Функция y = cos x

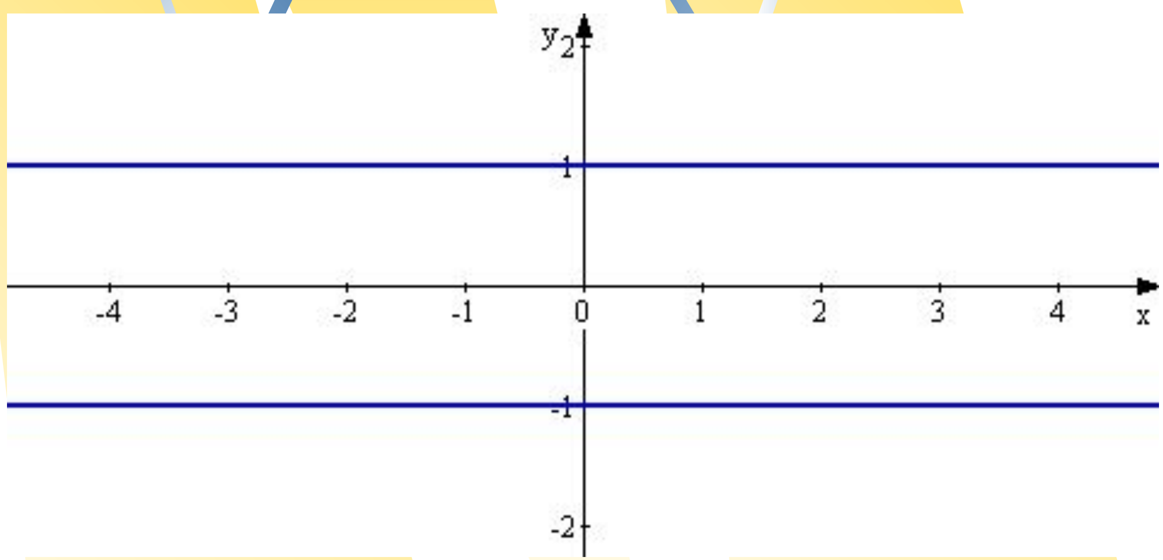
Ее свойства и график

Сегодня мы рассмотрим

- Построение графика функции y = cos x;
- Свойства функции y = cos x;
- Изменение графика функции y = cos x в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Изменение свойств функции y = cos x в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Примеры построения графиков функций путем анализа изменения их свойств.

Построение графика

- **Функция *y = cos x* определена на всей числовой прямой и множеством ее значений является отрезок [-1; 1]. Следовательно, график этой функции расположен в полосе между прямыми *y = -1 и y = 1*.**

