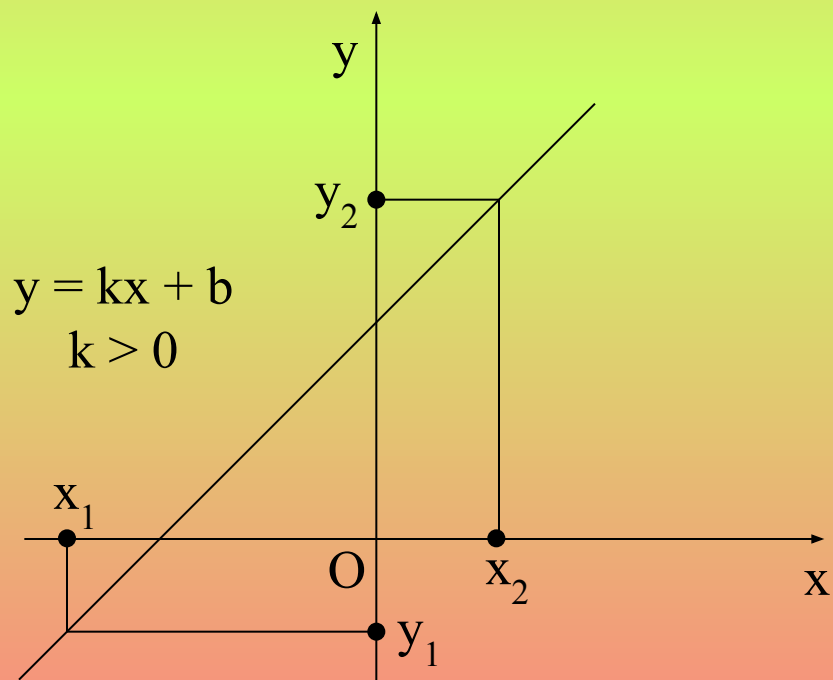
2. Если $b = 0$, то $y = kx$.

Линейная функция вида $y = kx$ называется прямой пропорциональностью. Она определена на множестве \mathbf{R} . Функция является монотонно возрастающей, если $k > 0$, и монотонно убывающей, если $k < 0$. Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ точки графика принадлежат I и III координатным четвертям. При $k < 0$ точки графика принадлежат II и IV координатным четвертям.

