

Функция $y = \cos x$



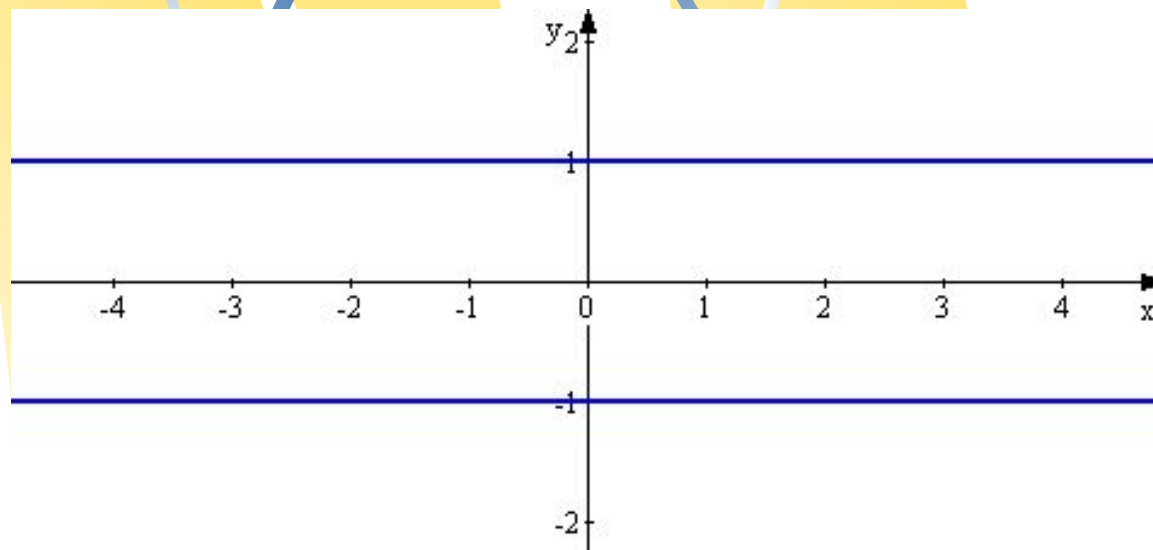
Ее свойства и график

Сегодня мы рассмотрим

- Построение графика функции $y = \cos x$;
- Свойства функции $y = \cos x$;
- Изменение графика функции $y = \cos x$ в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Изменение свойств функции $y = \cos x$ в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Примеры построения графиков функций путем анализа изменения их свойств.

Построение графика

- **Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой и множеством ее значений является отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, график этой функции расположен в полосе между прямыми $y = -1$ и $y = 1$.**

