

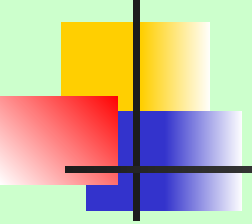
«Применение

графического

и функционально-графического

МЕТОДОВ

К РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ »



*Математика – наука
молодых. Иначе и быть не
может. Занятия
математикой – это такая
гимнастика ума, для которой
нужны вся гибкость и вся
выносливость молодости.*

*Норберт Винер
(1894-1964),
американский ученый*



Неравенство -

*отношение между числами a и b
(математическими выражениями),
соединенное знаками*

$<$; $>$; \leq ; \geq ; \neq .

Историческая справка

- Задачи на доказательство равенств и неравенств возникли в глубокой древности . Для обозначения знаков равенства и неравенства использовали специальные слова или их сокращения.

- Более 2000 лет до н.э. было известно неравенство

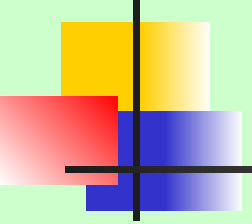
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ где } a > 0, b > 0.$$

Обращается в верное равенство при $a=b$.

- IV век до н.э., **Евклид**, V книга «Начал»: если a, b, c, d – положительные числа и a – наибольшее число в пропорции $a/b=c/d$, то выполняется неравенство $a+d=b+c$.

- III век , основной труд **Паппа Александрийского** «Математическое собрание»: если a, b, c, d – положительные числа и $a/b > c/d$, то выполняется неравенство $ad > bc$.

Современные специальные знаки

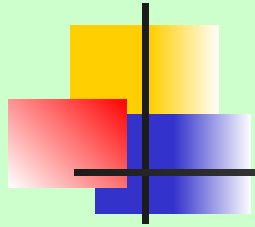
- 
- 1557 год. Введен знак равенства $=$ английским математиком **Р.Рикордом**.

Его мотив: «Никакие два предмета не могут быть более равными, чем два параллельных отрезка».

- 1631 год. Введены знаки $>$ и $<$ английским ученым **Харритом** в книге «Практика аналитического искусства».
-

- 1734 год. Знаки \leq ; \geq введены французским математиком **П.Буге**.

Виды неравенств



Числовые

С переменной
(одной или
несколькими)

Строгие
Нестрогие

Простые
Двойные
Кратные

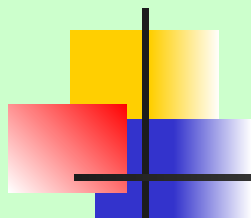
С модулем
С параметром

Системы
Совокупности

Нестандартные

Целые алгебраические:
-линейные
-квадратные
-высших степеней
Дробно-рациональные
Иррациональные
Тригонометрические
Показательные
Логарифмические
Смешанного типа

Методы решения неравенств



Графический

Основные

*Метод
интервалов
(в том числе
обобщенный)*

Алгебраические

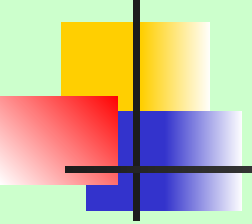
Функционально-
графический

- Использование свойств неравенств
- Переход к равносильным системам
- Переход к равносильным совокупностям
- Замена переменной

Метод расщепления
для нестрогих неравенств

Специальные

Неравенства



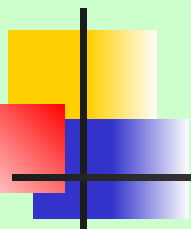
Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое при подстановке обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – найти все его решения или доказать, что их нет.

Два **неравенства** называются **равносильными**, если все решения каждого являются решениями другого неравенства или оба неравенства решений не имеют.

Охарактеризуйте неравенства.

