

«Применение

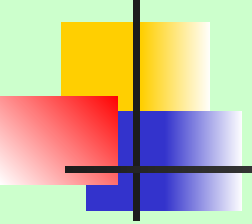
графического

и функционально-графического

МЕТОДОВ

к решению неравенств »

---



*Математика – наука  
молодых. Иначе и быть не  
может. Занятия  
математикой – это такая  
гимнастика ума, для которой  
нужны вся гибкость и вся  
выносливость молодости.*

*Норберт Винер  
(1894-1964),  
американский ученый*



## *Неравенство -*

---

*отношение между числами  $a$  и  $b$   
(математическими выражениями),  
соединенное знаками*

$<$ ;  $>$ ;  $\leq$ ;  $\geq$ ;  $\neq$  .

# Историческая справка

- Задачи на доказательство равенств и неравенств возникли в глубокой древности . Для обозначения знаков равенства и неравенства использовали специальные слова или их сокращения.

- Более 2000 лет до н.э. было известно неравенство

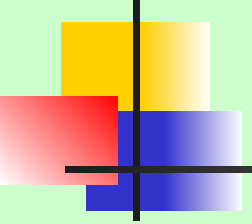
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ где } a > 0, b > 0.$$

Обращается в верное равенство при  $a=b$ .

- IV век до н.э., **Евклид**, V книга «Начал»: если  $a, b, c, d$  – положительные числа и  $a$  – наибольшее число в пропорции  $a/b=c/d$ , то выполняется неравенство  $a+d=b+c$ .

- III век , основной труд **Паппа Александрийского** «Математическое собрание»: если  $a, b, c, d$  – положительные числа и  $a/b > c/d$ , то выполняется неравенство  $ad > bc$ .

## Современные специальные знаки

- 
- 1557 год. Введен знак равенства  $=$  английским математиком **Р.Рикордом**.

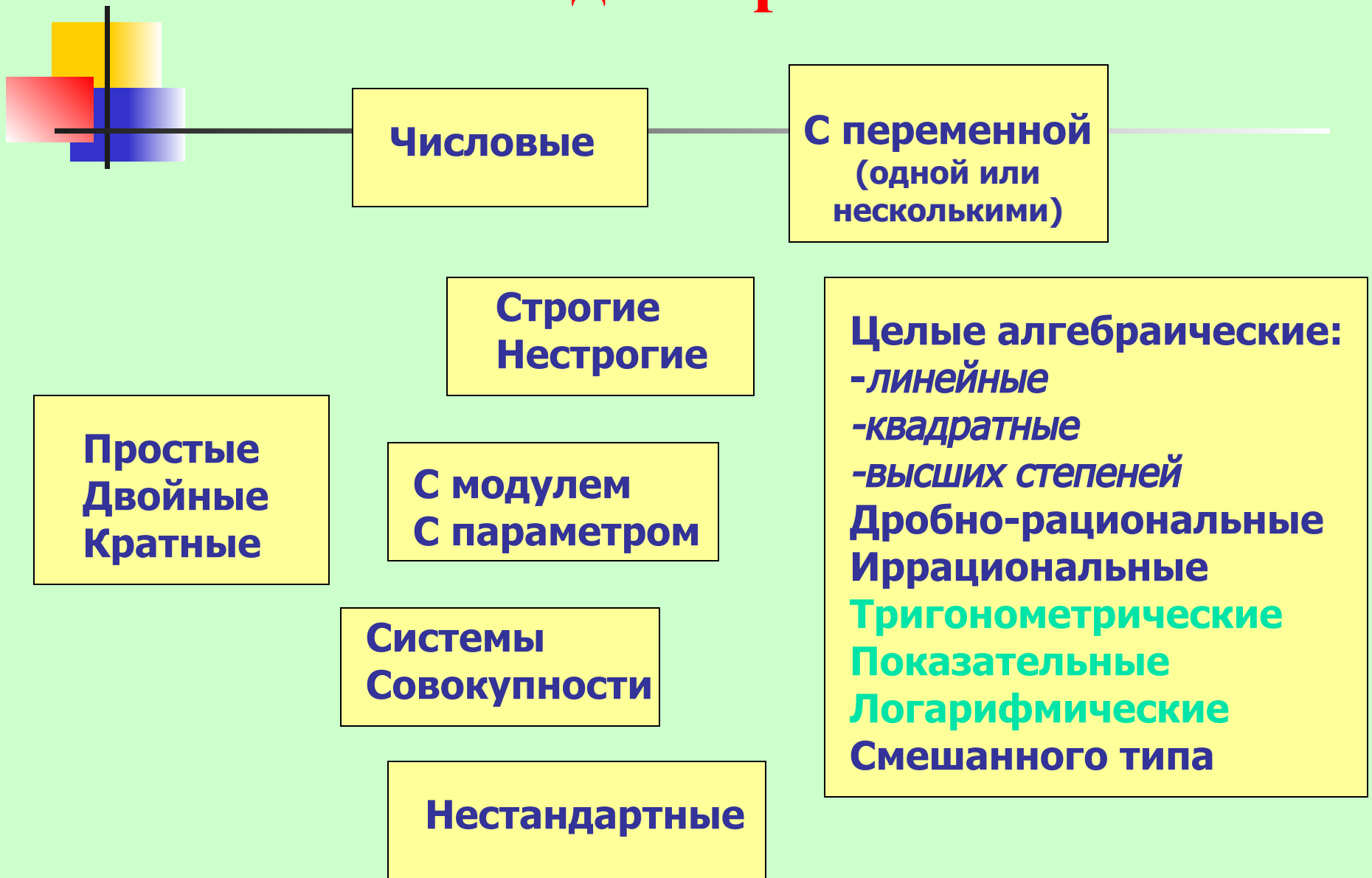
Его мотив: «Никакие два предмета не могут быть более равными, чем два параллельных отрезка».

