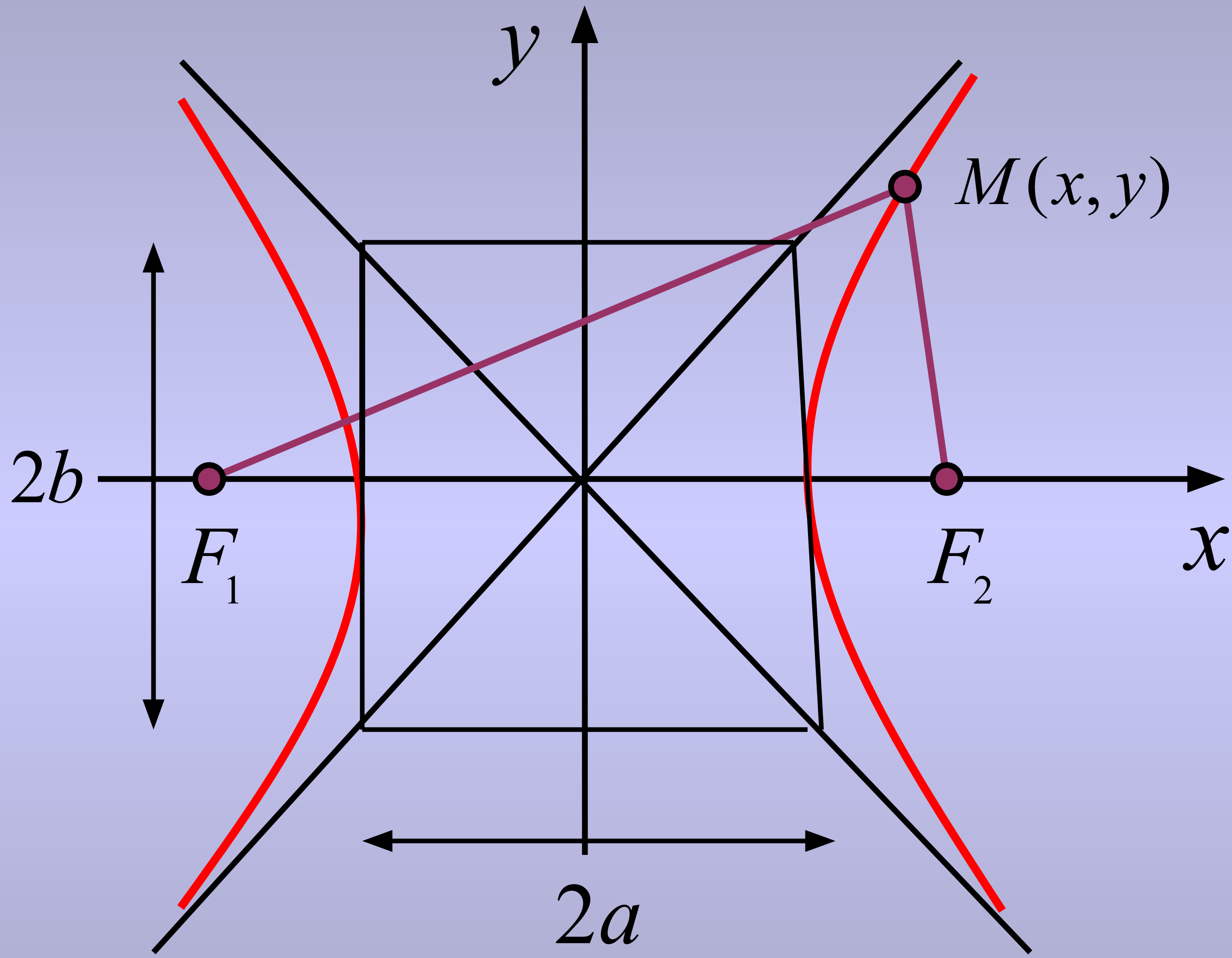
4.4. ГИПЕРБОЛА

***ГИПЕРБОЛОЙ** называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (меньшая, чем расстояние между фокусами)*


y
M(x, y)
2b
F1
F2
x
2a

Введем обозначения:

$$F_1(c;0) \qquad F_2(-c;0)$$

$$\left|F_1F_2\right| = 2c$$

a **– действительная полуось гиперболы**

b **– мнимая полуось гиперболы**

Для любой точки *M(x,y)*, принадлежащей гиперболе, по определению выполняется равенство:

$$\left|F_1M - MF_2\right| = 2a$$

Прямые, проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты

$$\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad -\frac{b}{a}$$

называются <u>**асимптотами**</u> гиперболы.

Асимптоты делят плоскость на 4 области, в двух из которых расположена гипербола.

Точки гиперболы по мере удавления от оси y приближаются к асимптотам, т.е. расстояние между точками гиперболы и асимптотой при увеличении x уменьшается и стремится к нулю.

ТЕОРЕМА

Для того, чтобы точка М(х,у) принадлежала гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2

где $b^2 = c^2 - a^2$

Покажем, что координаты точки, принадлежащей гиперболе, удовлетворяют уравнению (2).

Т.к. точка *M(x,y)* принадлежит гиперболе, то по определению гиперболы, должно выполнятся условие

$$\left|F_1M - F_2M\right| = 2a$$

Выразим каждое расстояние по формуле расстояния между двумя точками:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(-c;0) \\ M(x;y) \end{array}\right] \Rightarrow \left|F_1M\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$F_2(c;0)$$
$$M(x;y)$$
$$\Rightarrow \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Тогда:

$$|F_1M - F_2M| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Возводим в квадрат обе части выражения:

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

Возводим в еще раз квадрат:

$$a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2\underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2} - a^2y^2 = a^2\underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2}$$

Делим все выражение на a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

каноническое уравнение гиперболы

Отношение фокусного расстояния к длине действительной оси гиперболы называется ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Для гиперболы $c > a$

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

Следовательно, для гиперболы $\varepsilon > 1$

Чем меньше отношение мнимой и действительной полуосей, тем меньше эксцентриситет и тем более гипербола будет прижата к оси *x*, и наоборот.