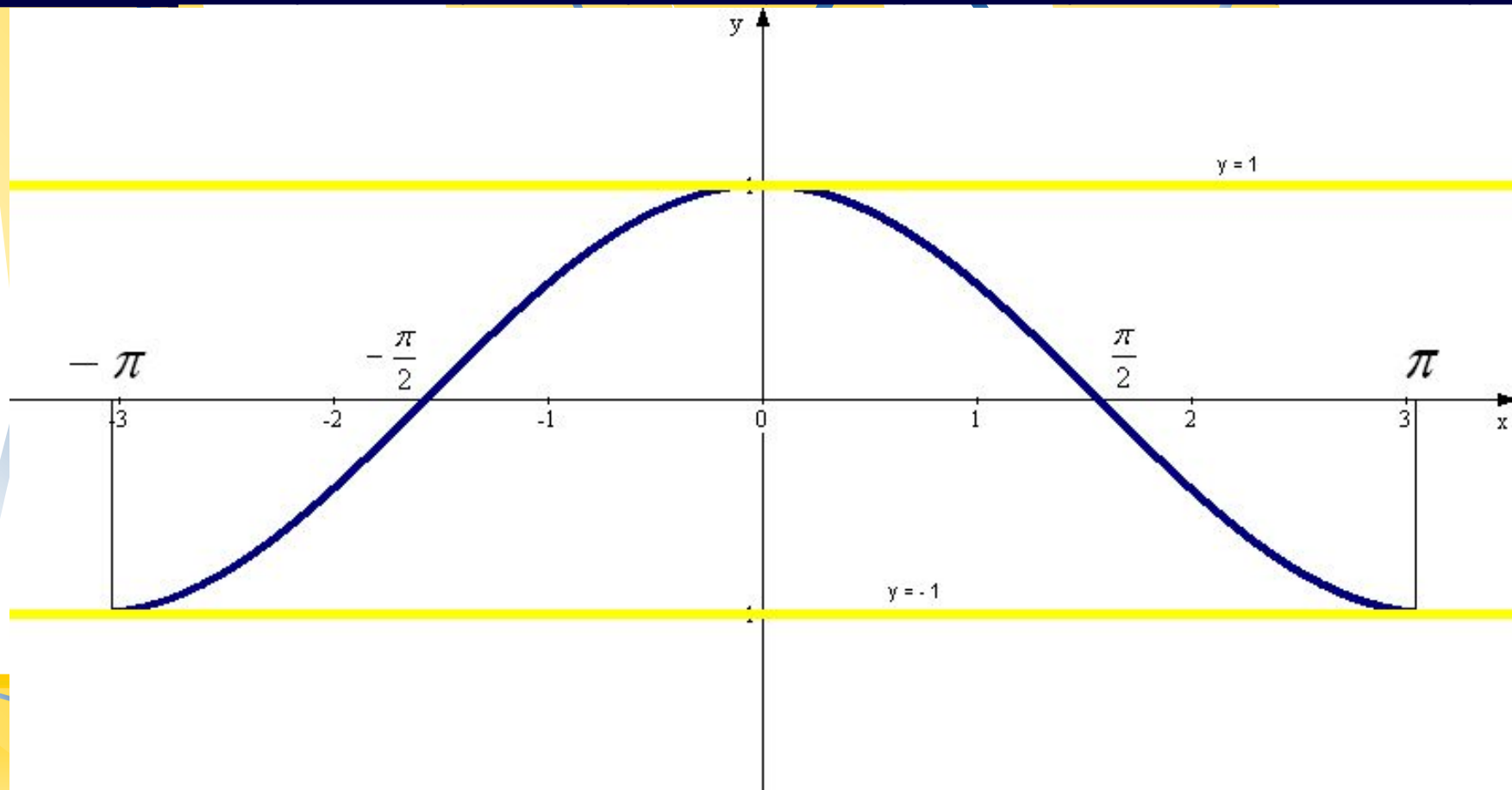


Как использовать периодичность и четность при построении

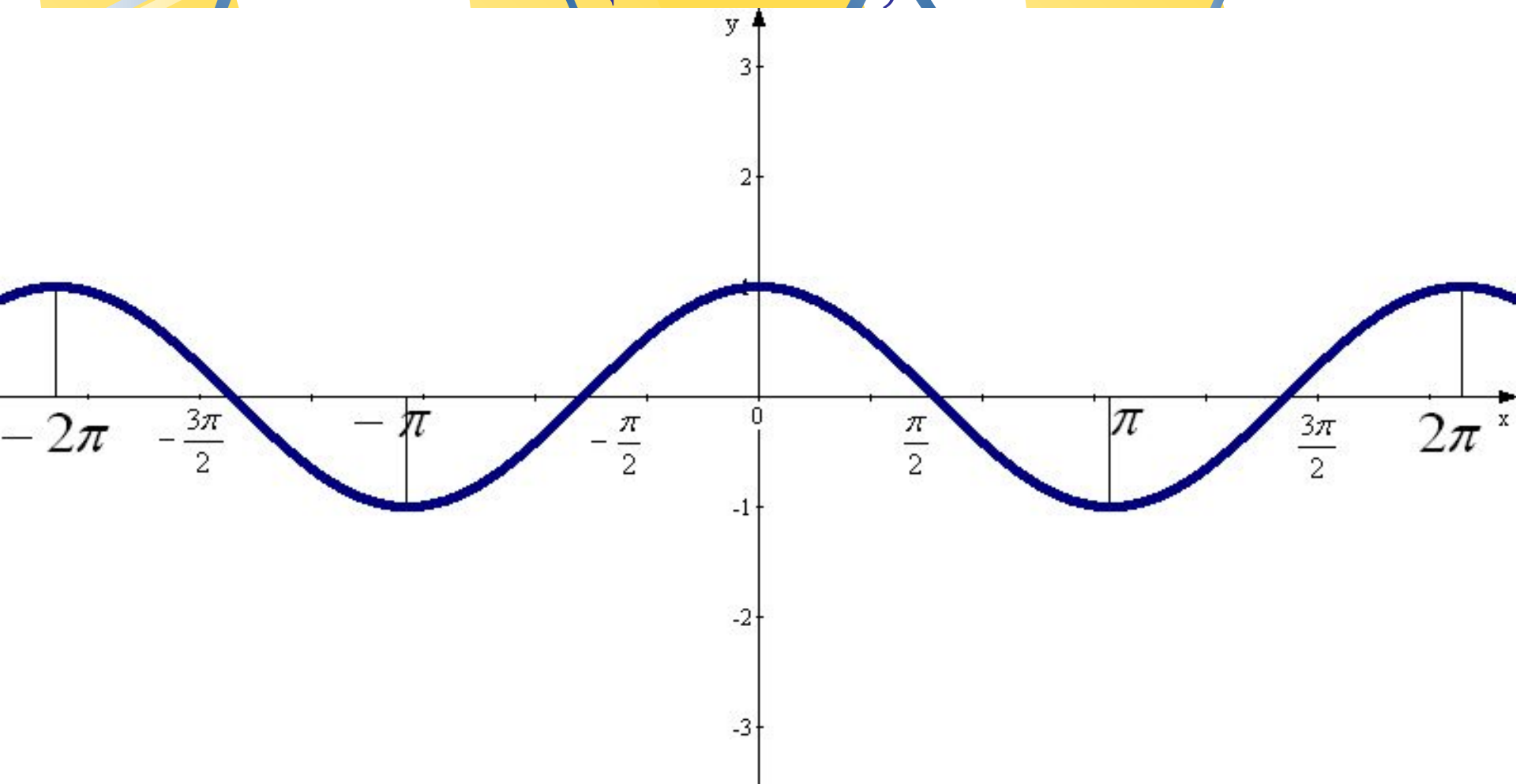
- Так как функция **периодическая** с периодом 2π , то достаточно построить ее график на каком –нибудь промежутке длиной 2π , например на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, график будет таким – же.
- Функция $y = \cos x$ является **четной**. Поэтому ее график симметричен относительно оси OY . Для построения графика на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ достаточно построить его для $0 \leq x \leq \pi$, а затем симметрично отразить относительно оси OY .

Найдем несколько точек для построения графика на отрезке $[0; \pi]$ и отразим, полученную часть графика симметрично относительно оси OY .

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$y = \cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1



Распространим полученный график на всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π , 4π и т.д. вправо, на -2π , -4π и т.д. влево, т.е. вообще на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



Итак, график функции $y = \cos x$ построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке $[0; \pi]$. Поэтому свойства функции $y = \cos x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на отрезке $[0; \pi]$. Например, функция $y = \cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi; 0]$, так как она убывает на отрезке $[0; \pi]$ и является четной.

Перечислим основные свойства функции $y = \cos x$.

Для этого нужно вспомнить

- Как найти область определения и множество значений тригонометрических функций;
- Какие функции называются периодическими и как найти период функции;
- Какие функции называются четными (нечетными);
- Когда функция возрастает (убывает);
- Как найти нули функции;
- Как определить на каких промежутках функция принимает положительные (отрицательные) значения;
- Как определить когда функция принимает наибольшее (наименьшее) значения.



Область определения

- Каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $(1; 0)$ на угол x радиан. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т.е. на множестве \mathbb{R} всех действительных чисел определены функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$.
- Таким образом, областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество \mathbb{R} всех действительных чисел.

Множество значений

- Чтобы найти множество значений функции $y = \cos x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x , т.е. установить, для каких значений y есть такие значения x , при которых $\cos x = y$. Известно, что уравнение $\cos x = a$ имеет корни, если $|a| \leq 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.
- Следовательно множеством значений функции $y = \cos x$ является отрезок $-1 \leq y \leq 1$.

Периодичность

- Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется периодом функции.
- Известно, что для любого значения x верны равенства $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π . Такие функции называются периодическими с периодом 2π .

Четность, нечетность

- Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, график симметричен относительно оси ординат.
- Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, график симметричен относительно начала координат.

Возрастание, убывание

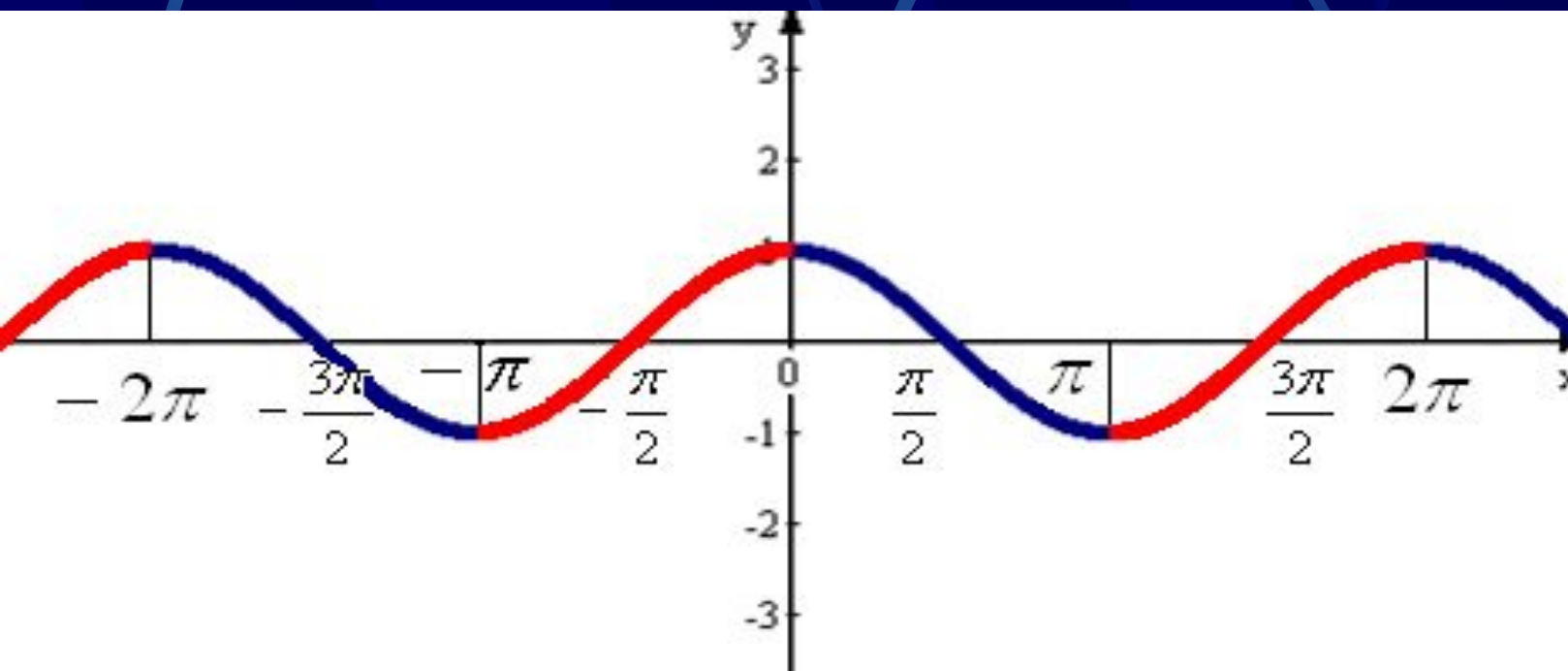
- Функция $y = f(x)$ называется возрастающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наибольшее (наименьшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ ($y_1 < y_2$), то $x_1 > x_2$ ($x_1 < x_2$).
- Функция $y = f(x)$ называется убывающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наименьшее (наибольшее) значение аргумента. Т.е. если $y_1 > y_2$ ($y_1 < y_2$), то $x_1 < x_2$ ($x_1 > x_2$).