---

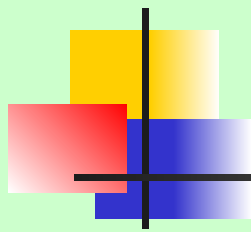
- 1631 год. Введены знаки  $>$  и  $<$  английским ученым **Харритом** в книге «Практика аналитического искусства».
- 

- 1734 год. Знаки  $\leq$ ;  $\geq$  введены французским математиком **П.Буге**.

# Виды неравенств



# Методы решения неравенств



Графический

Основные

Метод  
интервалов  
(в том числе  
обобщенный)

Алгебраические

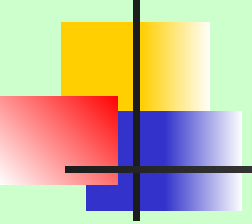
Функционально-  
графический

- Использование свойств неравенств
- Переход к равносильным системам
- Переход к равносильным совокупностям
- Замена переменной

Метод расщепления  
для нестрогих неравенств

Специальные

# Неравенства



**Решением неравенства** с одной переменной называется значение переменной, которое при подстановке обращает его в верное числовое неравенство.

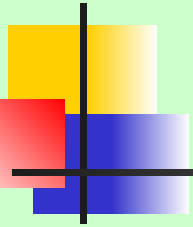
**Решить неравенство** – найти все его решения или доказать, что их нет.

Два **неравенства** называются **равносильными**, если все решения каждого являются решениями другого неравенства или оба неравенства решений не имеют.