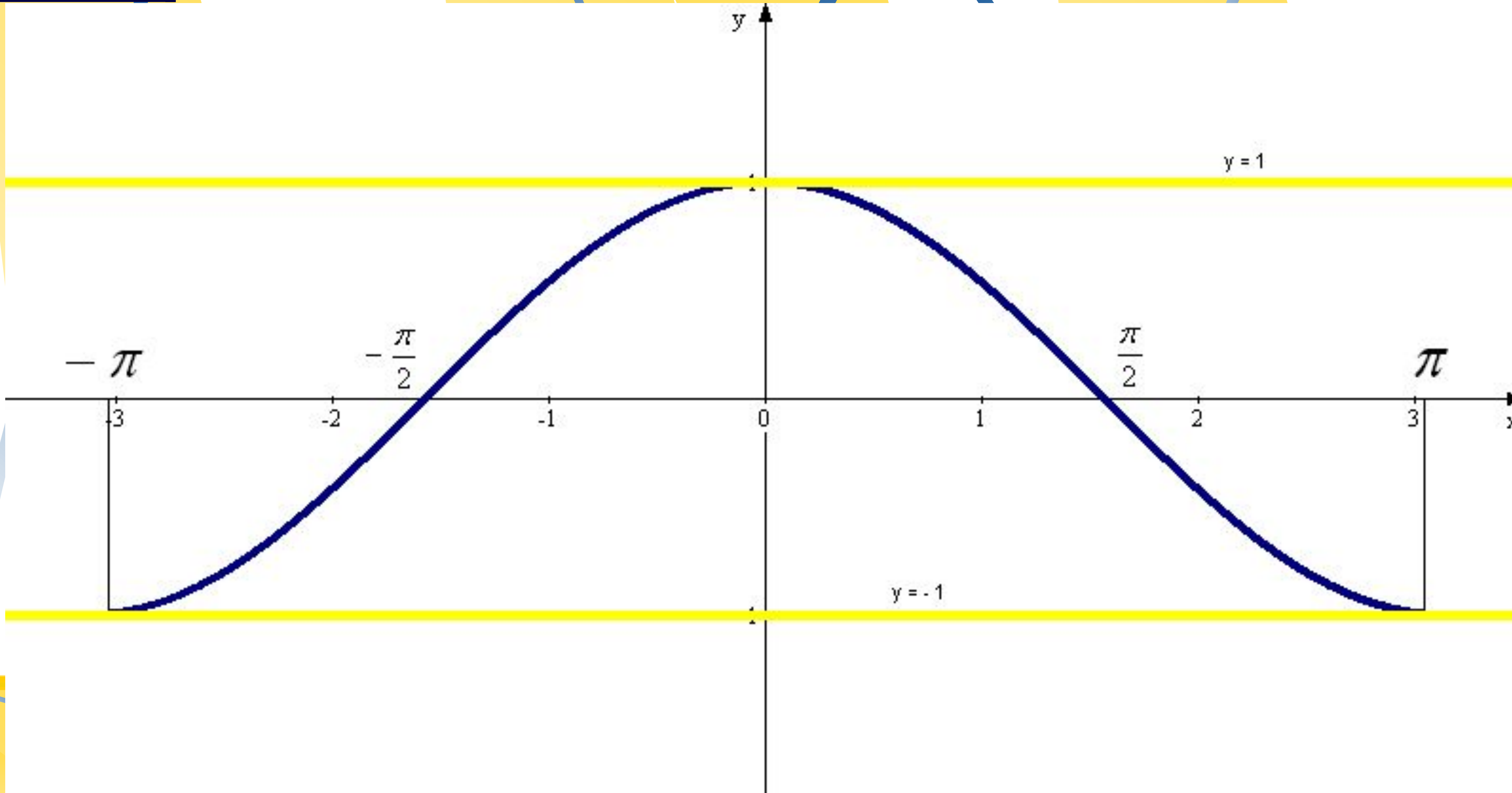


Как использовать периодичность и четность при построении

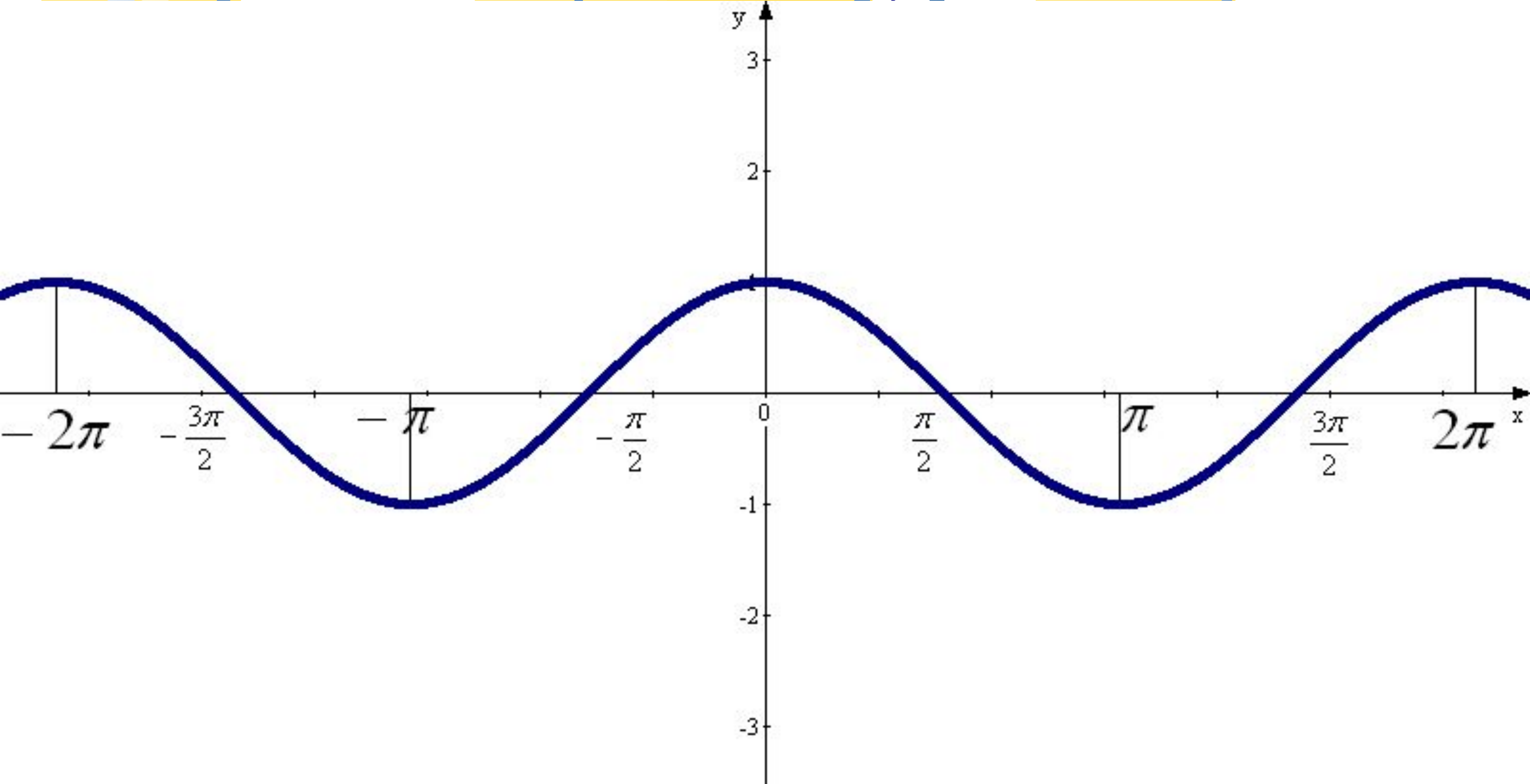
- **Так как функция периодическая с периодом 2π, то достаточно построить ее график на каком – нибудь промежутке длиной 2π, например на отрезке -π ≤ x ≤ π; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на 2πn, n∈Z, график будет таким – же.**
- **Функция *y = cos x* является четной. Поэтому ее график симметричен относительно оси *OY*. Для построения графика на отрезке -π ≤ x ≤ π достаточно построить его для 0 ≤ x ≤ π, а затем симметрично отразить относительно оси *OY*.**

Найдем несколько точек для построения графика на отрезке [0; π] и отразим, полученную часть графика симметрично относительно оси OY.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
y=cos x	1	√3/2	√2/2	½	0	-½	-√2/2	-√3/2	-1



Распространим полученный график на всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т.д. вправо, на -2π, -4π и т.д. влево, т.е. вообще на 2πn, n∈Z.



Итак, график функции $y = \cos x$ построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке [0; π]. Поэтому свойства функции $y = \cos x$ можно получить , опираясь на свойства этой функции на отрезке [0; π]. Например, функция $y = \cos x$ возрастает на отрезке [-π; 0], так как она убывает на отрезке [0; π] и является четной.

Перечислим основные свойства функции $y = \cos x$.

Для этого нужно вспомнить

- Как найти область определения и множество значений тригонометрических функций;
- Какие функции называются периодическими и как найти период функции;
- Какие функции называются четными (нечетными);
- Когда функция возрастает (убывает);
- Как найти нули функции;
- Как определить на каких промежутках функция принимает положительные (отрицательные) значения;
- Как определить когда функция принимает наибольшее (наименьшее) значения.

Область определения

- **Каждому действительному числу *x* соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол *x* радиан. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу *x* поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т.е. на множестве R всех действительных чисел определены функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$.**

- ***Таким образом, областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество R всех действительных чисел.***

Множество значений

- **Чтобы найти множество значений функции *y = cos x*, нужно выяснить, какие значения может принимать *y* при различных значениях *x*, т.е. установить, для каких значений *y* есть такие значения *x*, при которых *cos x = y*. Известно, что уравнение *cos x = a* имеет корни, если |a| ≤ 1, и не имеет корней, если |a| > 1.**

- ***Следовательно множеством значений функции y = cos x является отрезок –1 ≤ y ≤ 1.***

Периодичность

- **Функция $y = f(x)$ называется <u>периодической,</u> если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется периодом функции.**

- **Известно, что для любого значения х верны равенства $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются <u>периодическими с периодом 2π.</u>**

Четность, нечетность

- **Функция *y = f (x)* называется <u>четной</u>, если для каждого значения *x* из ее области определения выполняется равенство *f (-x) = f (x)*, график симметричен относительно оси ординат.**

- **Функция *y = f (x)* называется <u>нечетной</u>, если для каждого значения *x* из ее области определения выполняется равенство *f (-x) = -f (x)*, график симметричен относительно начала координат.**

Возрастание, убывание

- **Функция *y = f(x)* называется возрастающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наибольшее (наименьшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ $(y_1 < y_2)$, *то* $x_1 > x_2$ $(x_1 < x_2)$.**
- **Функция *y = f(x)* называется убывающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наименьшее (наибольшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ $(y_1 < y_2)$,** то **$x_1 < x_2$ $(x_1 > x_2)$.**