Нули функции, положительные и отрицательные значения, наименьшее и наибольшее значения.

- Для того чтобы определить когда функция $y = \cos x$ принимает значения, равные:
 - нулю;
 - положительные;
 - отрицательные;
 - наименьшее;
 - наибольшее,
- необходимо решить:
 - уравнение $\cos x = 0$;
 - неравенство $\cos x > 0$;
 - неравенство $\cos x < 0$;
 - уравнение $\cos x = -1$;
 - уравнение $\cos x = 1$;

Свойства функции $y = \cos x$

- Область определения: $D(f): x \in R$;
- Множество значений: $y \in [-1; 1]$;
- Периодичность: $T = 2\pi$;
- Четность: четная, т.к. $\cos(-x) = \cos x$,
график симметричен относительно оси ординат;
- Функция возрастает при: $\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1)$, $n \in Z$;
- Функция убывает при: $\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

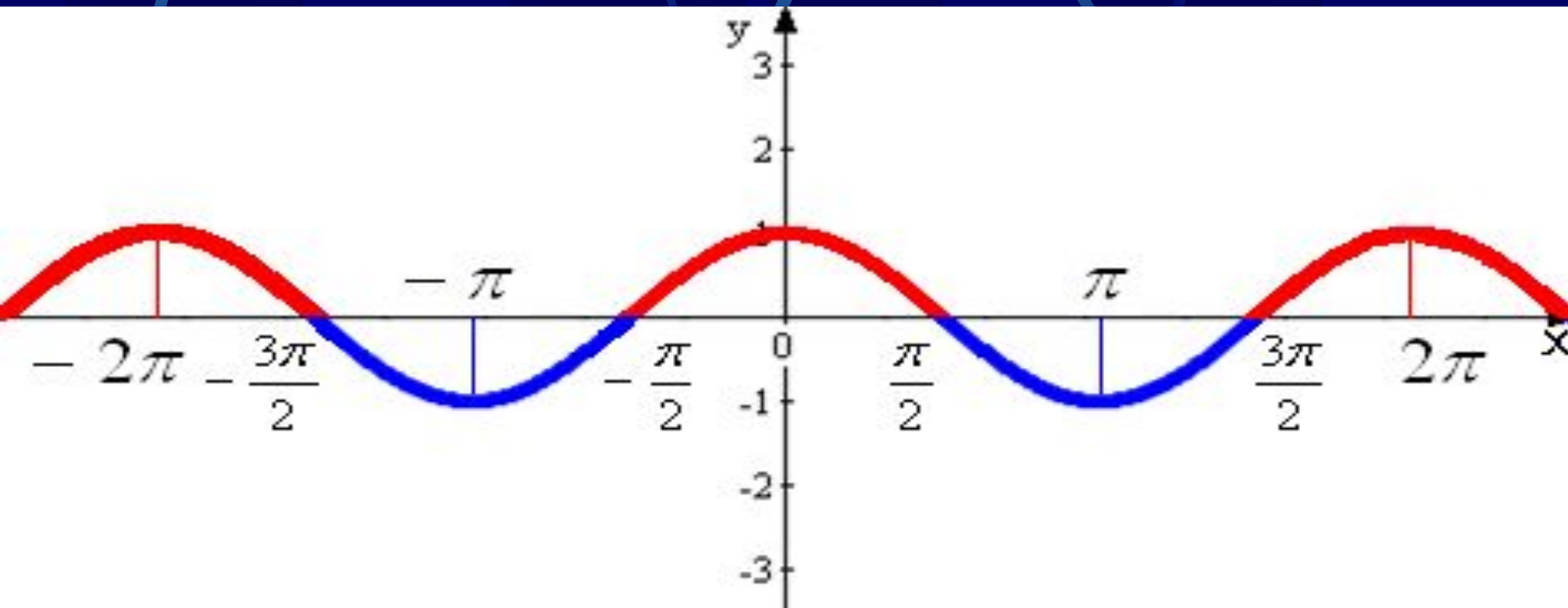


Свойства функции $y = \cos x$

(продолжение)

• Функция принимает значения:

- Равные нулю при $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- Положительные при $-\pi/2 + 2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- Отрицательные при $\pi/2 + 2\pi n < x < 3\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- Наибольшее, равное 1, при $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- Наименьшее, равное -1 , при $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



