Свойства функций $y = \mathrm{tg}x$ и $y = \mathrm{ctg}x$ и их графики

y = tgx

Функция y = tgx определена при $x = \frac{\Pi}{2} + \Pi k, k \in Z$, является нечетной и периодической с периодом П.

Покажем, что на промежутке функция y = tgx возратает.

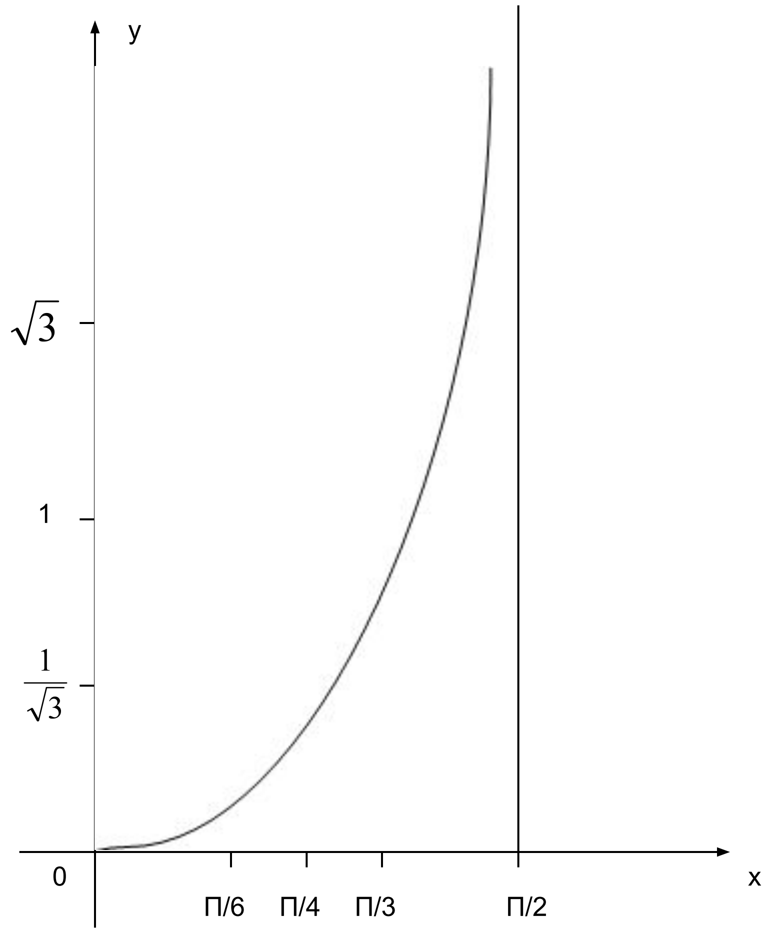
Покажем, что на промежутке функция y = tgx возрастает. Пусть 0≤x1<x2<П/2. Покажем, что tgx1< tgx2,

т.е. $\frac{\sin x1}{\cos x1} < \frac{\sin x2}{\cos x2}$. По условию 0≤x1<x2<П/2, откуда по свойствам фунции y=sin x имеем 0≤ sin x1< sin x2, а по

свойствам функции y=cos x имеем cos x1> cos x2>0, откуда 0< $\frac{1}{\cos x1} < \frac{1}{\cos x2}$. Перемножив неравенства sin x1< sin x2

и $\frac{1}{\cos x1} < \frac{1}{\cos x2}$ получим $\frac{\sin x1}{\cos x1} < \frac{\sin x2}{\cos x2}$

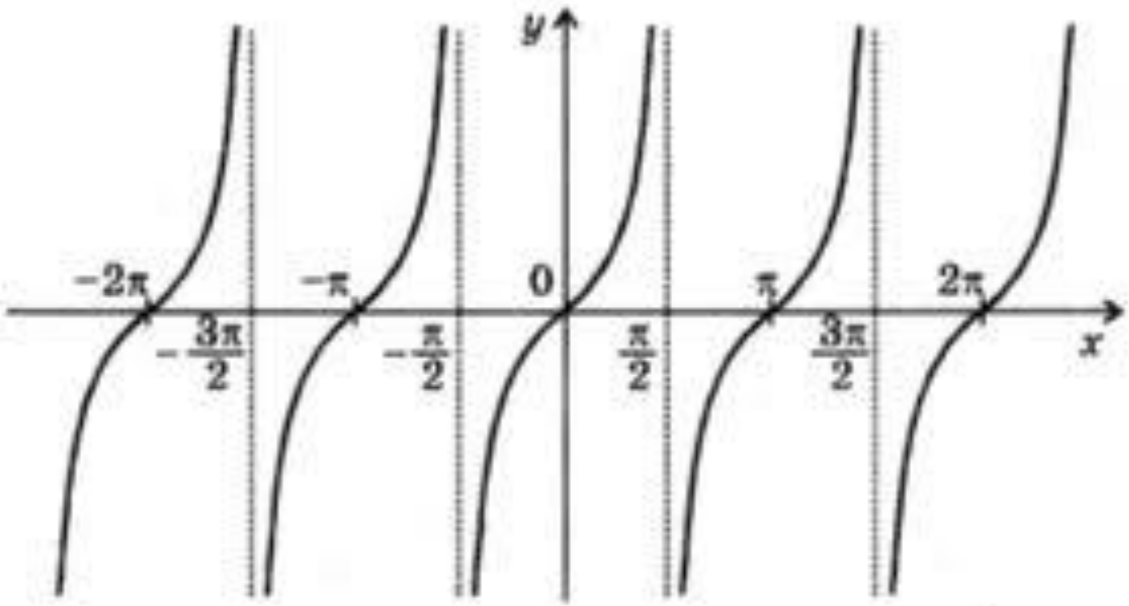
Построим график на промежутке [0;П/2) и отразим его симметрично отосительно начала координат, получим график этой функции на интервале (-П/2;П/2)