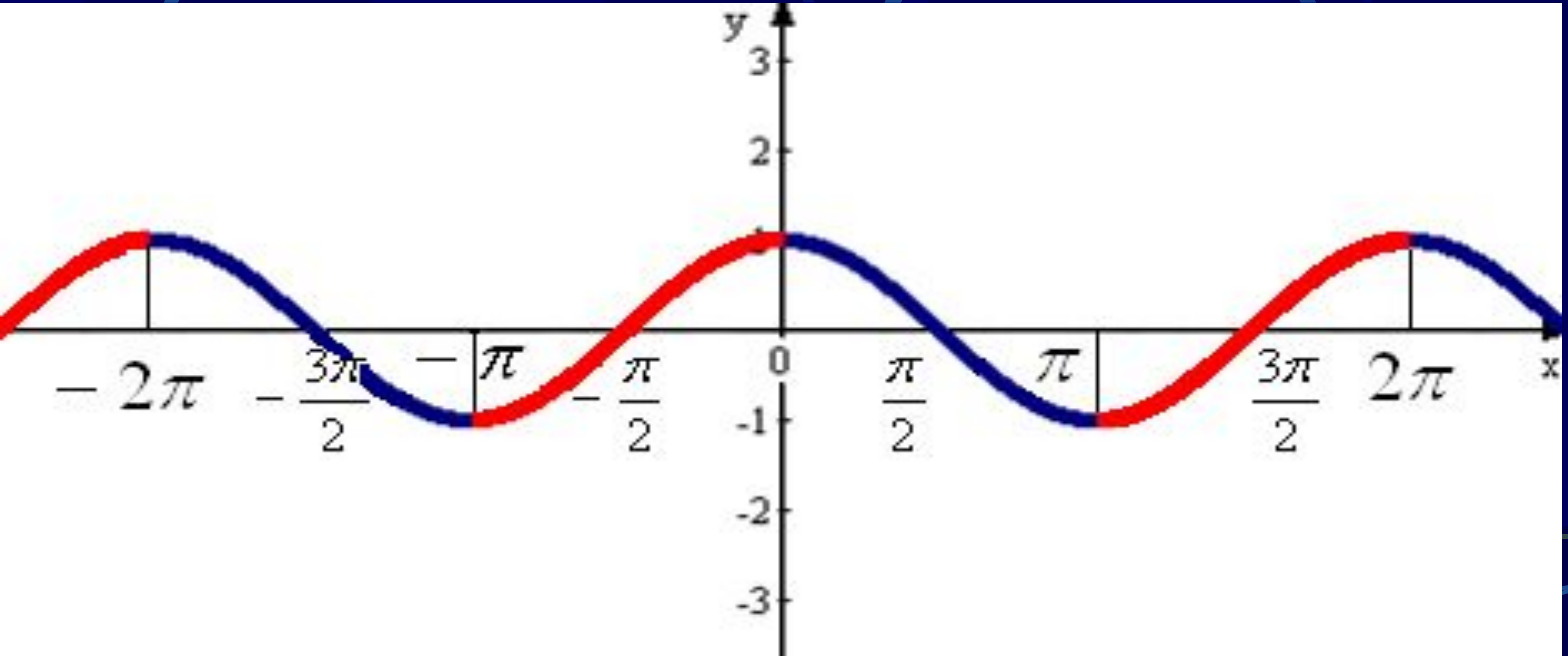
Нули функции, положительные и отрицательные значения, наименьшее и наибольшее значения.

- Для того чтобы определить когда функция $y = \cos x$ принимает значения, равные:
  - нулю;
  - положительные;
  - отрицательные;
  - наименьшее;
  - наибольшее,

- необходимо решить:
  - уравнение $\cos x = 0$;
  - неравенство $\cos x > 0$;
  - неравенство $\cos x < 0$;
  - уравнение $\cos x = -1$;
  - уравнение $\cos x = 1$;

Свойства функции y = cos x

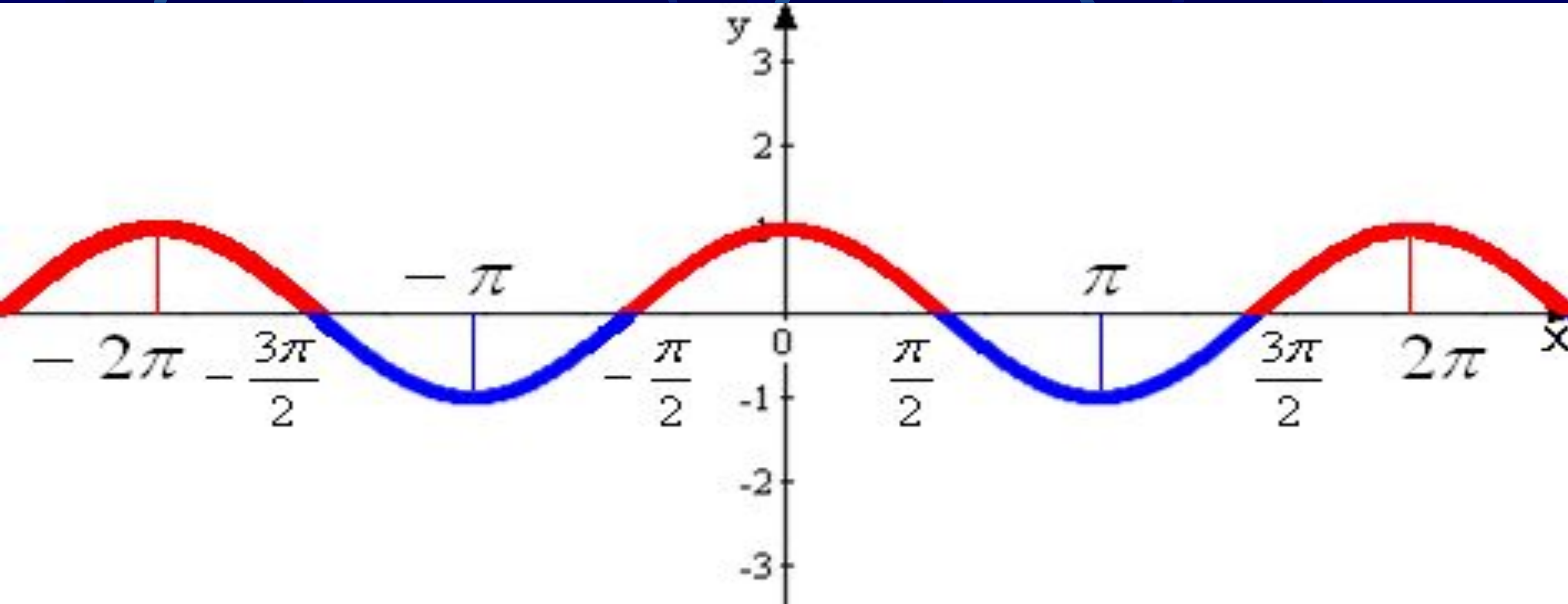
- Область определения: D(f): $x \in R$;
- Множество значений: $y \in [-1;1]$;
- Периодичность: $T = 2\pi$;
- Четность: *четная, т.к.* $\cos(-x) = \cos x$, *график симметричен относительно оси ординат;*
- Функция возрастает при: $\pi+2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1),\ n\in Z$;
- Функция убывает при: $\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.



Свойства функции y = cos x

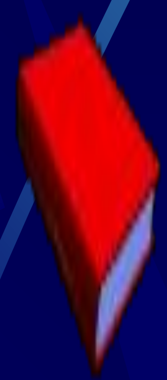
(продолжение)

- **Функция принимает значения:**
  - **Равные нулю при** $x=\pi/2+\pi n,\ n\in Z;$
  - **Положительные при** $-\pi/2+2\pi n < x < \pi/2+2\pi n,\ n\in Z;$
  - **Отрицательные при** $\pi/2+2\pi n < x < 3\pi/2+2\pi n,\ n\in Z;$
  - **Наибольшее, равное 1, при** $x = 2\pi n,\ n \in Z;$
  - **Наименьшее, равное –1, при** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$