Преобразование графика функции $y = \cos x$

- Изменение функции

- $y = \cos x + A$
- $y = k \cdot \cos x$
- $y = -\cos x$
- $y = |\cos x|$

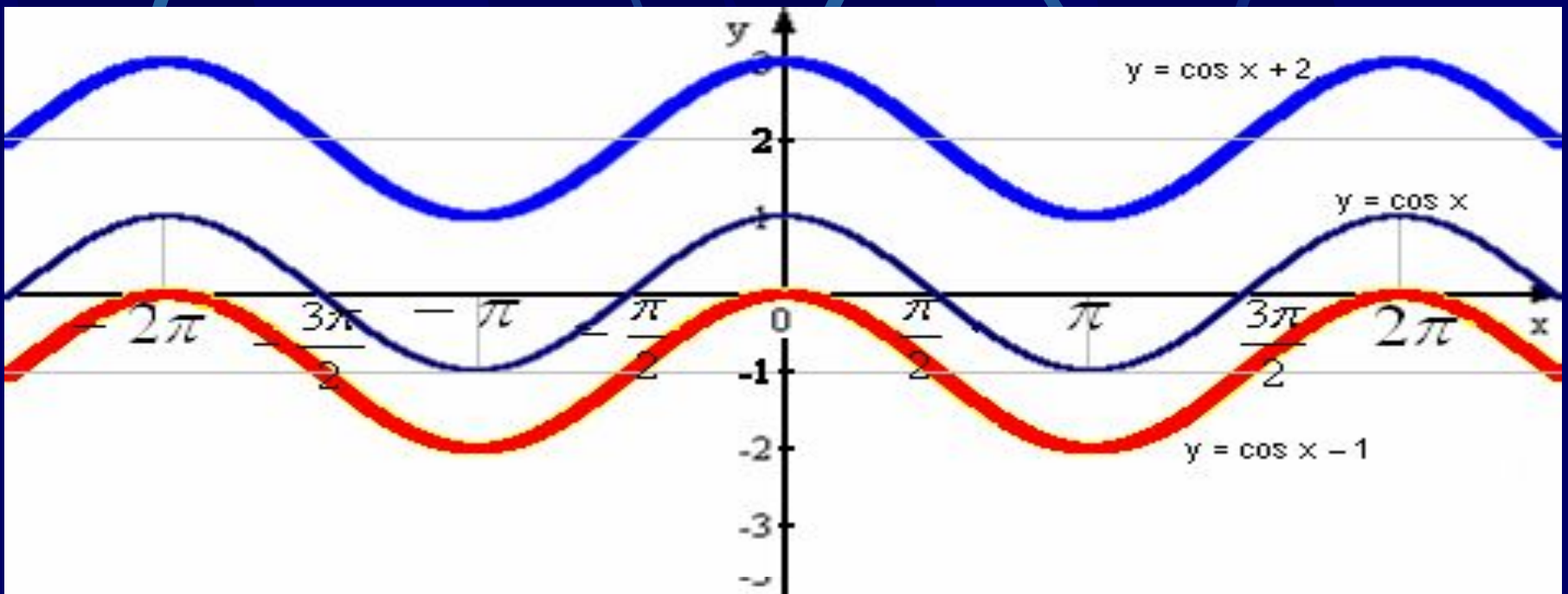


- Изменение аргумента

- $y = \cos (x - a)$
- $y = \cos (k \cdot x)$
- $y = \cos (-x)$
- $y = \cos |x|$

$y = \cos x + A$

- Параллельный перенос графика функции $y = \cos x$ вдоль оси ординат на A единиц вверх, если $A > 0$ и на $|A|$ единиц вниз, если $A < 0$.
- Например: $y = \cos x + 2$; $y = \cos x - 1$.

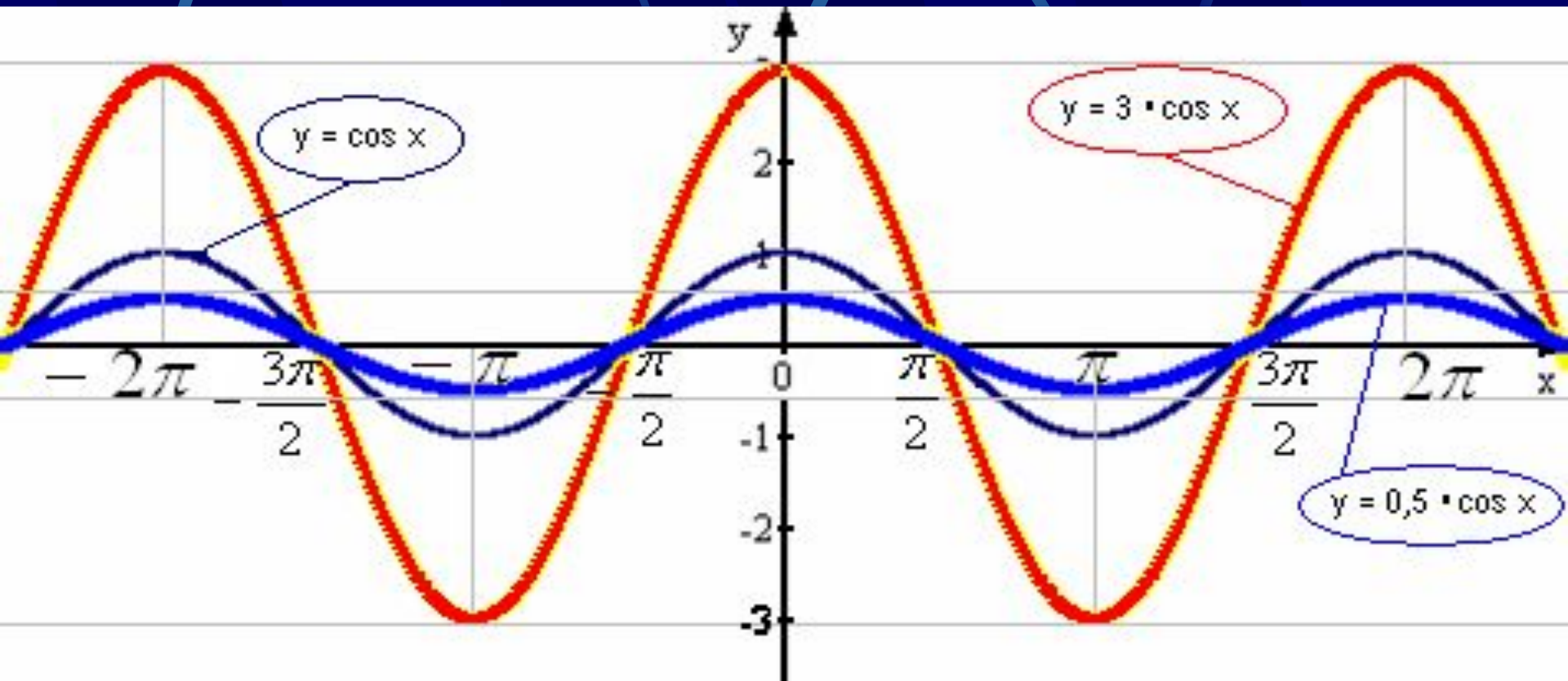


$y = \cos x + A$ (свойства)

- Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.
- Например: $y = \cos x + 2$.
 - Е (f): $\cos x + 2 = a \Rightarrow \cos x = a - 2$, т.к. $-1 \leq y \leq 1$, то $-1 \leq a - 2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq a \leq 3$, т.е. $y \in [1; 3]$.
 - Нули функции: $\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ данное уравнение не имеет корней т.к. $|-2| > 1 \Rightarrow$ график данной функции не пересекает ось абсцисс.
 - f(x) > 0: при любом значении x.
 - f(x) < 0: нет.
 - y (наиб) = 3, при: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ (т.к. $\cos x + 2 = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$).
 - y (наим) = 1, при: $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ (т.к. $\cos x + 2 = 1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$).

$$y = k \cdot \cos x$$

- Растяжение графика функции $y = \cos x$ вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в k раз, если $k > 0$ и сжатие в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
- Например: $y = 3 \cdot \cos x$; $y = 0,5 \cdot \cos x$.