# Охарактеризуйте неравенства.

Решите устно



$$1). x^2 - 9 < 0$$

$$2) x(\sqrt{3} - 2) > 0$$

$$3) (x - 2)(x + 3) \geq 0$$

$$4) \sqrt{x-1} > 2$$

$$5) \frac{x+1}{x^2+1} < 0$$

$$6) \sqrt{\frac{x+1}{x-4}} \leq 0$$

$$7) \sqrt{x^2} \leq 9$$

$$8) |3x^2 - 9| > -2$$

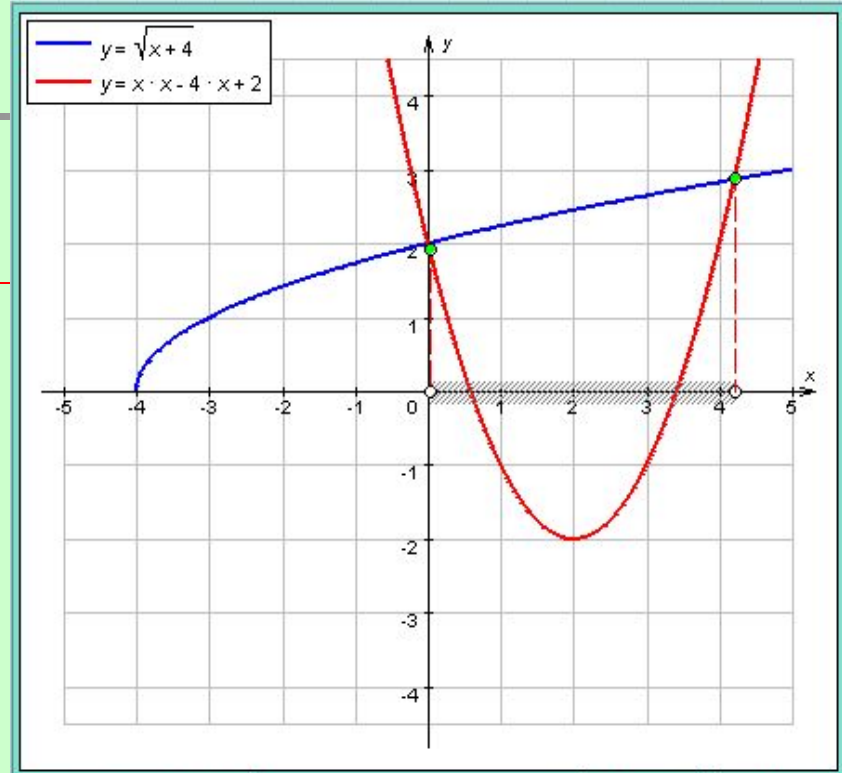
$$9) ax > 0$$

# Графический МЕТОД

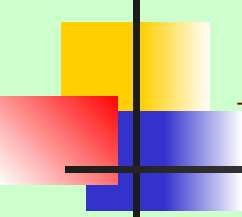
- Решите графически неравенство

$$\sqrt{x+4} > x^2 - 4x + 2$$

- 1) Строим график  $y = \sqrt{x+4}$ .
- 2) Строим график  $y = x^2 - 4x + 2$  в той же системе координат.
- 3) Находим абсциссы точек пересечения графиков  
(значения берутся приближенно, точность проверяем подстановкой).
- 4) Определяем по графику решения данного неравенства.
- 5) Записываем ответ.



*Ответ : (0;4,2).*



# Функционально-графический метод решения неравенства $f(x) < g(x)$

---

1. Подбором найдем корень уравнения  $f(x)=g(x)$ , используя свойства монотонных функций;
2. Построим схематически графики обеих функций, проходящие через точку с найденной абсциссой;
3. Выберем решение неравенства, соответствующее знаку неравенства;
4. Запишем ответ.

# Функционально-графический метод

Решите неравенство:

$$\sqrt{x+7} \geq 5-x$$

*Решение.* I. Решим уравнение  $\sqrt{x+7} = 5-x$

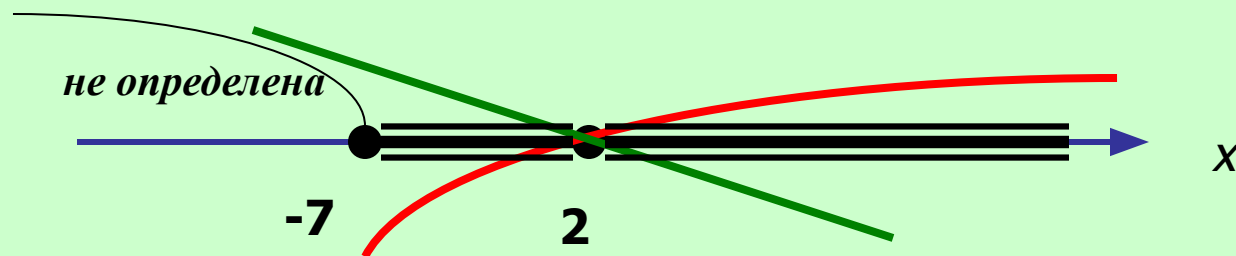
1)  $f(x) = \sqrt{x+7}$  – возрастает на  $[-7; +\infty)$ .

2)  $g(x) = 5-x$  убывает на этом промежутке.

3) Уравнение  $f(x)=g(x)$  имеет не более одного корня.

4) Подбором находим, что  $x=2$ .

II. Схематически изобразим на числовой оси  $Ox$  графики функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , проходящие через точку  $x=2$ .