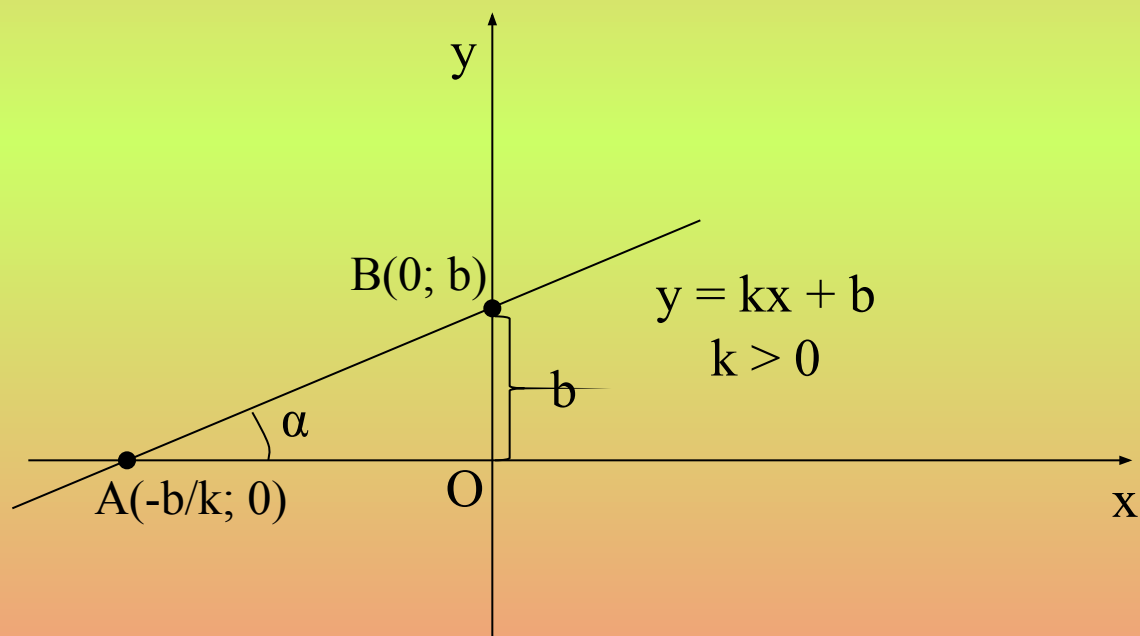


3. Если $k \neq 0$ и $b \neq 0$, то $y = kx + b$.

Функция определена на множестве всех действительных чисел. Функция имеет единственный нуль в точке **$x = -b/k$** (т. е. график функции пересекает ось Ox в единственной точке **$(-b/k; 0)$**). Функция является монотонно возрастающей при **$k > 0$** и монотонно убывающей при **$k < 0$** .



Коэффициенты **k** и **b** в уравнении линейной функции **$y = kx + b$** , имеют наглядное геометрическое толкование. Значение коэффициента **b** определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент **k** определяет тангенс угла α , образованного осью абсцисс и прямой; угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс. Если **$k > 0$** , то образованный угол острый, если **$k < 0$** , то угол тупой.



Обратная пропорциональность

Определение: Функция вида $y = k/x$, $k \neq 0$, называется обратной пропорциональностью.

Область определения этой функции совпадает с ее областью значений и представляет собой объединение двух промежутков: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция не имеет нулей, так как уравнение $k/x = 0$ не имеет корней.

Если $k > 0$, то функция монотонно убывает на всей области определения. Если $k < 0$, то функция монотонно возрастает на всей области определения функции.

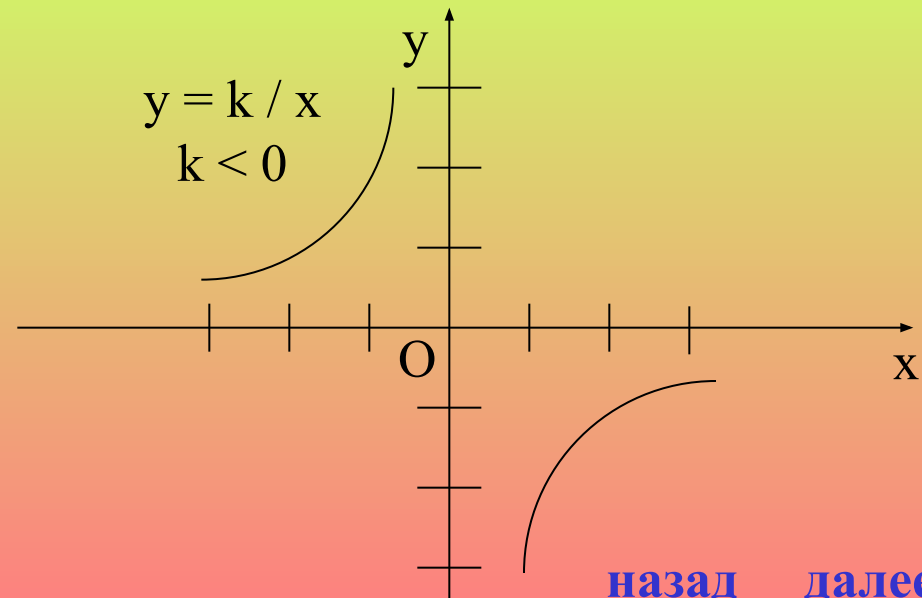
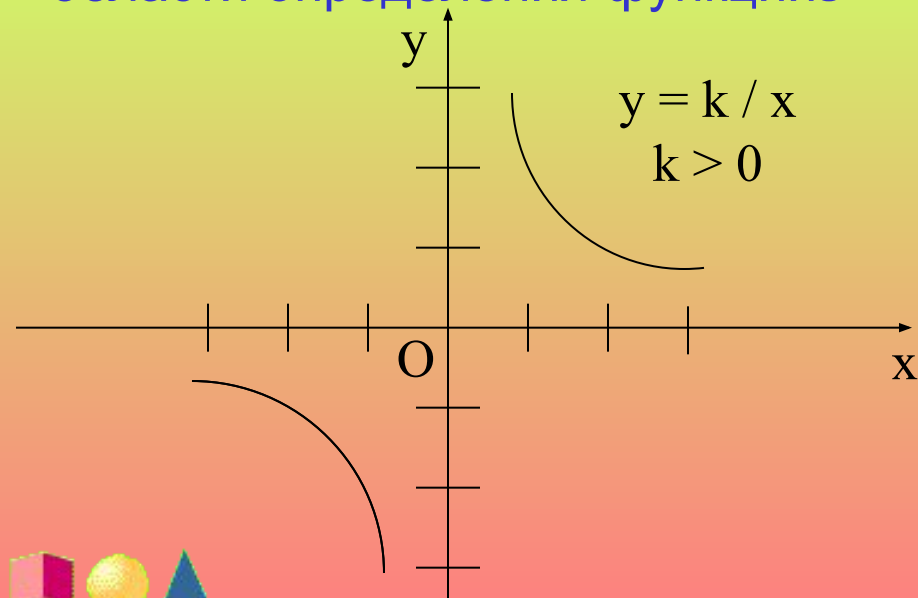