Преобразование графика функции y = cos x

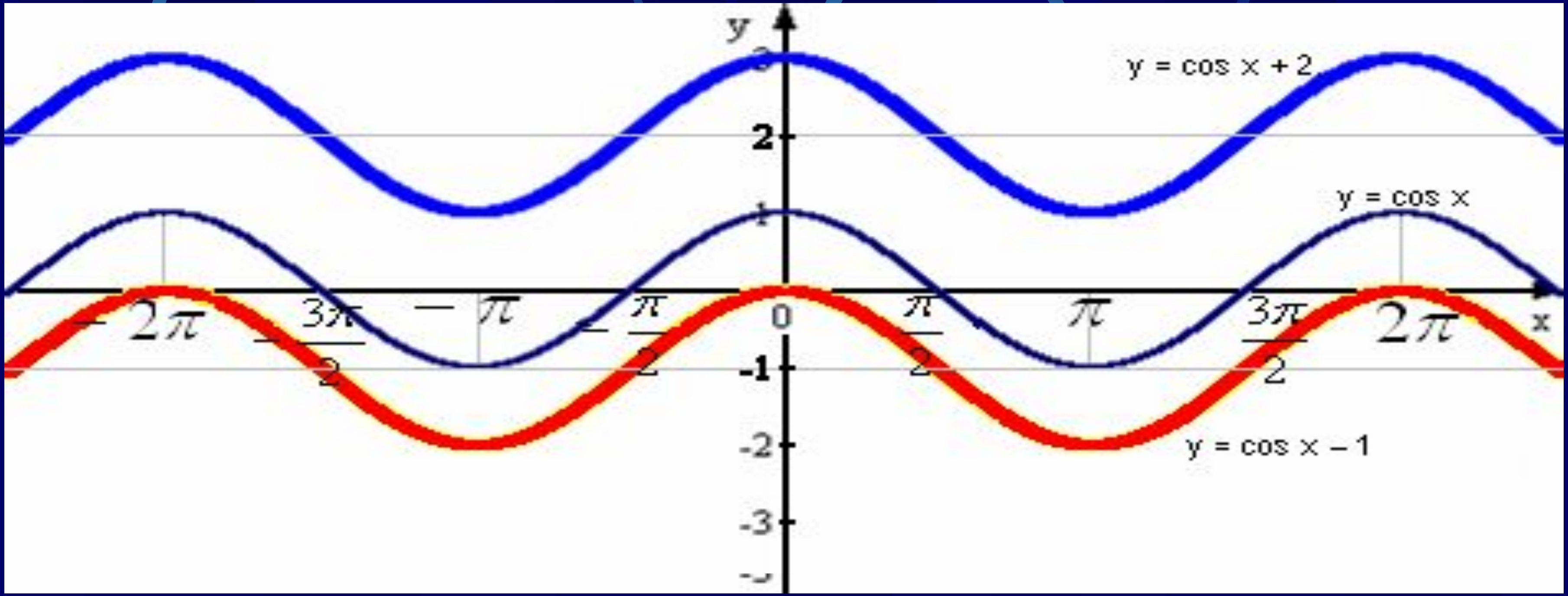
- **Изменение функции**
  - $y = \cos x + A$
  - $y = k \cdot \cos x$
  - $y = - \cos x$
  - $y = |\cos x|$



- **Изменение аргумента**
  - $y = \cos (x – a)$
  - $y = \cos (k \cdot x)$
  - $y = \cos (- x)$
  - $y = \cos |x|$

y = cos x + A

- **Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси ординат на A единиц вверх, если A > 0 и на |A| единиц вниз, если A < 0.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos x + 2; y = cos x – 1.***



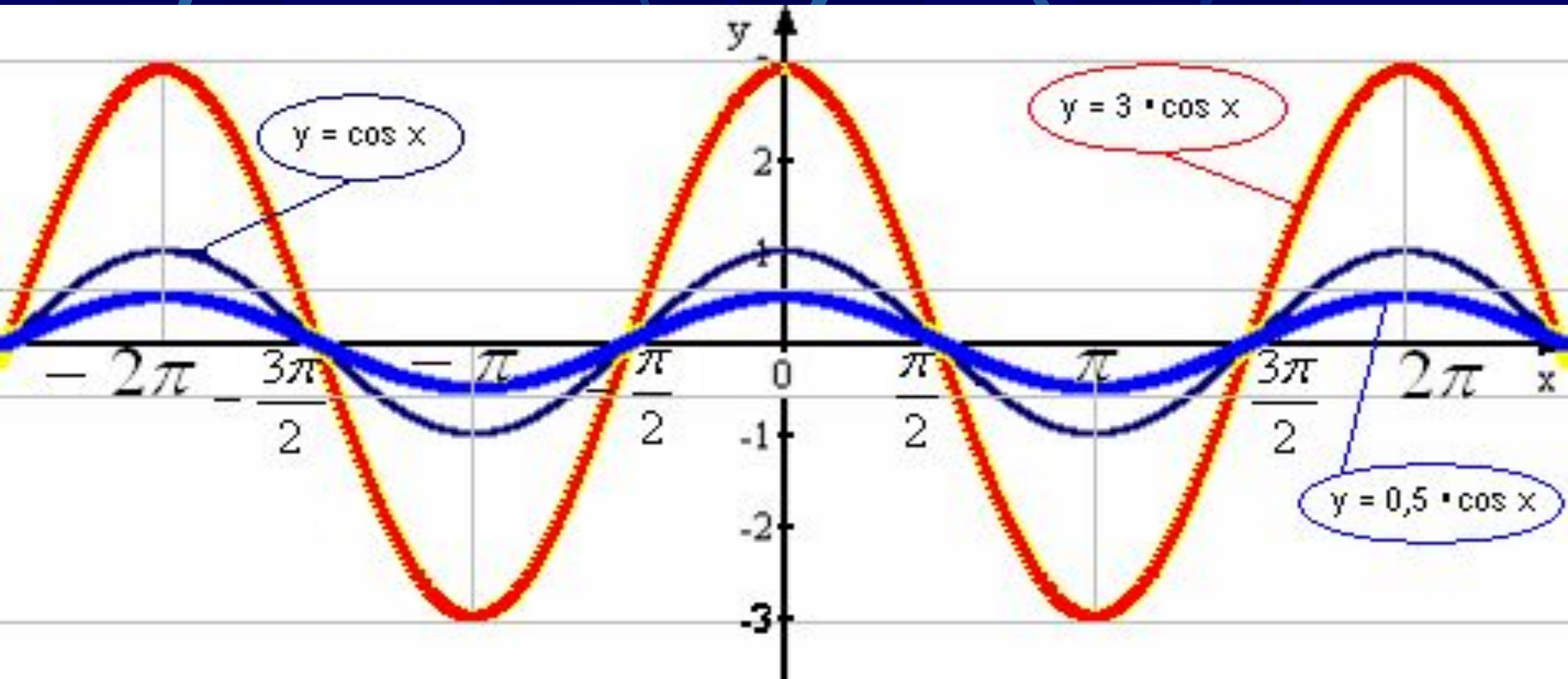
$y = \cos x + A$ (свойства)

- **Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **Например:** $y = \cos x + 2$.

  - ***E (f):*** $\cos x + 2 = a \Rightarrow \cos x = a - 2$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a - 2 \le 1 \Rightarrow 1 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [1; 3]$.
  - ***Нули функции:*** $\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ *данное уравнение не имеет корней т.к.* $|-2| > 1 \Rightarrow$ *график данной функции не пересекает ось абсцисс.*
  - ***f (x) > 0:*** *при любом значении x.*
  - ***f (x) < 0:*** *нет.*
  - ***y (наиб) = 3, при:*** $x = 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$).
  - ***y (наим) = 1, при:*** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$).

y = k · cos x

- Растяжение графика функции y = cos x вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в k раз, если k > 0 и сжатие в 1/k раз, если 0 < k < 1.
- <u>**Например:**</u> ***y = 3 • cos x;*** ***y = 0,5 • cos x.***