III. Определим решения и запишем ответ.

Ответ.  $[2; 7; 2)$



Решите неравенства:

---

1)  $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} > 4,$

2)  $(x-1)^5 + x^5 \leq 45 - x^3 - 2x$

3)  $\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{5x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 8} < 7$



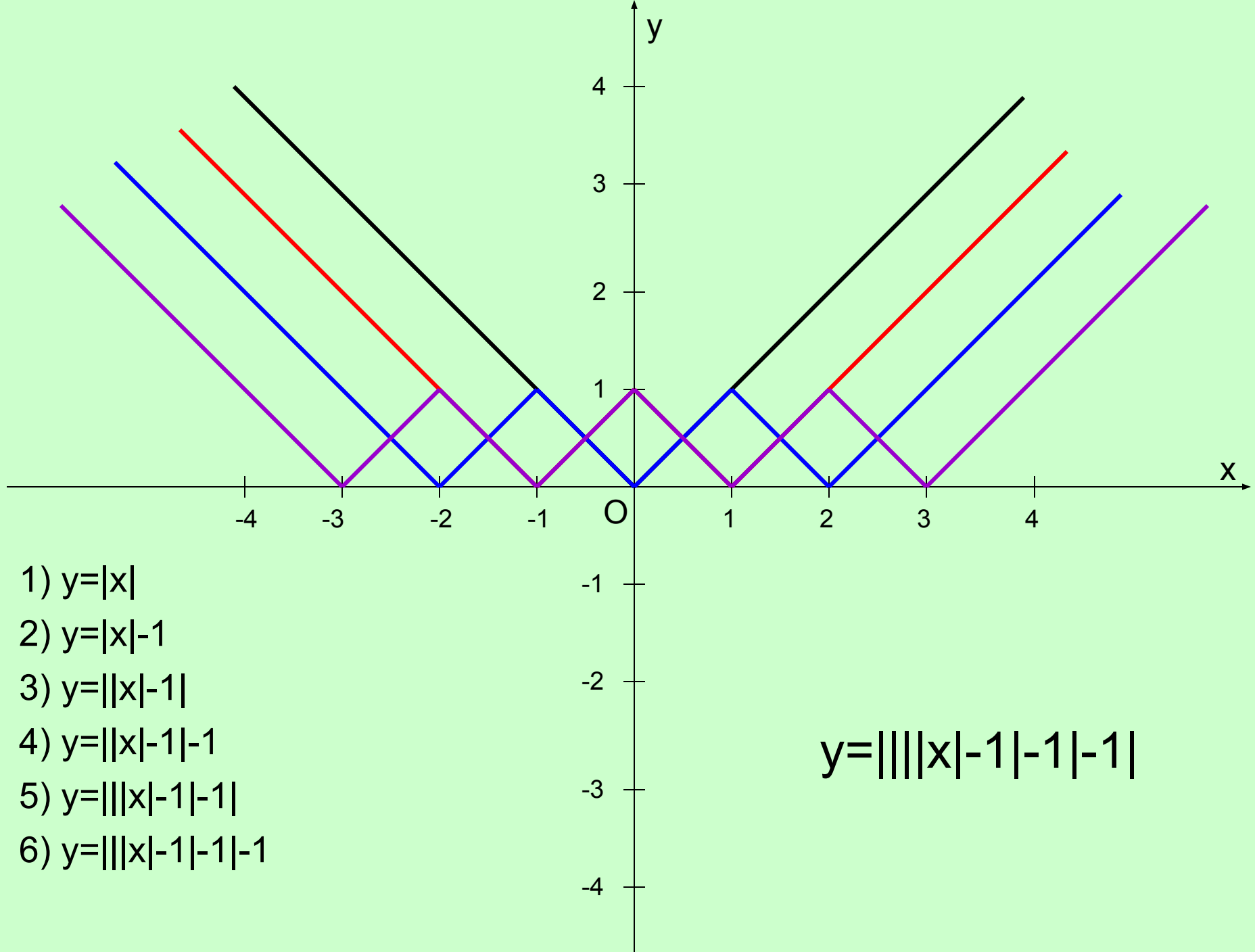
## *Построить графики функции*

---

$$1) y = \left| \left| \left| x \right| - 1 \right| - 1 \right|$$

$$2) y = \left| \left| x + 1 \right| - 2 \right| \left| x - 2 \right|$$