Решите устно



$$1). x^2 - 9 < 0$$

$$2) x(\sqrt{3} - 2) > 0$$

$$3) (x - 2)(x + 3) \geq 0$$

$$4) \sqrt{x-1} > 2$$

$$5) \frac{x+1}{x^2+1} < 0$$

$$6) \sqrt{\frac{x+1}{x-4}} \leq 0$$

$$7) \sqrt{x^2} \leq 9$$

$$8) |3x^2 - 9| > -2$$

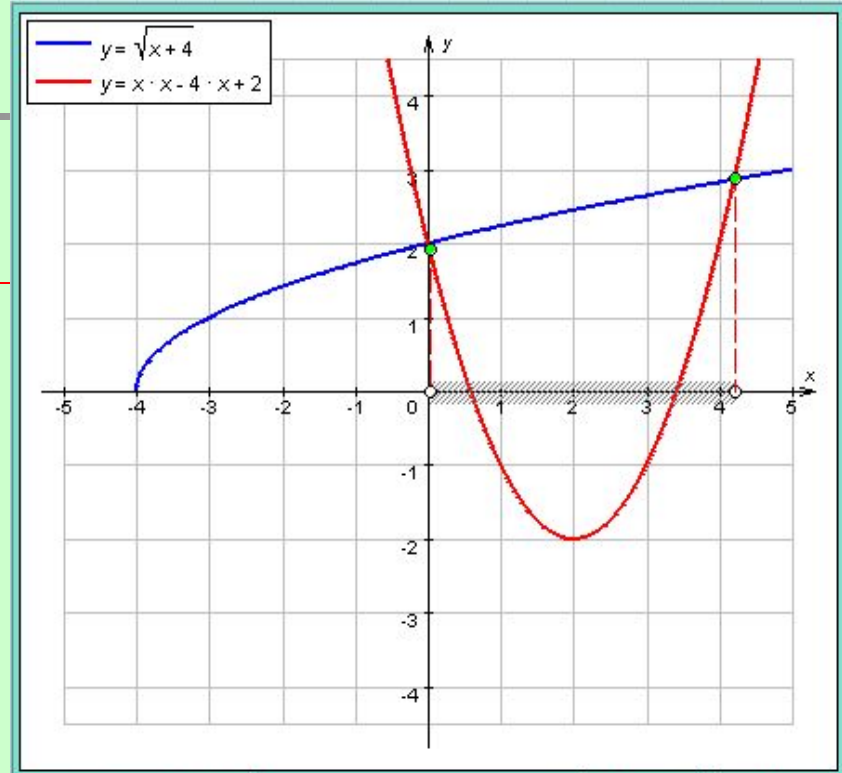
$$9) ax > 0$$

Графический МЕТОД

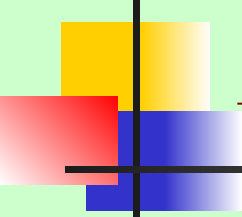
- Решите графически неравенство

$$\sqrt{x+4} > x^2 - 4x + 2$$

- 1) Строим график $y = \sqrt{x+4}$.
- 2) Строим график $y = x^2 - 4x + 2$ в той же системе координат.
- 3) Находим абсциссы точек пересечения графиков
(значения берутся приближенно, точность проверяем подстановкой).
- 4) Определяем по графику решения данного неравенства.
- 5) Записываем ответ.



Ответ : (0;4,2).



Функционально-графический метод решения неравенства $f(x) < g(x)$

1. Подбором найдем корень уравнения $f(x)=g(x)$, используя свойства монотонных функций;
2. Построим схематически графики обеих функций, проходящие через точку с найденной абсциссой;
3. Выберем решение неравенства, соответствующее знаку неравенства;
4. Запишем ответ.

Функционально-графический метод

Решите неравенство: $\sqrt{x+7} \geq 5-x$

Решение. I. Решим уравнение $\sqrt{x+7} = 5-x$

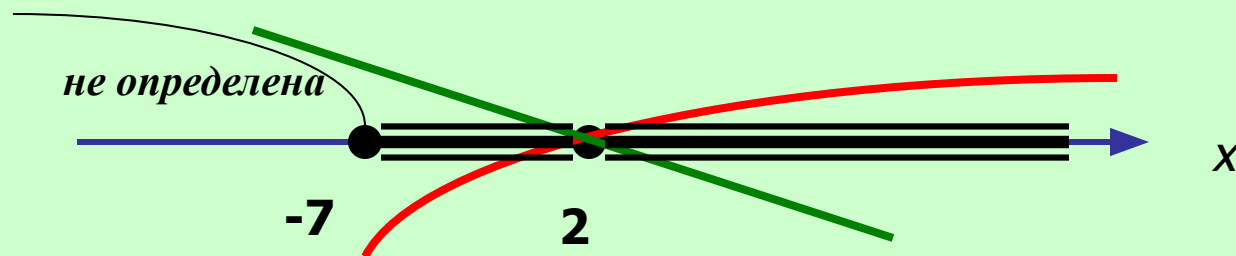
1) $f(x) = \sqrt{x+7}$ – возрастает на $[-7; +\infty)$.

2) $g(x) = 5-x$ убывает на этом промежутке.

3) Уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня.

4) Подбором находим, что $x=2$.

II. Схематически изобразим на числовой оси Ox графики функций $f(x)$ и $g(x)$, проходящие через точку $x=2$.



III. Определим решения и запишем ответ.

Ответ. $[2; 7; 2)$



Решите неравенства:

1) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} > 4,$

2) $(x-1)^5 + x^5 \leq 45 - x^3 - 2x$

3) $\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{5x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 8} < 7$