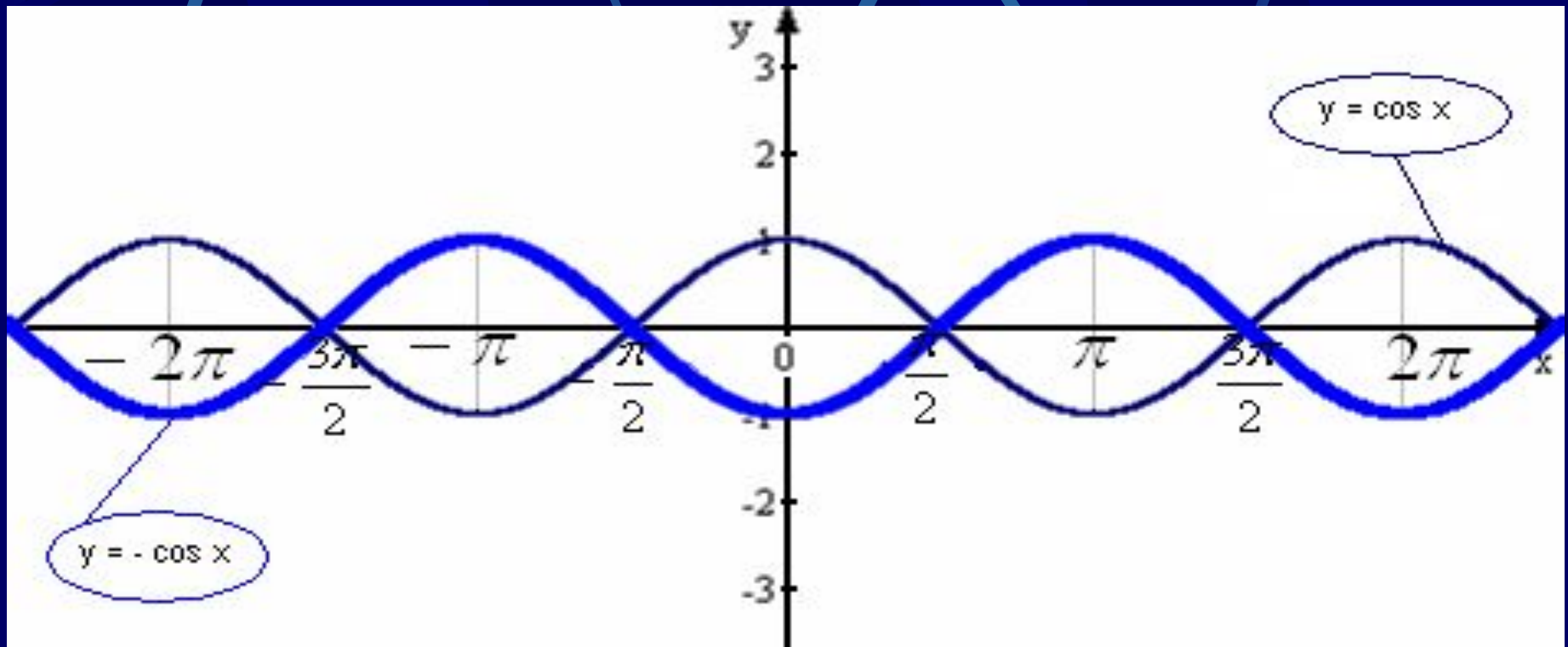


$y = k \cdot \cos x$ (свойства)

- Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.
- Например: $y = 3 \cdot \cos x$
 - $E(f)$: $3 \cdot \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$, т.к. $-1 \leq y \leq 1$, то $-1 \leq a/3 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq a \leq 3$, т.е. $y \in [-3; 3]$.
 - Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при: $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (т.к. $3 \cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$).
 - Функция принимает наименьшее значение, равное -3, при: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (т.к. $3 \cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$).

$$y = -\cos x$$

- Симметричное отражение графика функции $y = \cos x$ относительно оси абсцисс.

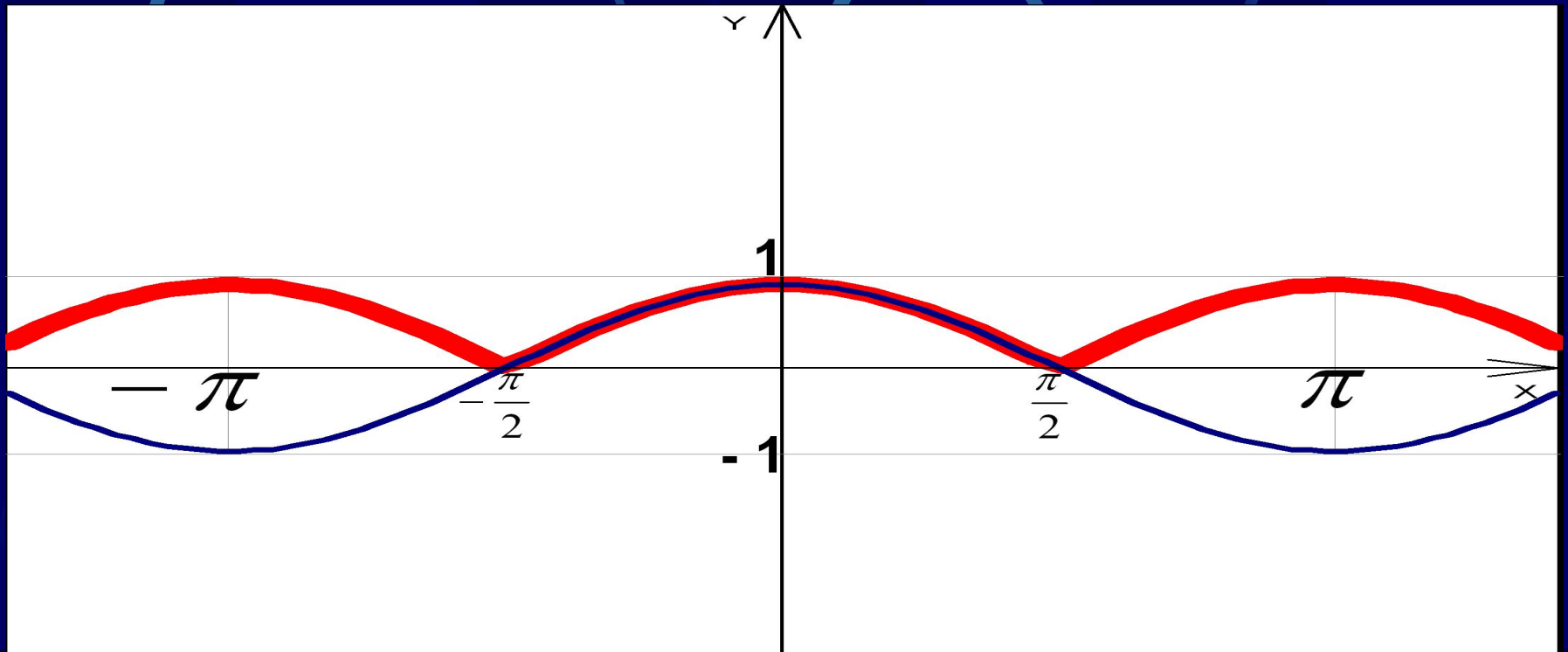


$y = -\cos x$ (свойства)

- Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.
 - Функция возрастает на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
 - Функция убывает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
 - Функция принимает положительные значения на интервале $(\pi/2; 3\pi/2)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2 \dots$
 - Функция принимает отрицательные значения на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2 \dots$

$$y = |\cos x|$$

- Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.