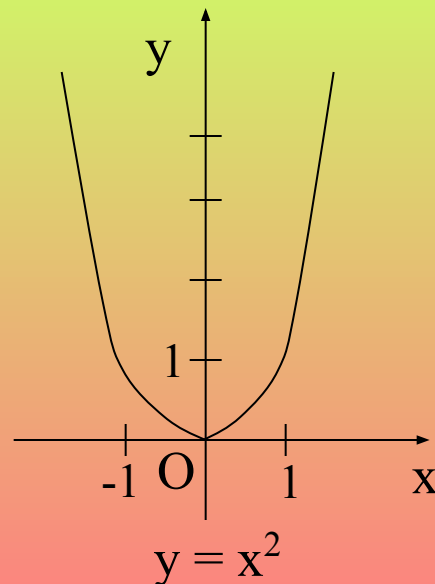
График обратной пропорциональности называется гиперболой.
Участки кривой при $x > 0$ и $x < 0$ называются ветвями гиперболы.



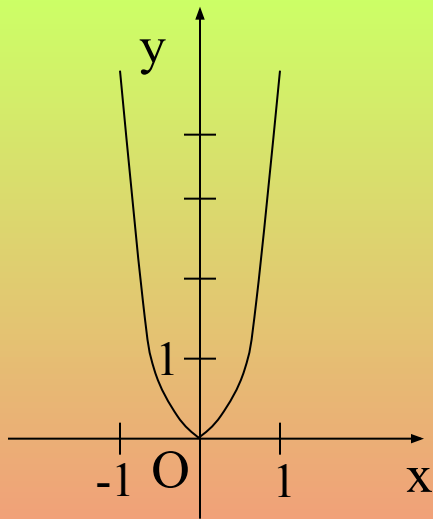
Квадратичная функция

Определение: Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$, называется квадратичной.

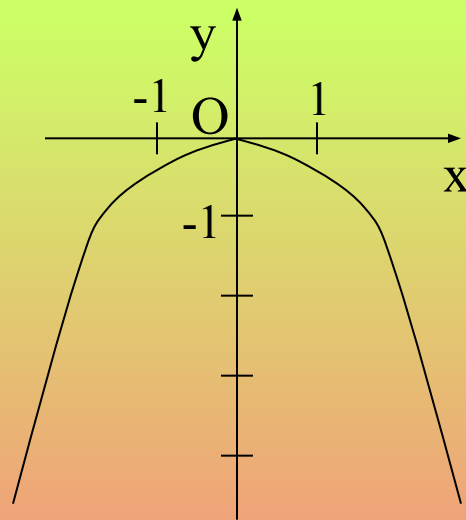
1. Функция вида $y = x^2$ – простейшая квадратичная функция. Это четная функция, у которой $D = (-\infty; +\infty)$, а $E = [0; +\infty)$. При $x > 0$ она возрастающая, а при $x < 0$ – убывающая. Ее график называется параболой. График проходит через начало координат, симметричен относительно оси ординат, ветви параболы направлены вверх.