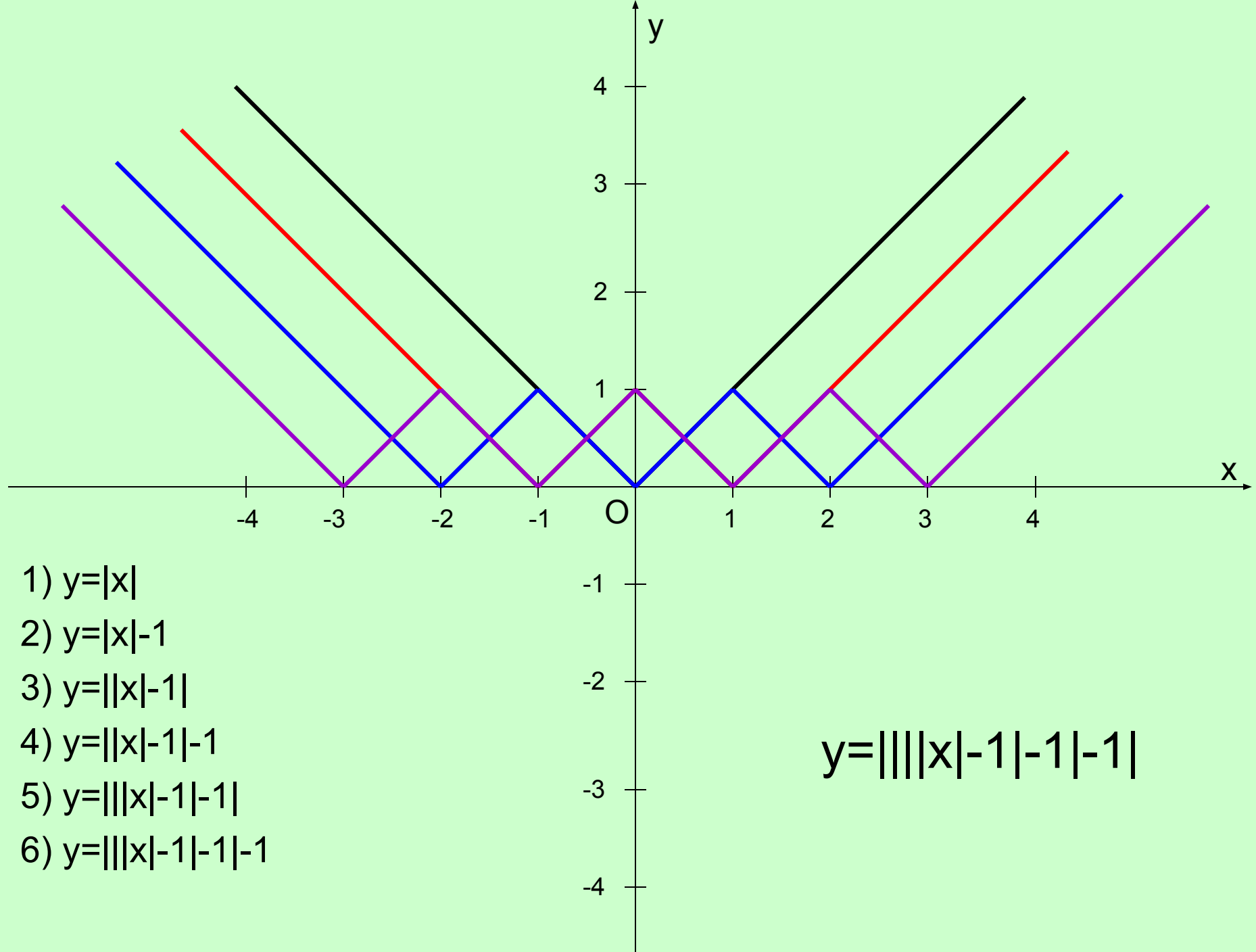


Построить графики функции

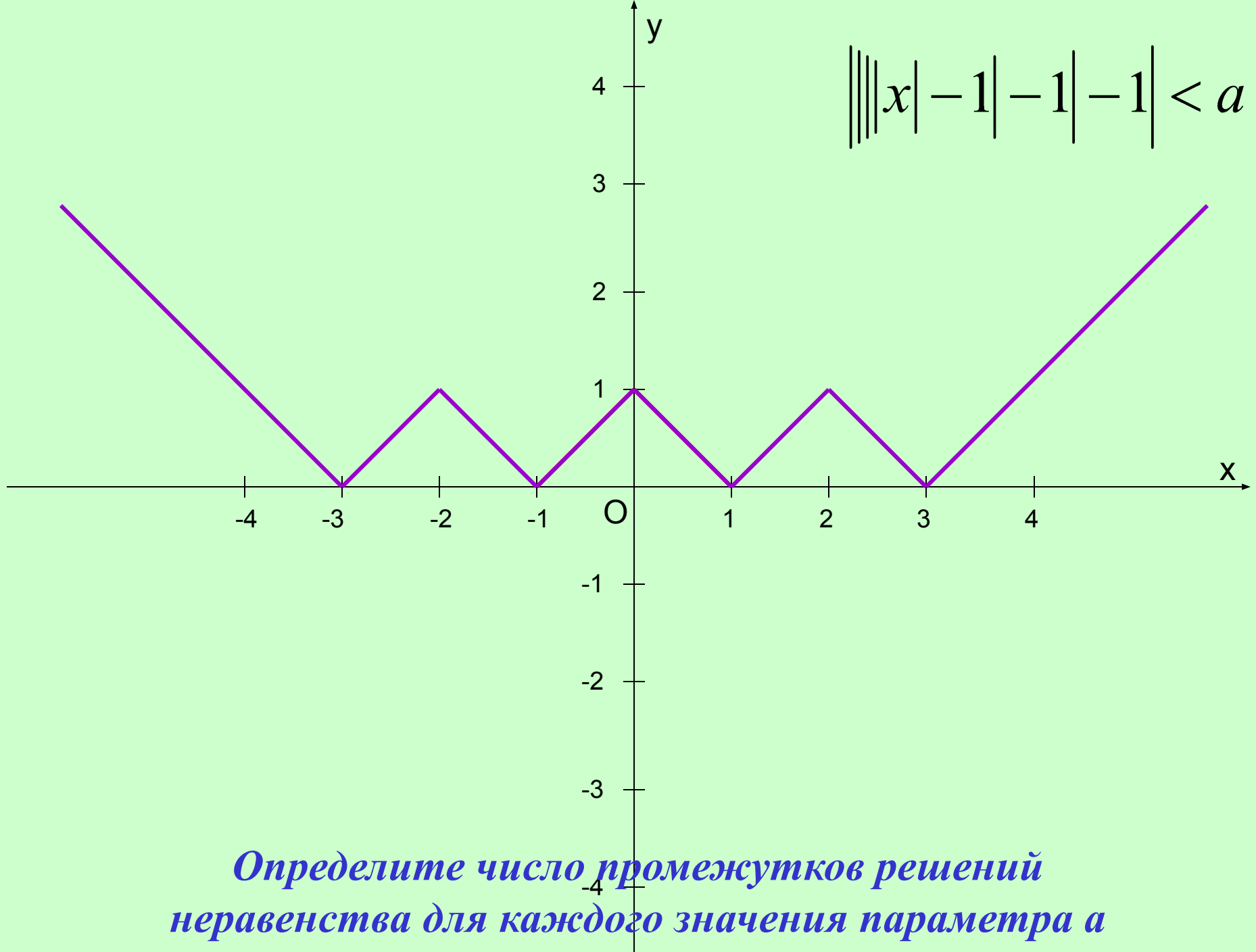
$$1) y = \left| \left| \left| x \right| - 1 \right| - 1 \right|$$