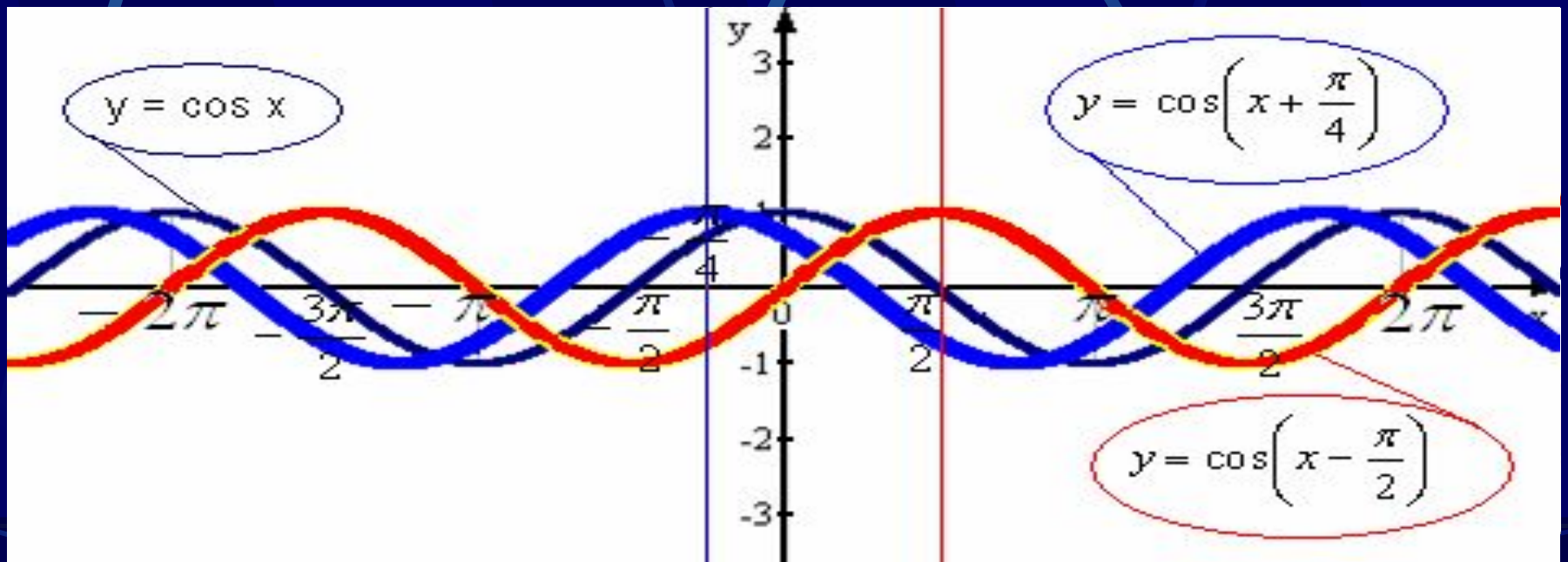


$y = |\cos x|$ (свойства)

- **Изменяются:** множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.
 - $E(f)$: $y \in [0; 1]$
 - Периодичность: $T = \pi$
 - Функция возрастает на промежутке $(\pi/2; \pi) +$ сдвиги на πn , $n \in \mathbb{Z}$
 - Функция убывает на промежутке $(0; \pi/2) +$ сдвиги на πn , $n \in \mathbb{Z}$
 - $f(x) > 0$: при любом значении x
 - $f(x) < 0$: нет
 - y (наиб) = 1, при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 - y (наим) = 0, при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$y = \cos(x - a)$

- Параллельный перенос графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если $a > 0$, на $|a|$ единиц влево, если $a < 0$.
- Например: $y = \cos(x - \pi/2)$; $y = \cos(x + \pi/4)$.

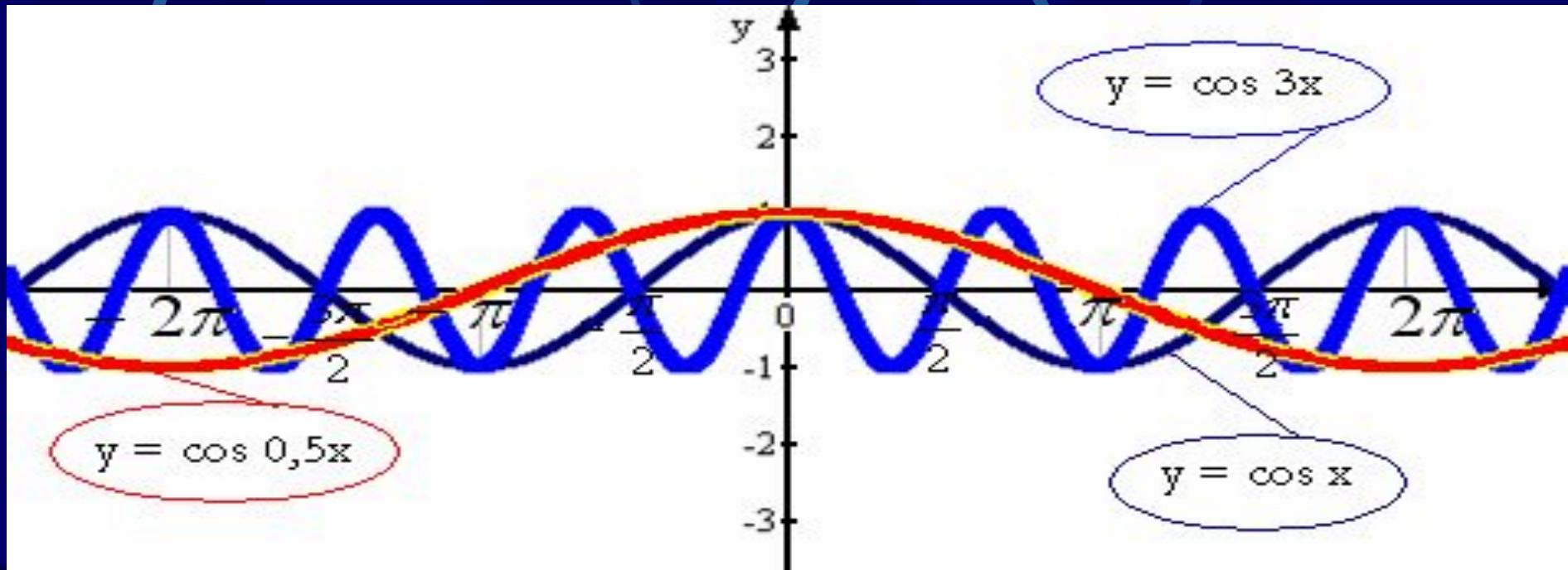


$y = \cos(x - a)$ (свойства)

- Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.
- Например: $y = \cos(x + \pi/4)$
 - Четность: $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$, т.к. $\cos(-(x + \pi/4)) = \cos(-x - \pi/4)$
 - Функция возрастает на $[3\pi/4; 11\pi/4]$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 - Функция убывает на $[-\pi/4; 3\pi/4]$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 - $f(x) = 0$ при $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 - $f(x) > 0$ при $x \in (-3\pi/4; \pi/4)$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 - $f(x) < 0$ при $x \in (\pi/4; 5\pi/4)$ + сдвиги на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$y = \cos(k \cdot x)$

- Сжатие графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в k раз, если $k > 1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
- Например: $y = \cos 3x$; $y = \cos 0,5x$.