При $x = \pm\frac{П}{2}$ функция y = tgx не определена. Если x<П/2 и x приближается к П/2, то sin x приближается к 1, а cos, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx$ возрастает и поэтому график функции y = tgx приближается к вертикальной прямой x=П/2. Аналогично при отрицательных значениях x, больших - П/2 и приближающихся к - П/2 , график функции y = tgx приближается к вертикальной прямой x=-П/2, т.е. прямые x=П/2 и x=-П/2 являются вертикальными асимптотами графика функции.

Построение графика функции y=tg x на всей бласти определения:

Функция y=tg x периодичская с периодом П, следовательно график этой функции получается на интрвале от (-П/2;П/2) сдвигами вдоль оси абсцисс на Пk, где $k \in Z$



Основные свойства функции y=tgx

1) Область определения – множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi н$ $н \in Z$

2)Множество значений R всех действительных чисел.

3)Периодическая с периодам π

4)Нечетная.

5)Функция принимает значение, равно 0, при
$\chi = \pi н \ \ н \in Z$

Положительные значения на интервале $(\pi н; \frac{\pi}{2} + \pi н)$
$н \in Z$

Отрицательные $(-\frac{\pi}{2} + \pi н; \pi н), н \in Z$

Возрастающая $(-\frac{\pi}{2} + \pi н; \frac{\pi}{2} + \pi н), н \in Z$

Задача 1: Найти все корни уравнения tg x=2 принадлежащие отрезку [-П;3П/2]

Построим графики функций y=2 и y= tg x. Эти графики пересекаются в 3-х точках, абсциссы которых x1, x2, x3 являются корнями уравнения tg x=2. На интервале (-П/2;П/2) уравнение имеет корень x1=arctg2. т.к. функция y=tg x периодическая с периодом П, то x2= arctg2 + П, x3= arctg2 – П.

Ответ: x1=arctg2, x2= arctg2 + П, x3= arctg2 – П.

Задача 2: Найти все решения неравенства tg $x \le 2$, принадлежащие отрезку [-П;3П/2]

Построим графики функций $y=2$ и $y=$ tg x. Из графика видно, что график функции $y=$tg x лежит не выше прямой $y=2$ на промежутках [-П;$x3$], (-П/2;$x1$] и (П/2;$x2$].

Ответ: $x \in$[-П;-П+ arctg2], $x \in$(-П/2; arctg2], $x \in$ (П/2; П+ arctg2]

Сравнить числа:

tg П/5 и tg П/7

tg П/5 > tg П/7

tg 7П/8 и tg 8П/9

tg 7П/8 < tg 8П/9

tg (-7П/8) и tg (-8П/9)

tg (-7П/8) > tg (-8П/9)

tg (-П/5) и tg (-П/7)

tg (-П/5) > tg (-П/7)

tg 2 и tg 3

tg 2 < tg 3

tg 1 и tg 1,5

tg 1 < tg 1,5

Свойства функции $y=tgx$ и $y=ctgx$

y=ctgx

- Для построения графика функции y=ctgx воспользуемся тождеством ctgx=-tg(x+п/2).Из этого тождества следует, что для построения графика ctg необходимо сдвинуть график tg на п/2 влево вдоль оси 0x и отразить полученную кривую относительно оси 0x. Графики tg и ctg состоят из бесконечного множества одинаковых периодически повторяющихся ветвей.

Основные свойства функции y=ctgx

- Область определения- множество всех действительных чисел $\chi \neq \pi\kappa; \kappa \in z$
- Множество значений- множество R всех действительных чисел
- Функция y=ctgx периодическая с периодом Т=П
- Функция y=ctgx нечетная
- Функция y=ctgx принимает значения, равные нулю при $\chi = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa; \kappa \in z$
- -положительные значения на интервалах $\left(\pi\kappa; \frac{\pi}{2} + \pi\kappa\right); \kappa \in z$
- -отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\kappa; \pi\kappa\right); \kappa \in z$
- Функция y=ctgx является убывающей на каждом интервале $(\pi\kappa; \pi + \pi\kappa); \kappa \in z$

График функции y=ctgx