$$2) y = \left| \left| x + 1 \right| - 2 \right| \left| x - 2 \right|$$

ЕГЭ-9, 2008 год



$$\left| \left| \left| \left| x \right| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right| < a$$



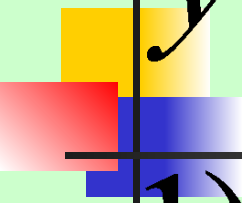
*Определите число промежутков решений
неравенства для каждого значения параметра a*



Построить график функции

$$2) y = \left| |x + 1| - 2|x - 2| \right|$$

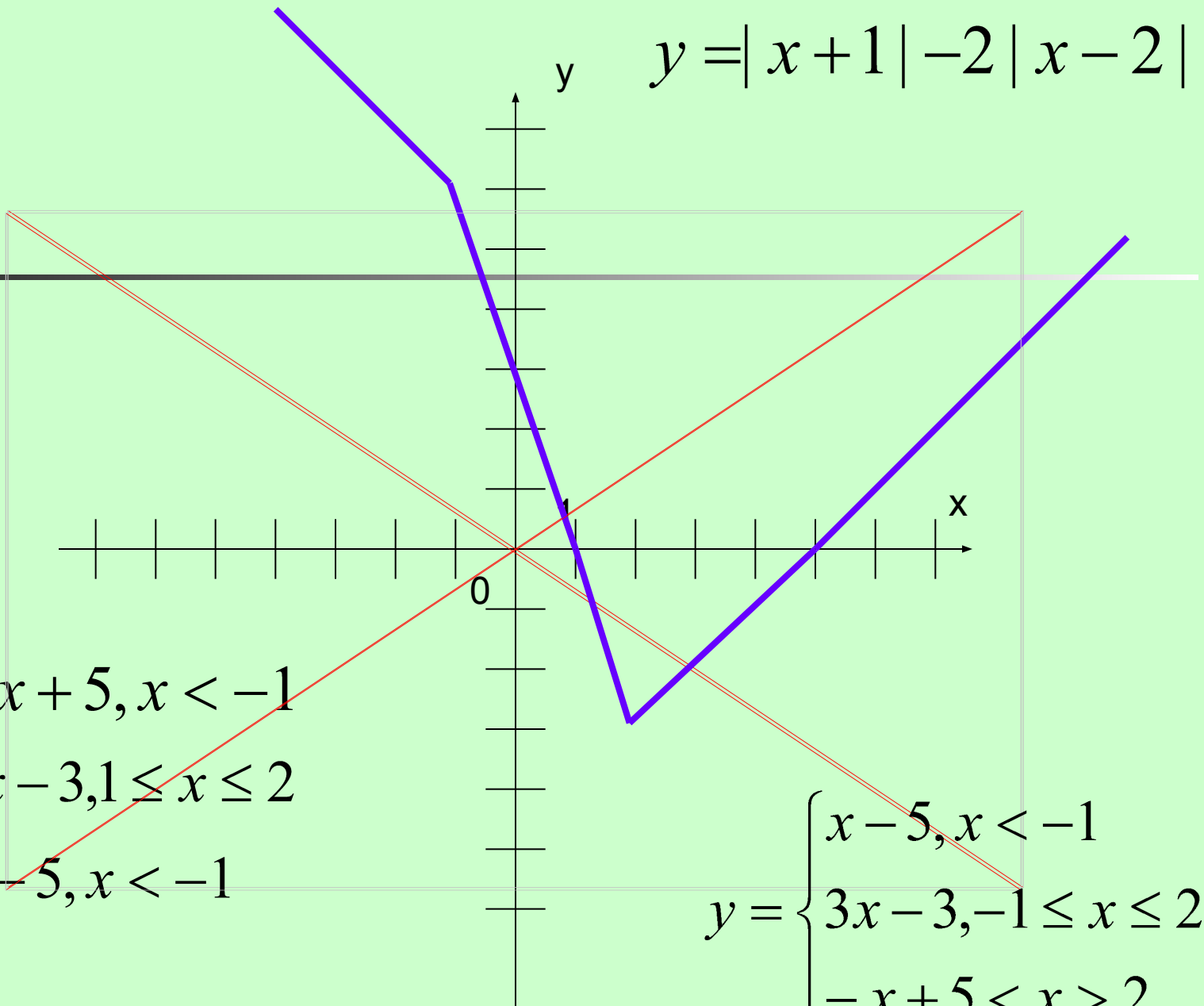
ЕГЭ-9, 2008 год


$$y = ||x + 1| - 2| |x - 2||$$

$$1) y = |x + 1| - 2 |x - 2|$$

$$y = \begin{cases} x - 5, & x < -1 \\ 3x - 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$$