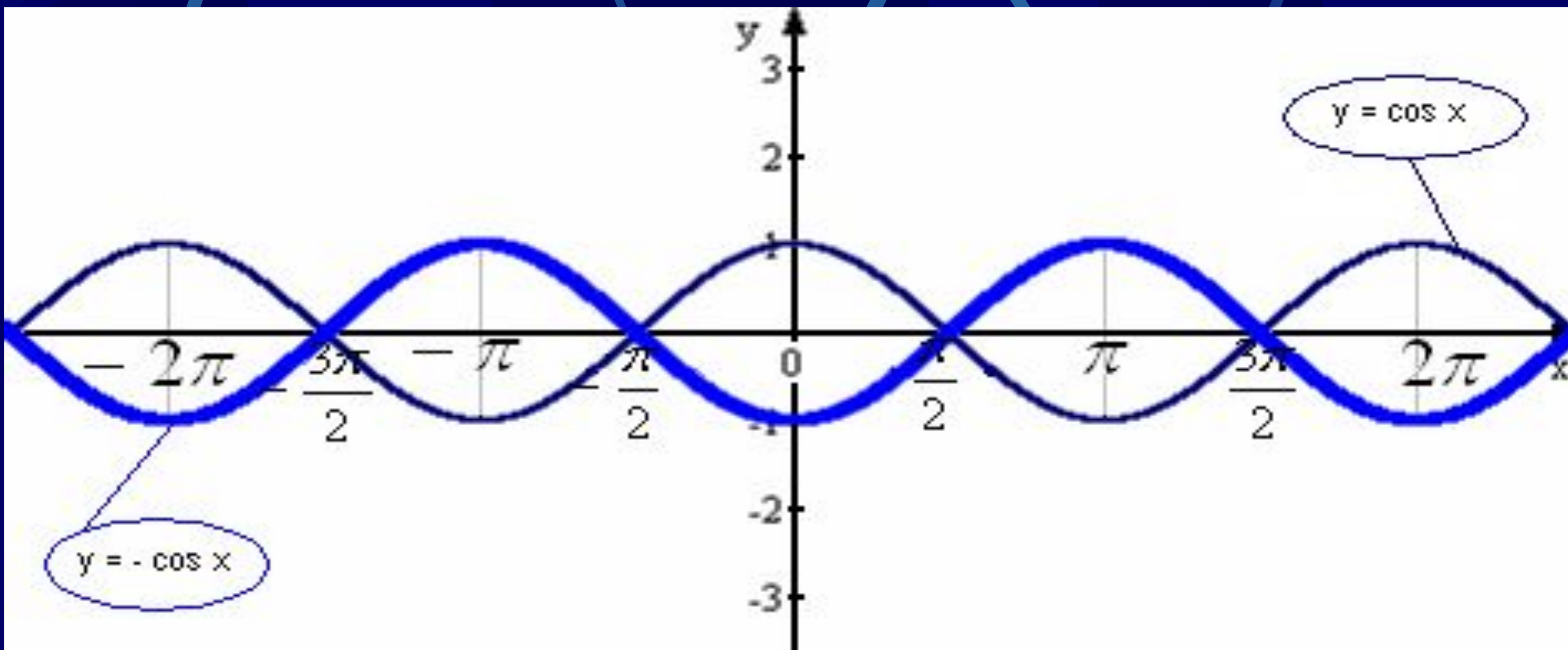


$y = k \cdot \cos x$ (свойства)

- **Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.**
- **Например:** $y = 3 \cdot \cos x$
  - ***E (f):*** $3 \cdot \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a/3 \le 1 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [-3; 3]$.
  - ***Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при:*** $x = 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$).
  - ***Функция принимает наименьшее значение, равное – 3, при:*** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$).

y = - cos x

- Симметричное отражение графика функции y = cos x относительно оси абсцисс.

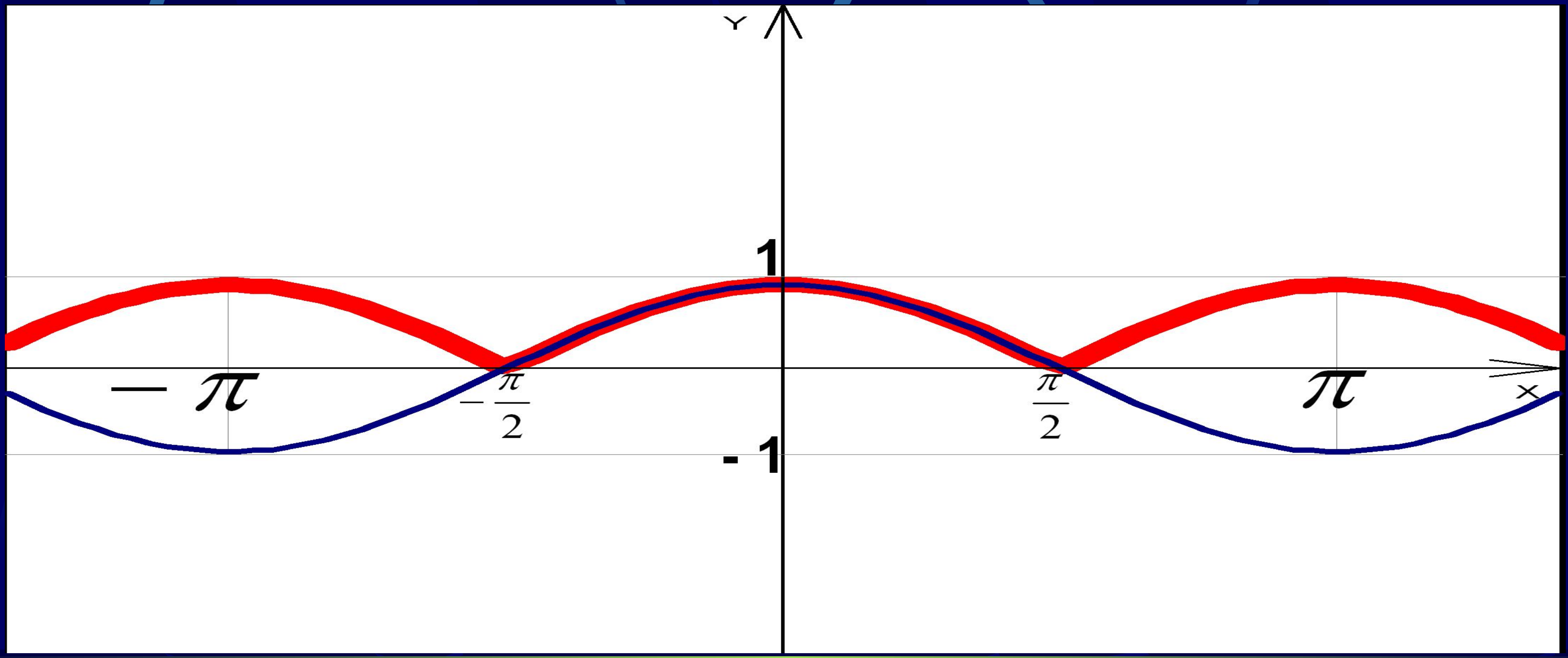


y = - cos x (свойства)

- **Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.**
  - ***<u>Функция возрастает</u> на отрезке [0; π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция убывает</u> на отрезке [π; 2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция принимает положительные значения</u> на интервале (π/2; 3π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***
  - ***<u>Функция принимает отрицательные значения</u> на интервале (-π/2; π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***