2. Квадратичная функция вида $y = ax^2$ также четная, неограниченная, определенная для всех действительных x . Ее график также парабола, проходящая через начало координат и симметричная относительно оси ординат. Но при $a > 0$ ветви ее направлены вверх и $E = [0; +\infty)$, а при $a < 0$ ветви направлены вниз и $E = (-\infty; 0)$. Чем меньше абсолютная величина a , тем дальше отходят ветви параболы от оси ординат, тем «шире» она. Чем больше абсолютная величина a , тем плотнее ветви параболы прижаты к оси ординат, тем «уже» она.



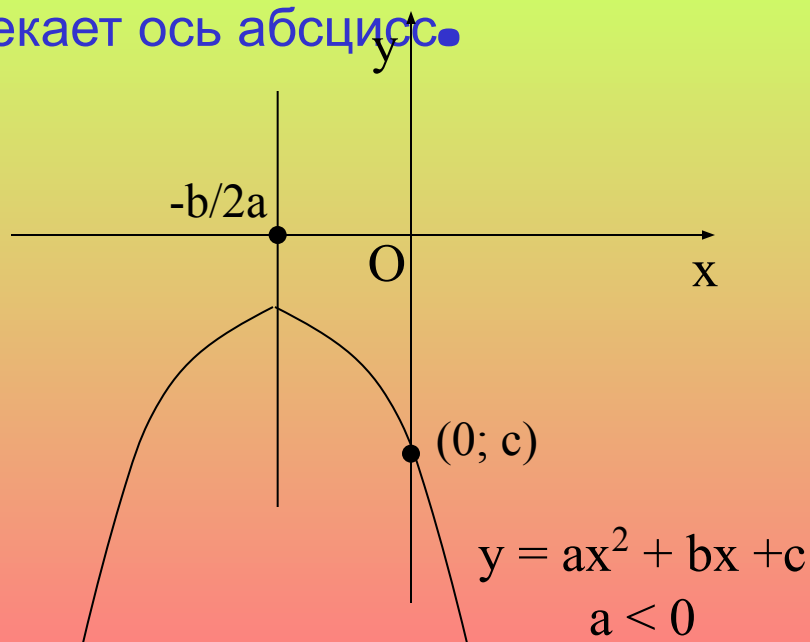
$$y = ax^2$$
$$a > 0; |a| > 1$$



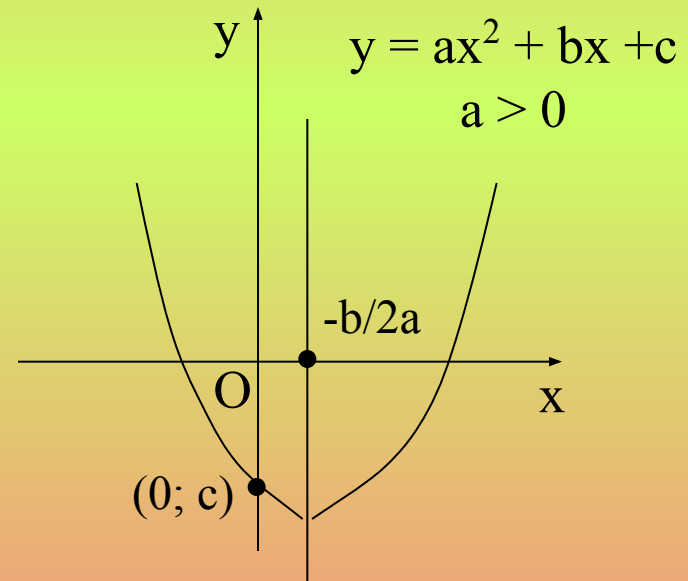
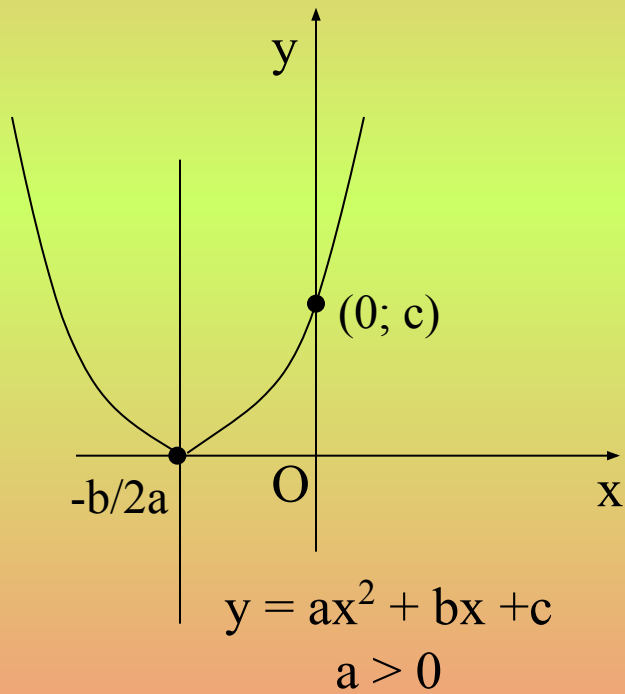
$$y = ax^2$$
$$a < 0; |a| < 1$$



3. Квадратичная функция общего вида $y = ax^2 + bx + c$ также четная, неограниченная, определенная для всех действительных x . Ее график – парабола, симметричная относительно прямой $x = x_0$ (x_0 – абсцисса вершины параболы), параллельной оси ординат. Если $a > 0$, то ее ветви направлены вверх и $E = [y_0; +\infty)$ или вниз при $a < 0$ и тогда $E = (-\infty; y_0)$, где y_0 – ордината вершины параболы. Только вершина этой параболы находится не в начале координат, а в точке $(-b / 2a; (4ac - b^2) / 4a)$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; c)$. Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, т. е. $b^2 - 4ac < 0$, то график функции $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось абсцисс.



Если он равен нулю, то график функции касается оси в точке $(-b / 2a; 0)$. Если дискриминант положительный, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, являющихся корнями уравнения $0 = ax^2 + bx + c$.



Степенная функция

Определение: Функция, заданная формулой $y = x^n$, называется степенной.

1. При n , равном **1; 2; -1**, имеем соответственно функции $y = x$, $y = x^2$; $y = -1 / x$, уже рассмотренные ранее.

2. Если n – число целое и четное, то функция $y = x^n$ – четная; при нечетном n она нечетная. При положительных n эта функция определена для всех действительных значений аргумента x , при отрицательных n она определена для всех x , кроме $x = 0$.

При любом $n \neq 0$ степенная функция неограниченная, график каждой из них проходит через точку **(1; 1)**.

Если n – число иррациональное, то функция $y = x^n$ определена только для положительных значений аргумента x или для неотрицательных x , если $n > 0$.