$$y = |x+1| - 2|x-2|$$



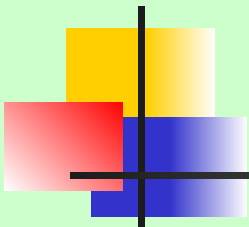
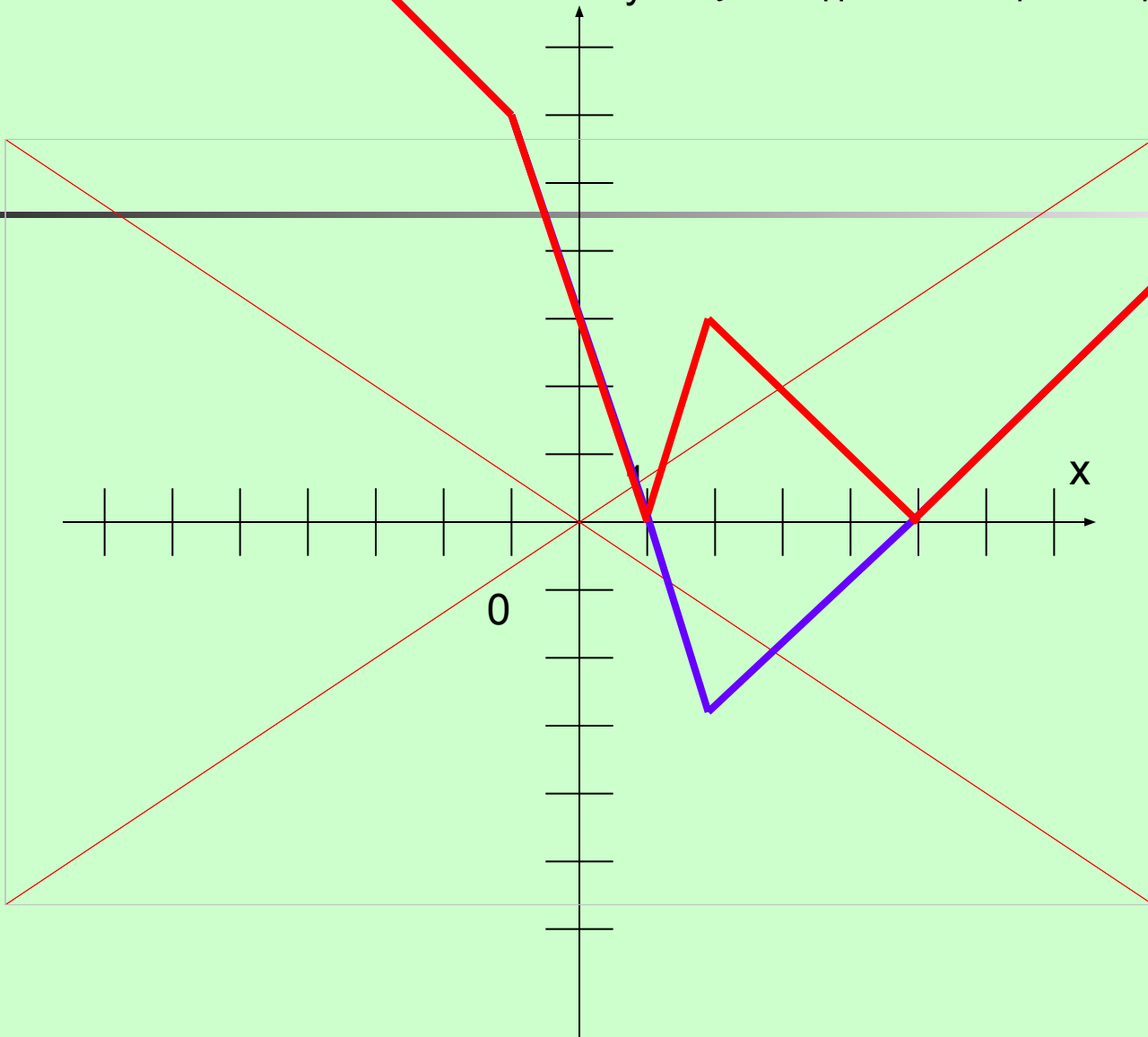
$$1) y = -x + 5, x < -1$$