$y = |\cos x|$

- **Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.**

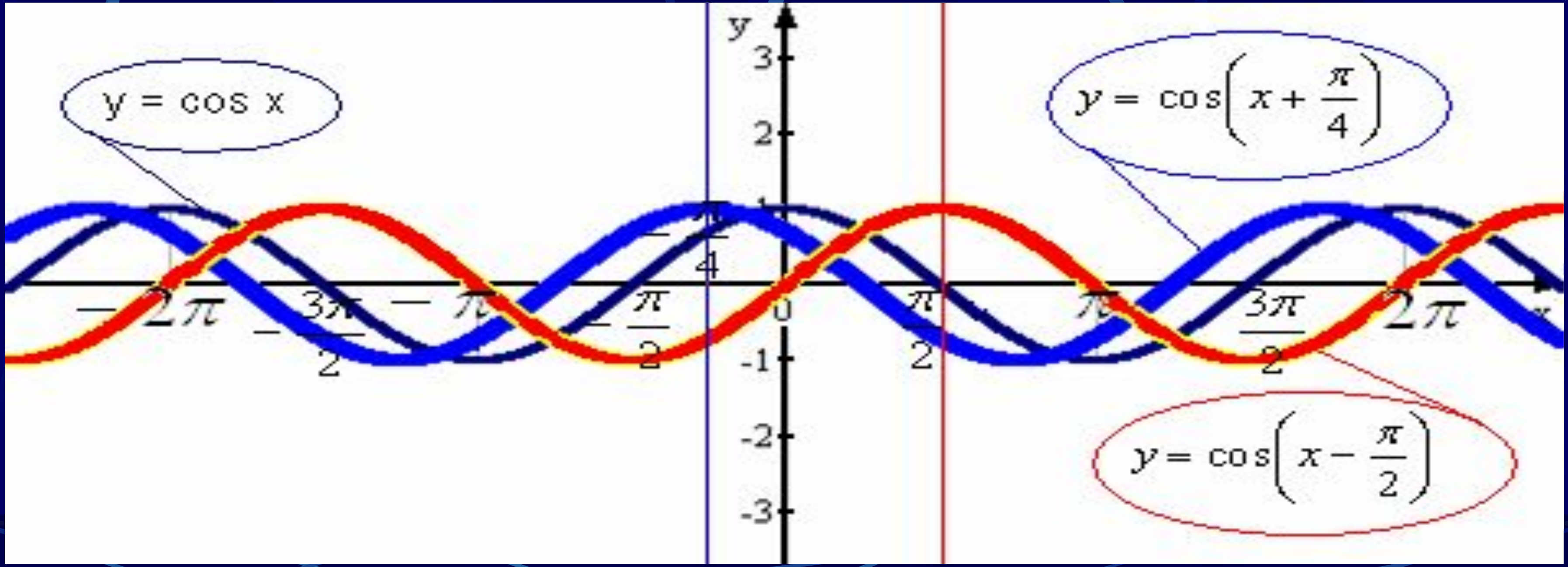


$y = |\cos x|$ (свойства)

- **Изменяются: множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.**
  - ***<u>E (f):</u>*** *$y \in [\,0; 1]$*
  - ***<u>Периодичность:</u>*** *$T = \pi$*
  - ***<u>Функция возрастает на промежутке</u>*** ***$(\pi/2; \pi)$+ сдвиги на πn, $n \in Z$***
  - ***<u>Функция убывает на промежутке</u>*** ***$(0; \pi/2)$ + сдвиги на πn, $n \in Z$***
  - ***<u>f (x) > 0:</u>*** ***при любом значении x***
  - ***<u>f (x) < 0:</u>*** ***нет***
  - ***<u>y (наиб) = 1</u>, при $x = 2\pi n$, $n \in Z$***
  - ***<u>y (наим) = 0</u>, при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$***

y = cos (x – a)

- **Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если a > 0, на |a| единиц влево, если a < 0.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos (x - π/2); y = cos (x +π/4).***



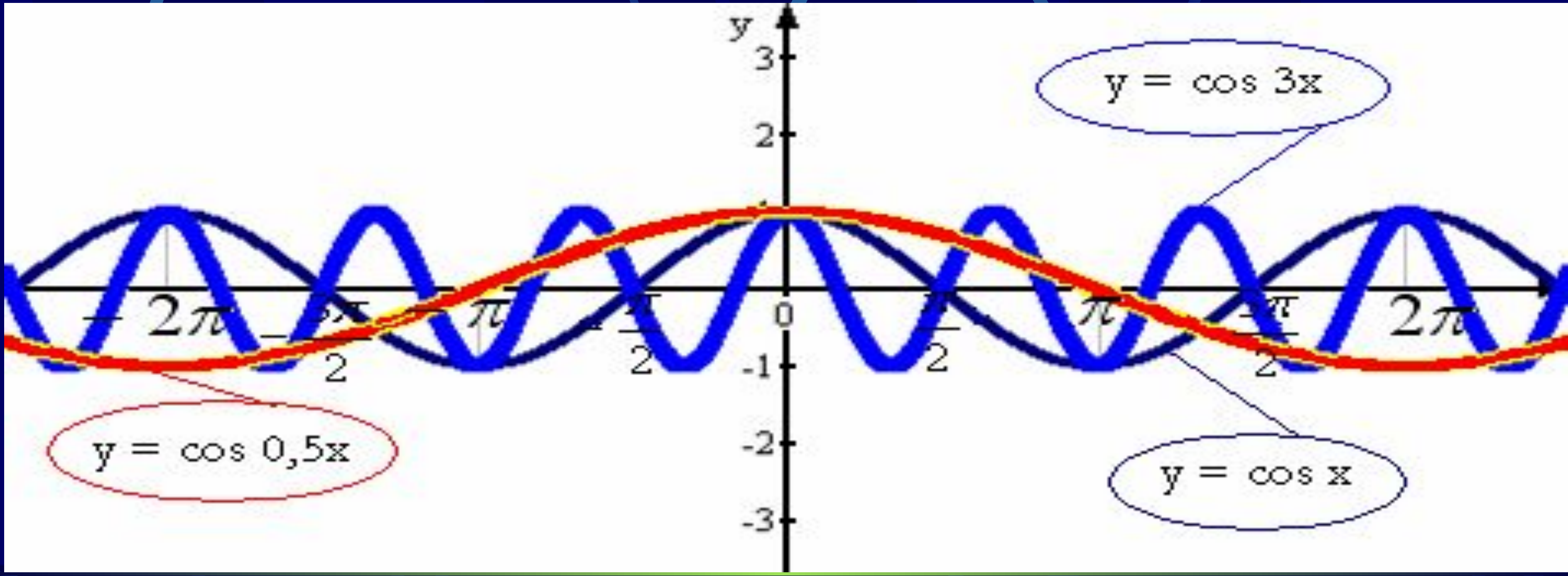
$y = \cos(x - a)$ (свойства)

- **Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**

- **<u>Например:</u> $y = \cos(x + \pi/4)$**
  - ***<u>Четность:</u>* $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$, *т.к.* $\cos(-(x + \pi/4)) = \cos(-x - \pi/4)$**
  - ***<u>Функция возрастает</u>* на $[3\pi/4; 11\pi/4]$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$**
  - ***<u>Функция убывает</u>* на $[-\pi/4; 3\pi/4]$+ *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$**
  - ***<u>$f(x) = 0$</u>* при $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$**
  - ***<u>$f(x) > 0$</u>* при $x \in (-3\pi/4; \pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$**
  - ***<u>$f((x) < 0$</u>* при $x \in (\pi/4; 5\pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$**

$y = \cos(k \cdot x)$

- Сжатие графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в k раз, если k > 1 , и растяжение в 1/k раз, если 0 < k < 1.
- <u>**Например:**</u> ***y = cos 3x; y = cos 0,5x.***