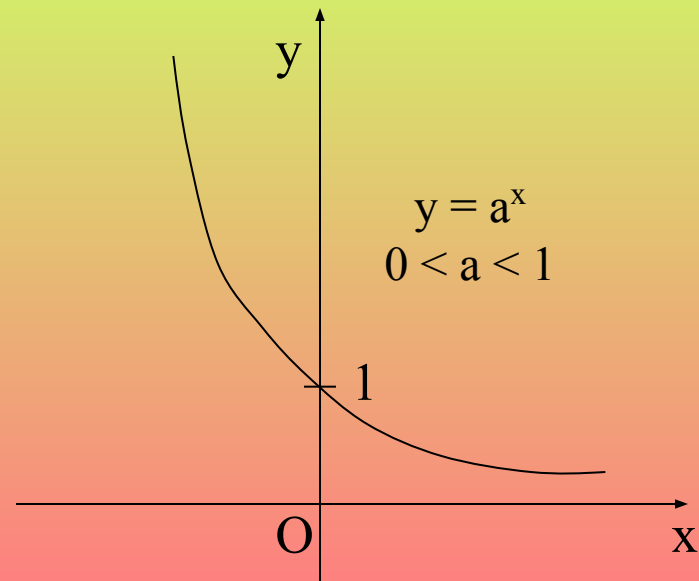
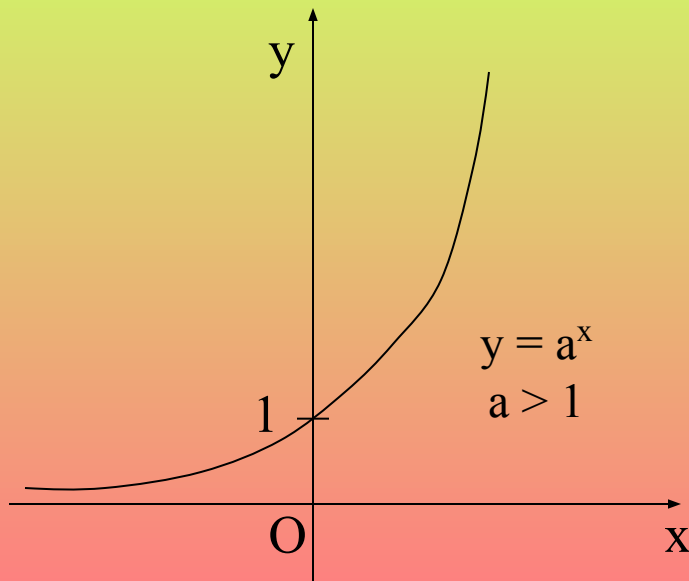
Показательная функция

Определение: Функция, которую можно задать формулой $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется показательной.

Эта функция определена для любых действительных x , а областью значений является промежуток $(0; +\infty)$.

График показательной функции – кривая, проходящая через точку $(0; 1)$. Он неограниченно приближается к оси абсцисс, но не достигает ее.

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ – монотонно убывает.

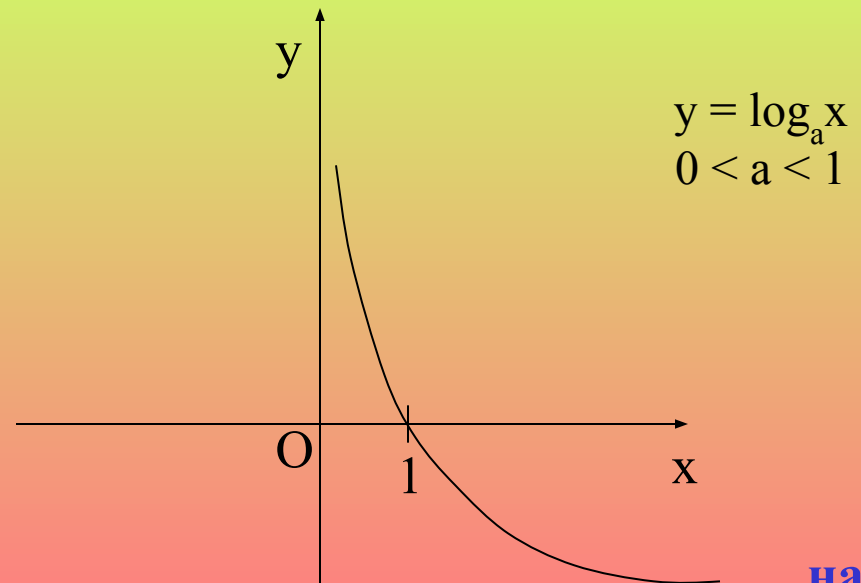
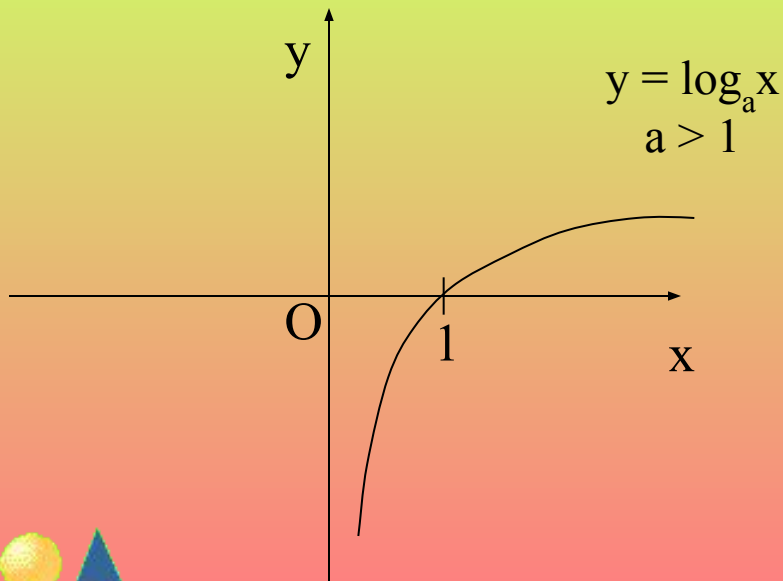