$$2) y = 3x - 3, -1 \leq x \leq 2$$

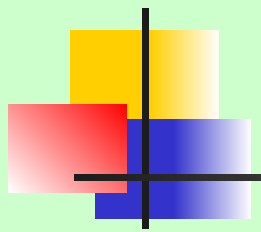
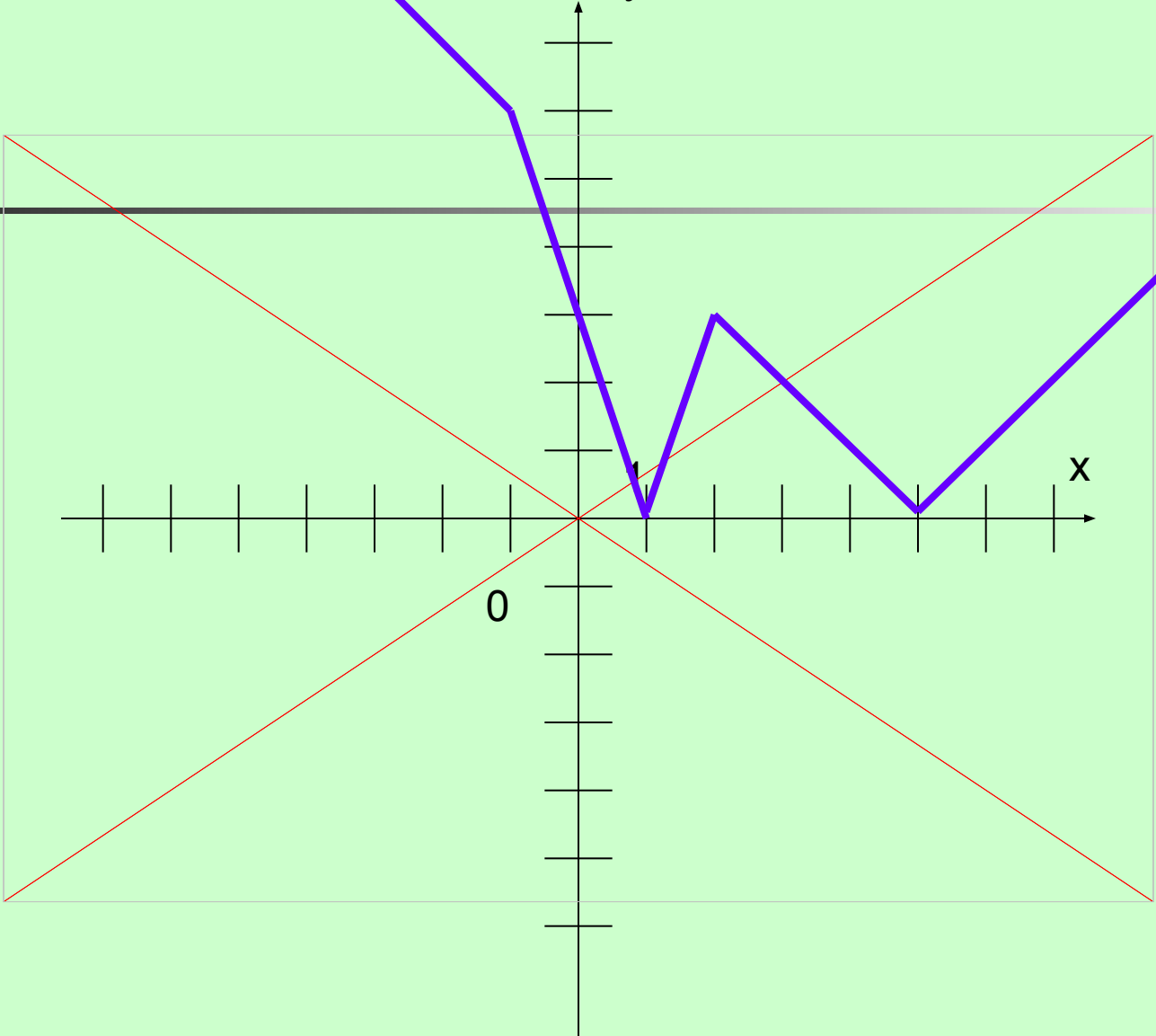
$$3) y = x - 5, x > 2$$

$$y = \begin{cases} x - 5, & x < -1 \\ 3x - 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$$