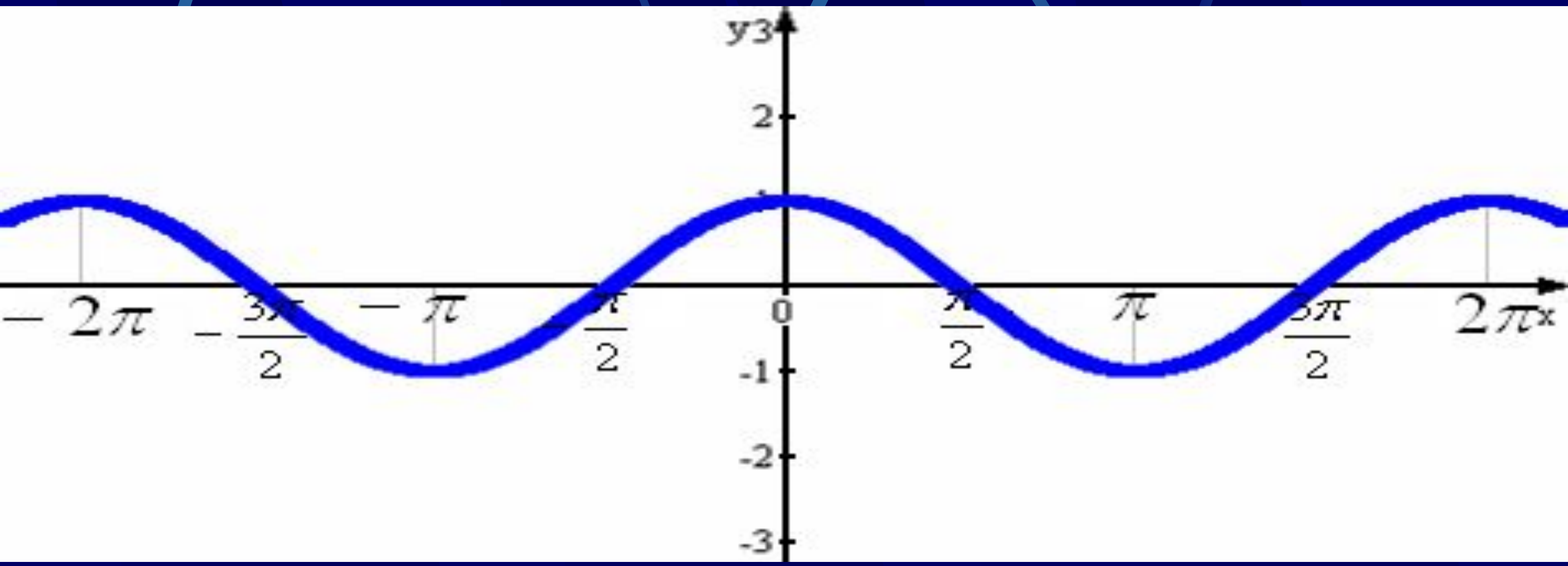


y = cos (k · x) (свойства)

- **Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos 3x***
  - ***<u>Период:</u> T = 2π/3, (т.к. наименьший положительный период функции y = cos x равен 2π, то 3T = 2π ⇒ T = 2π/3).***
  - ***<u>Функция возрастает</u> на [π/3; 2π/3] + сдвиги на 2πn/3, n∈Z.***
  - ***<u>Функция убывает</u> на [0; π/3] + сдвиги на 2πn/3, n∈Z.***
  - ***<u>f (x) = 0</u> при x = π/6 + πn/3.***
  - ***<u>f (x) > 0</u> при x∈ (-π/6; π/6) + сдвиги на 2πn/3, n ∈ Z.***
  - ***<u>f (x) < 0</u> при x∈ (π/6; π/2) + сдвиги на 2πn/3, n ∈ Z.***

$y = \cos(-x)$

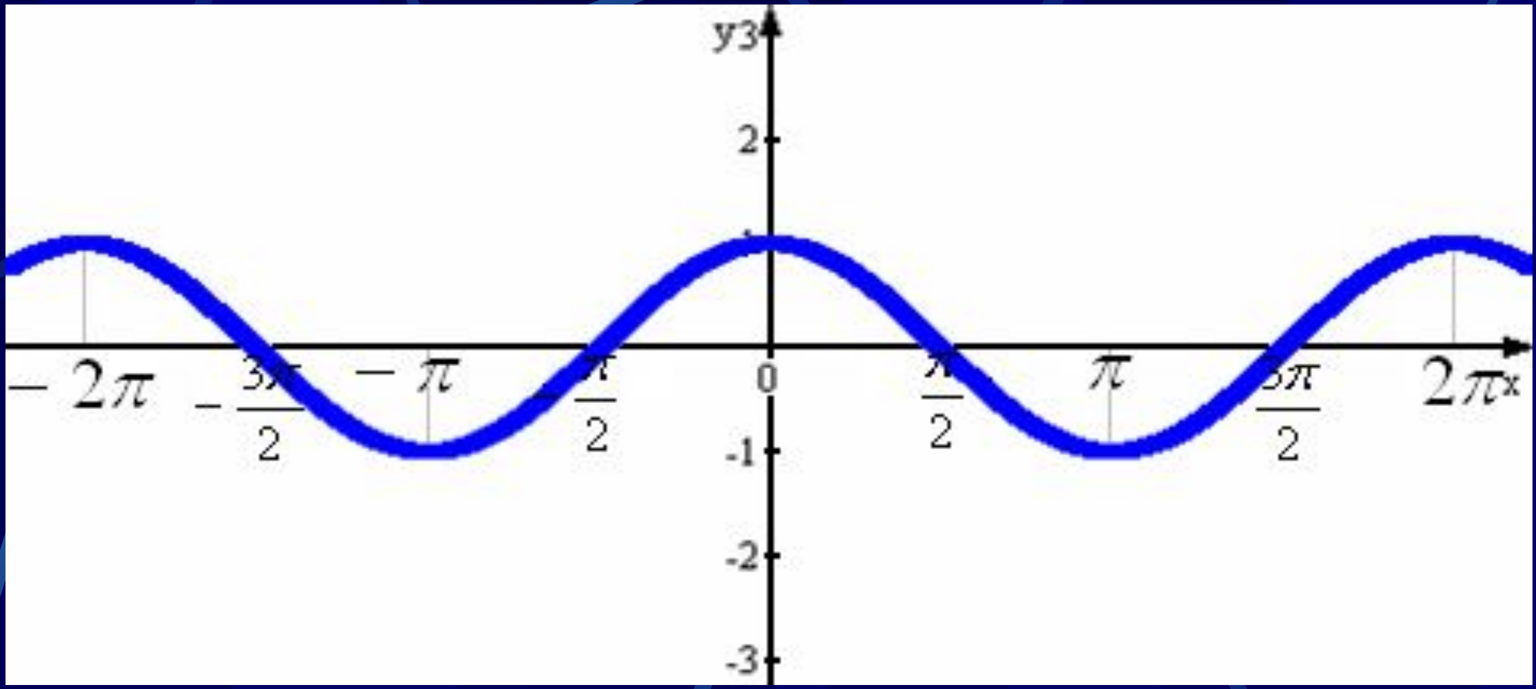
- Симметричное отражение относительно оси абсцисс.



y = cos (-x) (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos (-x)