Логарифмическая функция

Определение: Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется логарифмической.

Эта функция определена на промежутке $(0; +\infty)$, а областью значений является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Графиком логарифмической функции является кривая, проходящая через точку $(1; 0)$. Он неограниченно приближается к оси ординат, но не достигает ее. При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает.



Тригонометрические функции

1. Функция синус.

Определение: Числовая функция, заданная формулой $y = \sin x$, называется синусом.

Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел. Эта функция ограничена $|\sin x| \leq 1$. Она периодическая, ее период $T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$: $\sin(x + 2\pi n) = \sin x, n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \sin x$ – нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ ее график симметричен относительно начала координат. График этой функции называется синусоидой.

Функция принимает нулевые значения

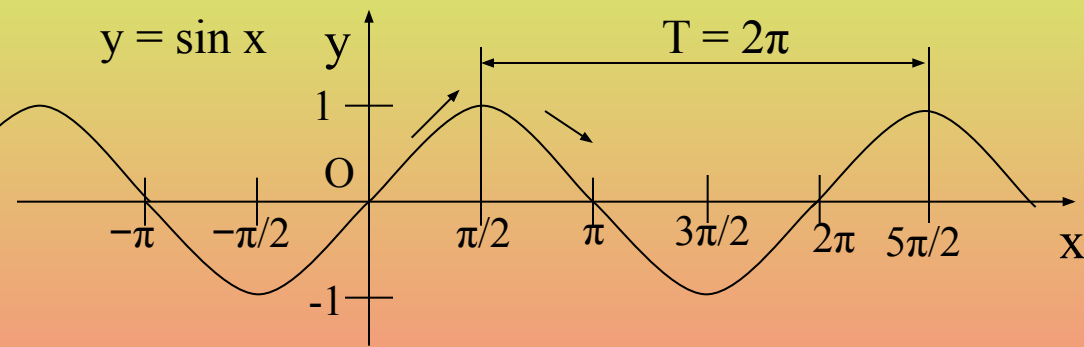
При $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках

$[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

и убывает на промежутках

$[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$



2. Функция косинус

Определение: Числовая функция, заданная формулой $y = \cos x$, называется косинусом.

Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел. Эта функция ограничена $|\cos x| \leq 1$. Она периодическая, ее период $T = 2\pi, n \in \mathbb{Z}: \cos(x + 2\pi n) = \cos x, n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \cos x$ – четная: $\cos(-x) = \cos x$ ее график симметричен относительно оси ординат. График этой функции называется косинусоидой.