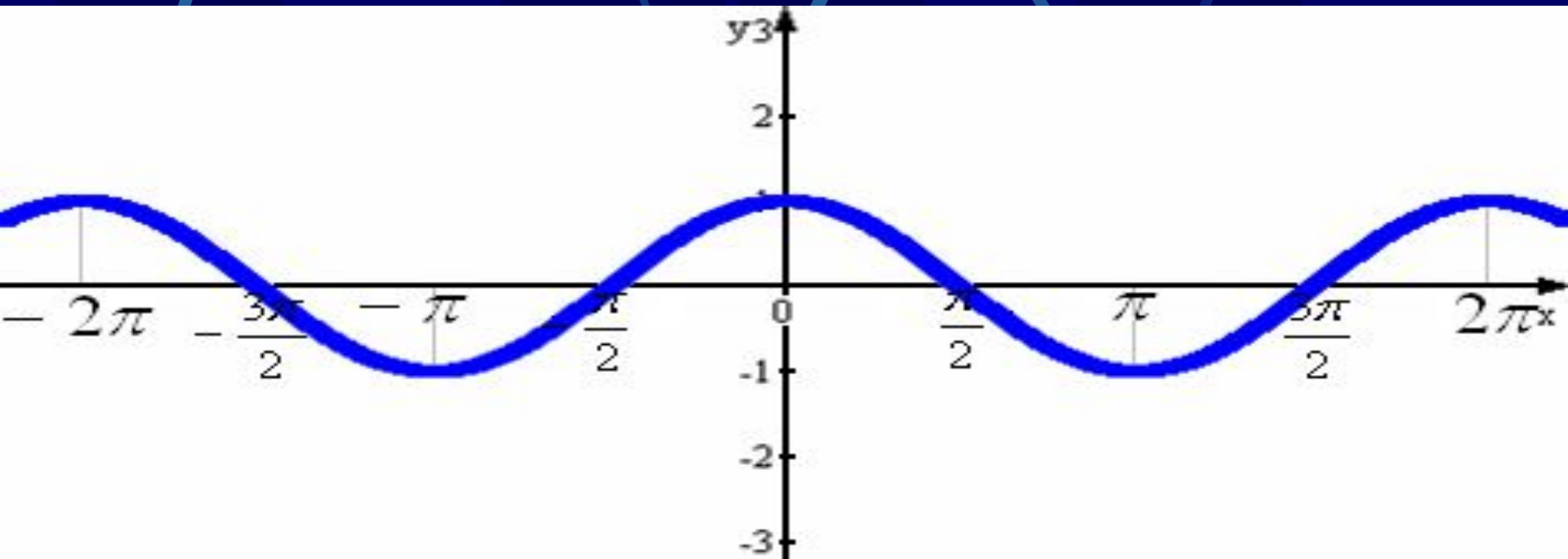


$y = \cos(k \cdot x)$ (свойства)

- Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.
- Например: $y = \cos 3x$
 - Период: $T = 2\pi/3$, (т.к. наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π , то $3T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/3$).
 - Функция возрастает на $[\pi/3; 2\pi/3] +$ сдвиги на $2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}$.
 - Функция убывает на $[0; \pi/3] +$ сдвиги на $2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}$.
 - $f(x) = 0$ при $x = \pi/6 + \pi n/3$.
 - $f(x) > 0$ при $x \in (-\pi/6; \pi/6) +$ сдвиги на $2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}$.
 - $f(x) < 0$ при $x \in (\pi/6; \pi/2) +$ сдвиги на $2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}$.

$$y = \cos(-x)$$

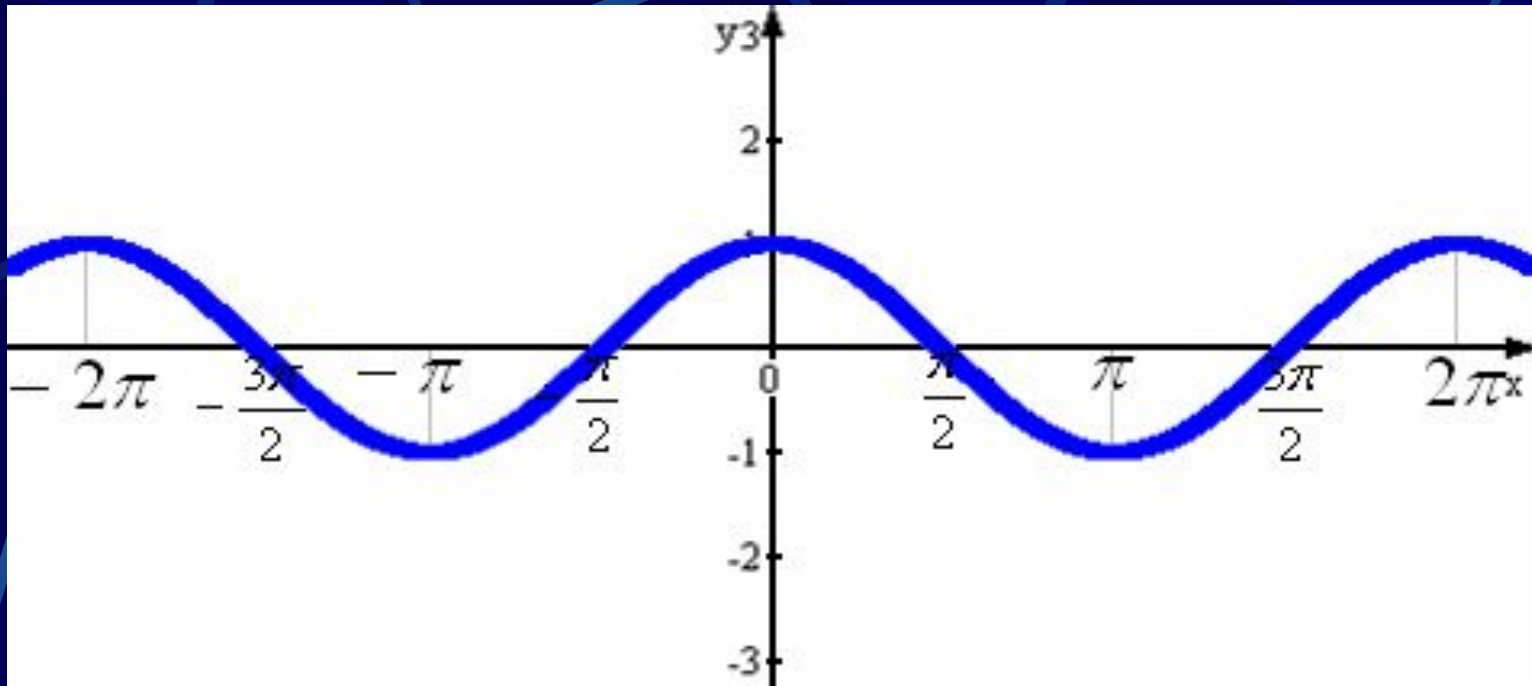
- Симметричное отражение относительно оси абсцисс.