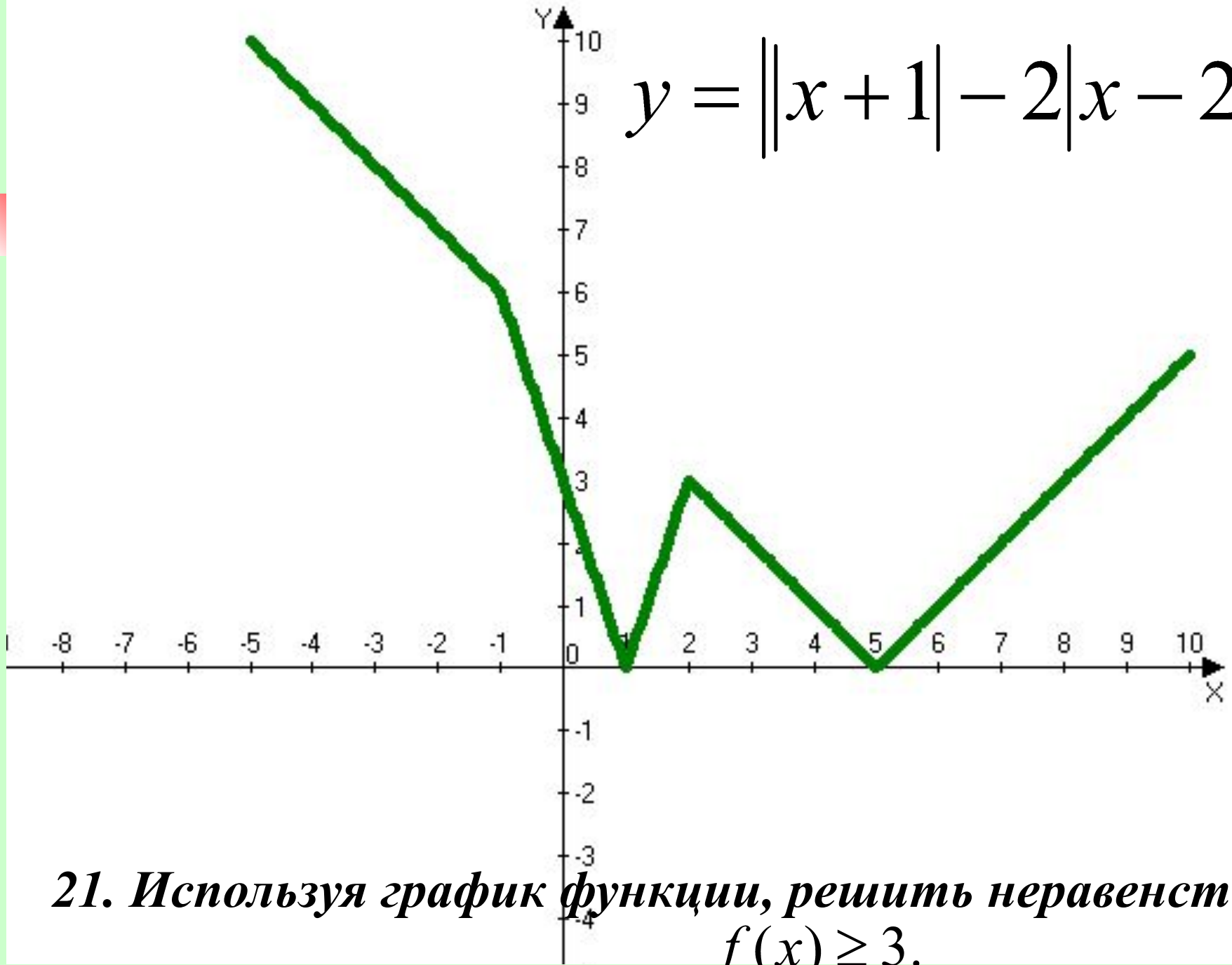
$$y = ||x + 1| - 2|x - 2||$$



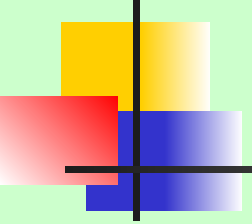
$$y = ||x + 1| - 2|x - 2||$$



$$y = ||x + 1| - 2|x - 2||$$



21. Используя график функции, решить неравенство $f(x) \geq 3$.

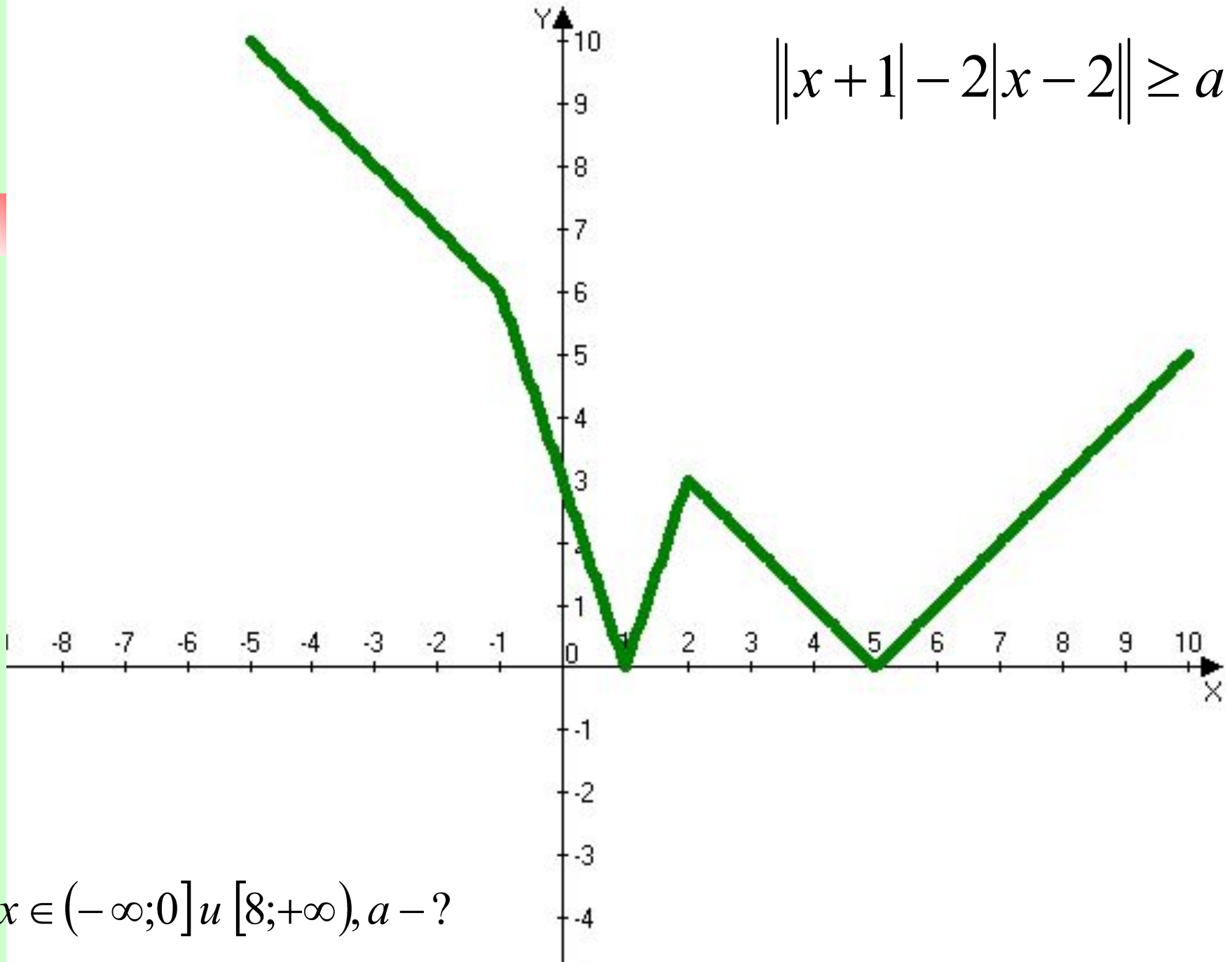


При каких значениях параметра a
решением неравенства является
объединение промежутков