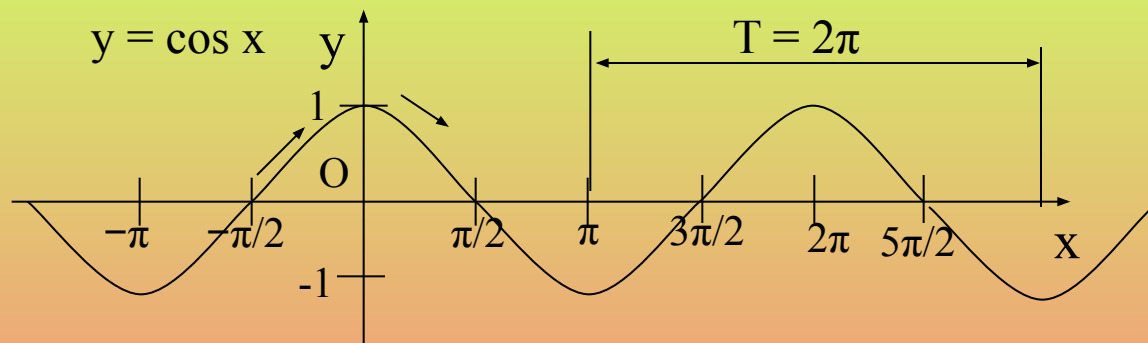
Функция принимает нулевые значения при $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Функция $y = \cos x$ возрастает на промежутках

$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

и убывает на промежутках

$[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

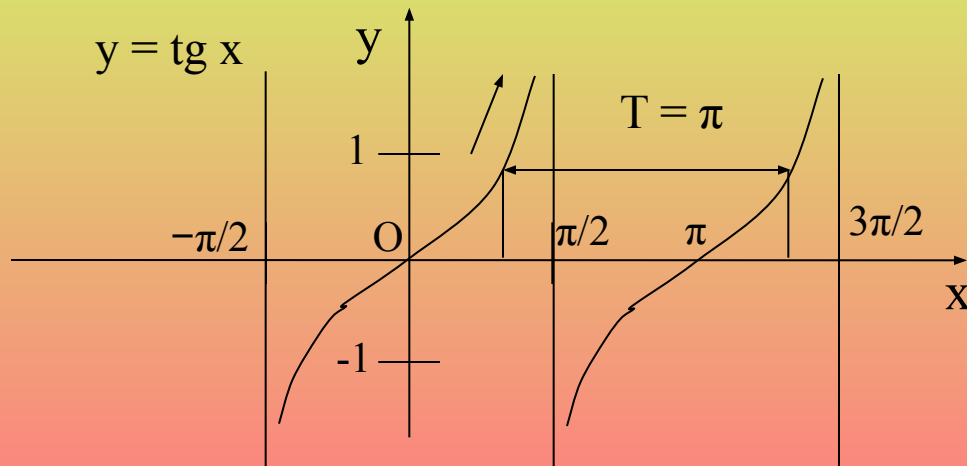


3. Функция тангенс.

Определение: Числовая функция, заданная формулой $y = \operatorname{tg} x$, называется тангенсом.

Функция определена при $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ее областью значений является интервал $(-\infty; +\infty)$. Она периодическая, ее период $T = \pi$, $n \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ – нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и ее график симметричен относительно начала координат. В точках $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не существует, и говорят, что в этих точках функция терпит разрыв, т. е. она не является непрерывной. График этой функции называется тангенсоидой.

Функция принимает нулевые значения при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на всех интервалах определения $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.



4. Функция котангенс.

Определение: Числовая функция, заданная формулой $y = \text{ctg } x$, называется котангенсом.

Функция определена при $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Ее областью значений является интервал $(-\infty; +\infty)$. Она периодическая, ее период $T = \pi, n \in \mathbb{Z}$: $\text{ctg}(x + \pi n) = \text{ctg } x, n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \text{ctg } x$ – нечетная: $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg } x$ и ее график симметричен относительно начала координат. В точках $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ функция $y = \text{ctg } x$ не существует, и говорят, что в этих точках функция терпит разрыв, т. е. она не является непрерывной. График этой функции называется котангенсоидой.

Функция принимает нулевые значения при $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \text{ctg } x$ убывает на всех интервалах определения $(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

$$y = \text{ctg } x$$