$y = \cos(-x)$ (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция $y = \cos x$ – четная и $\cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow$ все свойства функции $y = \cos x$ справедливы и для функции $y = \cos(-x)$

$$y = \cos |x|$$

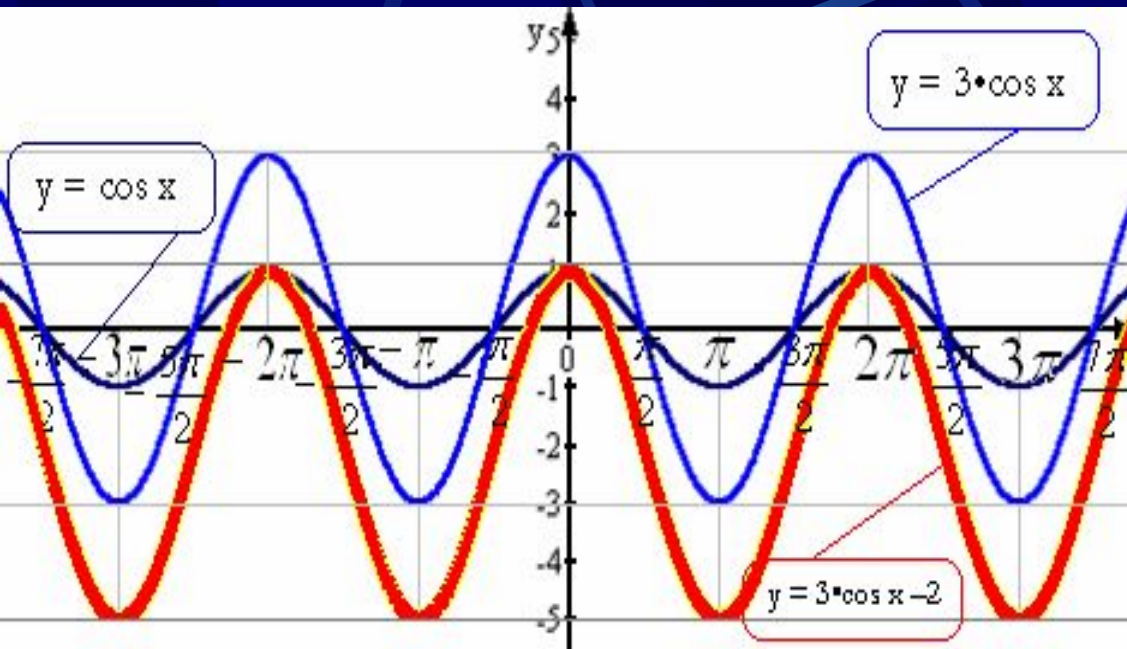


- Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x \leq 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для $x \geq 0$.

$y = \cos |x|$ (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция $y = \cos x$ – четная и $\cos |x| = \cos (-x) = \cos (x) \Rightarrow$ все свойства функции $y = \cos x$ справедливы и для функции $y = \cos |x|$

$$y = 3 \cdot \cos x - 2$$



- Построить график функции $y = \cos x$;
- Построить график функции $y = 3 \cdot \cos x$ (растяжение графика функции $y = \cos x$ вдоль оси OY в 3 раза);

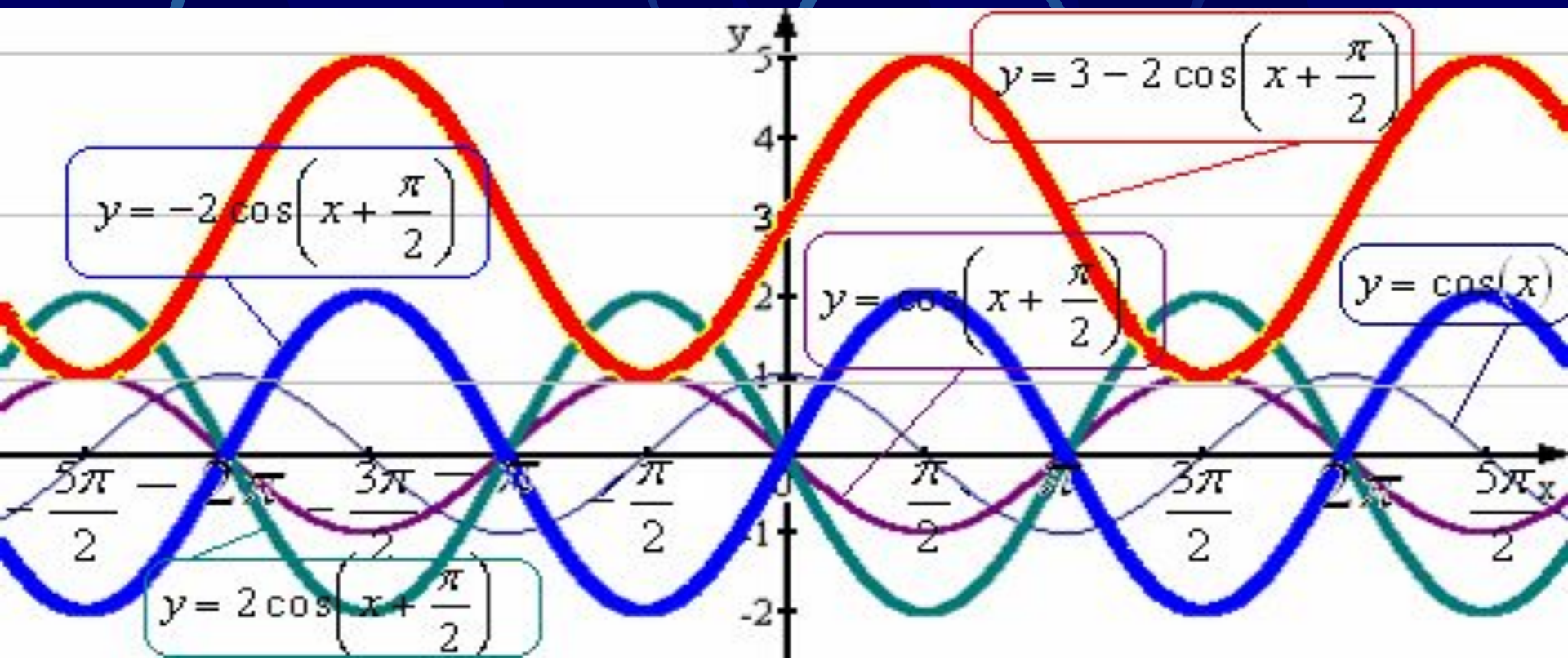
- Построить график функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$ (параллельный перенос графика $y = 3 \cdot \cos x$ вдоль оси OY на 2 единицы вниз).

Свойства функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$

- Область определения: $D(f): x \in R$;
- Множество значений: $y \in [-5; 1]$, т.к. $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cos x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \cos x - 2 \leq 1$;
- Периодичность: $T = 2\pi$;
- Четность: четная, т.к. $3 \cos(-x) - 2 = 3 \cos x - 2 \Rightarrow$ график функции симметричен относительно оси OY ;
- Возрастает: на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2; \pm 3 \dots$;
- Убывает: на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

$y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- Построим график функции $y = \cos x$;
- Построим график функции $y = \cos(x + \pi/2)$ (параллельный перенос графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс на $\pi/2$ единиц влево);
- Построим график функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$ (растяжение графика функции $y = \cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY в 2 раза);
- Построим график функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$ (симметричное отражение графика функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$ относительно оси OX);
- Построим график функции $y = 3 - 2\cos(x + \pi/2)$ (параллельный перенос графика функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY на 3 единицы вверх).



Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- Область определения: $D(f): x \in \mathbb{R}$;
- Множество значений: $y \in [1; 5]$, т.к. $-1 \leq \cos(x + \pi/2) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\cos(x + \pi/2) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 3 - 2\cos(x + \pi/2) \leq 5$;
- Периодичность: $T = 2\pi$;
- Четность: ни четная, ни нечетная, т.к. $y(-x) \neq y(x) \neq -y(x)$ (график не симметричен ни оси ОУ, ни началу координат)
- Возрастает: на $[3\pi/2; 5\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
- Убывает: на $[\pi/2; 3\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
- Функция принимает значения равные:
 - нулю: нет (уравнение $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$ не имеет корней т.к. $|-3/2| > 1$);
 - положительные: при любом x ;
 - наибольшее, равное 5: при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - наименьшее, равное 1: при $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.