$$(-\infty; 0] \cup \{2\} \cup [8; +\infty)?$$

$$\left| |x + 1| - 2|x - 2| \right| \geq a$$

$$\| |x + 1| - 2|x - 2| \| \geq a$$

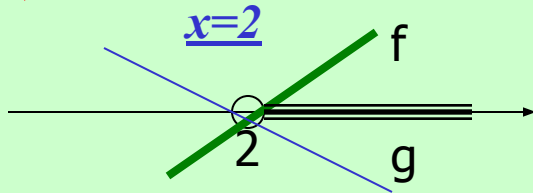


$$x \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty), a - ?$$

Проверочная работа

Образец:

$$x + 4 \stackrel{f}{=} -x^3 + 14 \stackrel{g}{}$$



$$(2; +\infty)$$

Вариант 1

$$1) 2x^3 \geq -18 - x$$

Вариант 2

$$1) x^3 + 33 \leq -2x$$

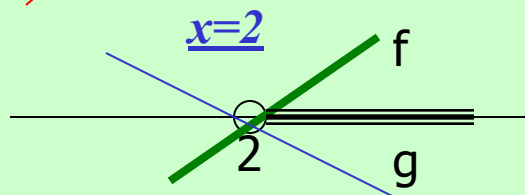
$$2) x^5 + 2x^3 \leq 48$$

$$2) x^5 + 4x \geq -40$$

Проверочная работа

Образец:

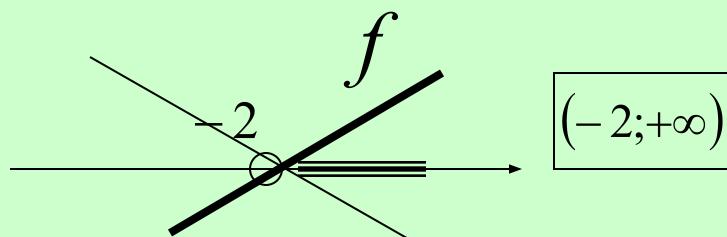
$$x + 4 \stackrel{f}{=} -x^3 + 14 \stackrel{g}{}$$



$$(2; +\infty)$$

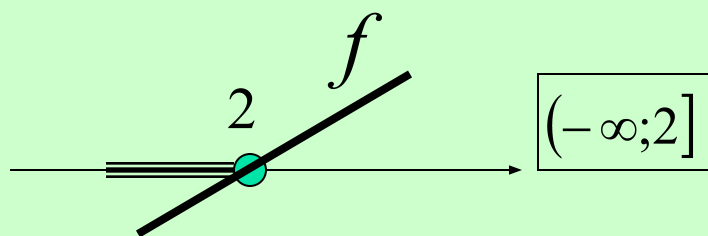
Вариант 1

$$1) 2x^3 \stackrel{f}{\geq} -18 - x$$



$$(-2; +\infty)$$

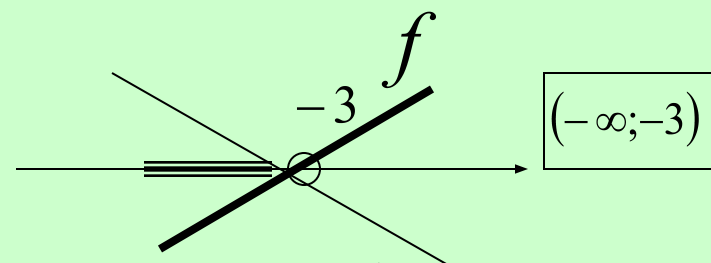
$$2) x^5 + 2x^3 \stackrel{f}{\leq} 48$$



$$(-\infty; 2]$$

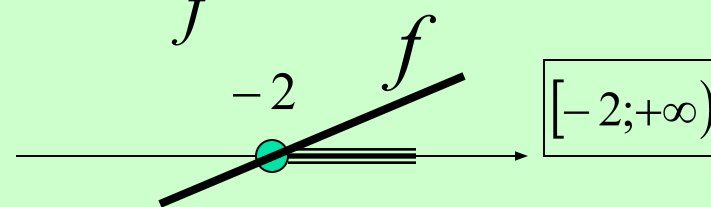
Вариант 2

$$1) x^3 + 33 \stackrel{f}{\leq} -2x$$



$$(-\infty; -3]$$

$$2) x^5 + 4x \stackrel{f}{\geq} -40$$



$$[-2; +\infty)$$



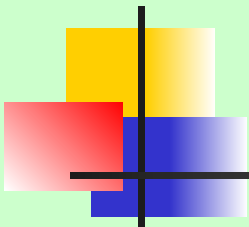
Домашнее задание

1) /Г/, № 8.184 (б)

$$2) \frac{x^4 + 5x - 12}{x} = 7$$

$$3) \sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{5x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 8} = 7$$

В каждом уравнении поставить
любой знак неравенства и решить
полученное неравенство



Спасибо за урок! Успехов в дальнейшем изучении математики!