$y = \cos |x|$

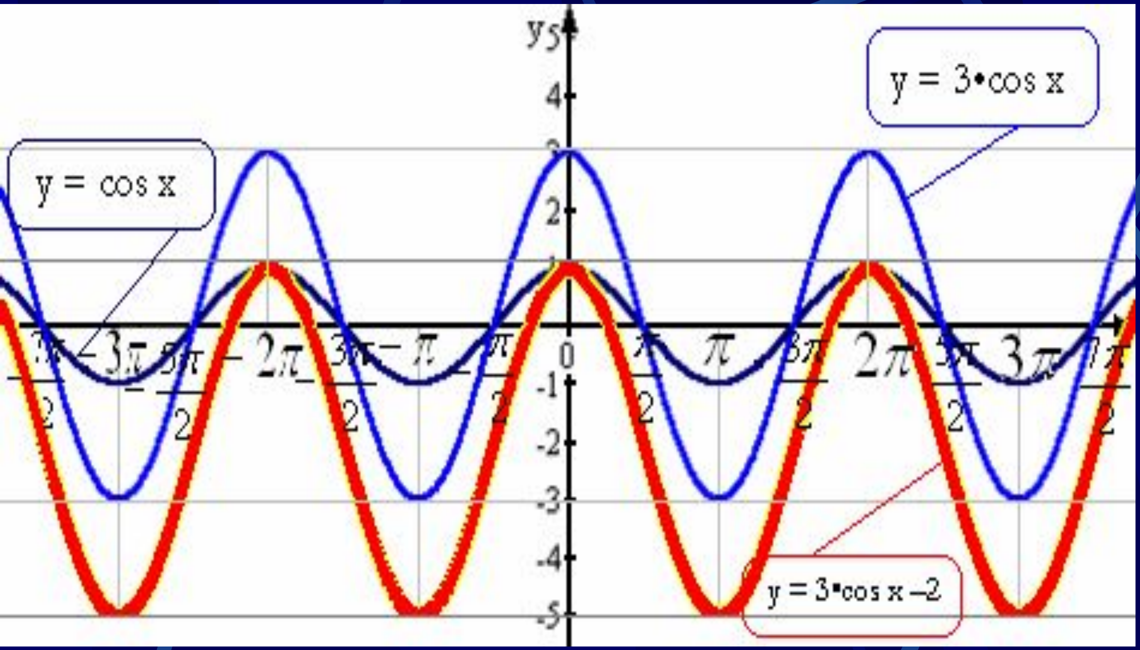


- **Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x \leq 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для $x \geq 0$.**

y = cos | x | (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos | x | = cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos | x |

y = 3 · cos x – 2



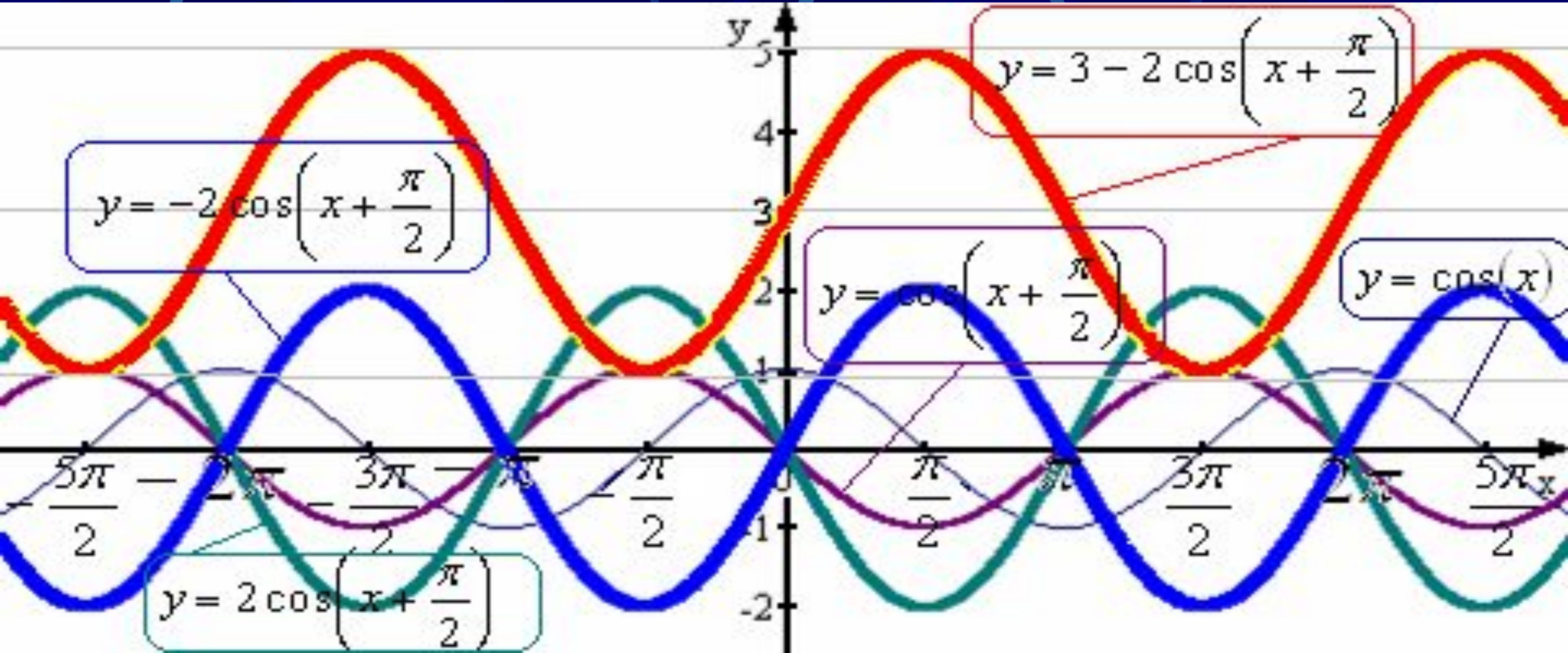
- **Построить график функции y = cos x;**
- **Построить график функции y = 3•cos x *(растяжение графика функции y = cos x вдоль оси OY в 3 раза);***
- **Построить график функции y = 3•cos x –2 *(параллельный перенос графика y = 3•cos x вдоль оси OY на 2 единицы вниз).***

Свойства функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$

- **<u>Область определения:</u>** *D(f): $x \in R$;*
- **<u>Множество значений:</u>** *$y \in [-5; 1]$, т.к. $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -5 \le 3\cos x - 2 \le 1$;*
- **<u>Периодичность:</u>** *$T = 2\pi$;*
- **<u>Четность:</u>** *четная, т.к. $3\cos(-x) - 2 = 3\cos x - 2 \Rightarrow$ график функции симметричен относительно оси OY;*
- **<u>Возрастает:</u>** *на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2; \pm 3 \ldots$;*
- **<u>Убывает:</u>** *на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$*

y = 3 – 2 · cos (x + π/2)

- Построим график функции y = cos x;
- Построим график функции y = cos (x + π/2)(параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на π/2 единиц влево);
- Построим график функции y = 2cos(x + π/2)(растяжение графика функции y = cos(x + π/2) вдоль оси OY в 2 раза);
- Построим график функции y = - 2cos(x + π/2)(симметричное отражение графика функции y = 2cos (x + π/2) относительно оси OX);
- Построим график функции y = 3 – 2cos (x + π/2) (параллельный перенос графика функции y = - 2cos (x + π/2) вдоль оси OY на 3 единицы вверх).



Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- **Область определения**: *D(f)*: $x \in R$;
- **Множество значений**: $y \in [1; 5]$, *т.к.* $-1 \le \cos(x + \pi/2) \le 1 \Rightarrow$
  $-2 \le 2\cos(x + \pi/2) \le 2 \Rightarrow 1 \le 3 - 2\cos(x + \pi/2) \le 5$;
- **Периодичность**: $T = 2\pi$;
- **Четность**: *ни четная, ни нечетная, т.к.* $y(-x) \ne y(x) \ne -y(x)$ *(график не симметричен ни оси OY, ни началу координат)*
- **Возрастает**: *на* $[3\pi/2; 5\pi/2]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots$
- **Убывает:** *на* $[\pi/2; 3\pi/2]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots$
- **Функция принимает значения равные:**
  - ***нулю***: *нет (уравнение* $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$ *не имеет корней т.к.* $|-3/2| > 1$*);*
  - ***положительные***: *при любом x;*
  - ***наибольшее, равное 5***: *при* $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.
  - ***наименьшее, равное 1***: *при* $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.