ЕГЭ-9, 2008 год



1)  $y=|x|$

2)  $y=|x|-1$

3)  $y=||x|-1|$

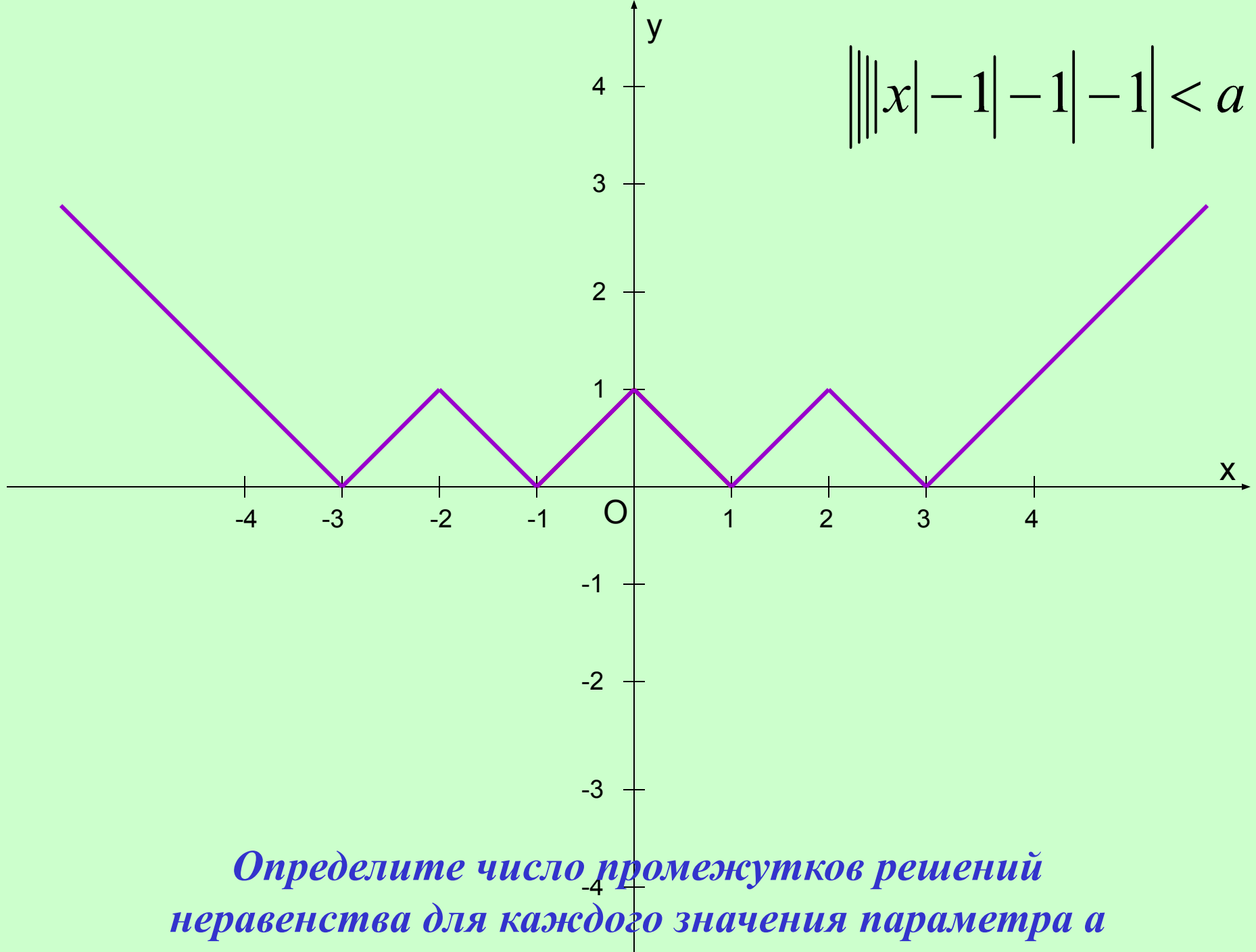
4)  $y=||x|-1|-1|$

5)  $y=|||x|-1|-1|$

6)  $y=||||x|-1|-1|-1|$

$y=||||x|-1|-1|-1|$

$$\left| \left| \left| \left| x \right| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right| < a$$



*Определите число промежутков решений  
неравенства для каждого значения параметра  $a$*



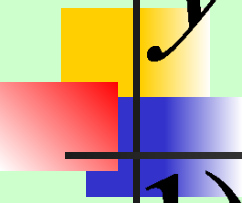


*Построить график функции*

---

$$2) y = \left| |x + 1| - 2|x - 2| \right|$$

ЕГЭ-9, 2008 год

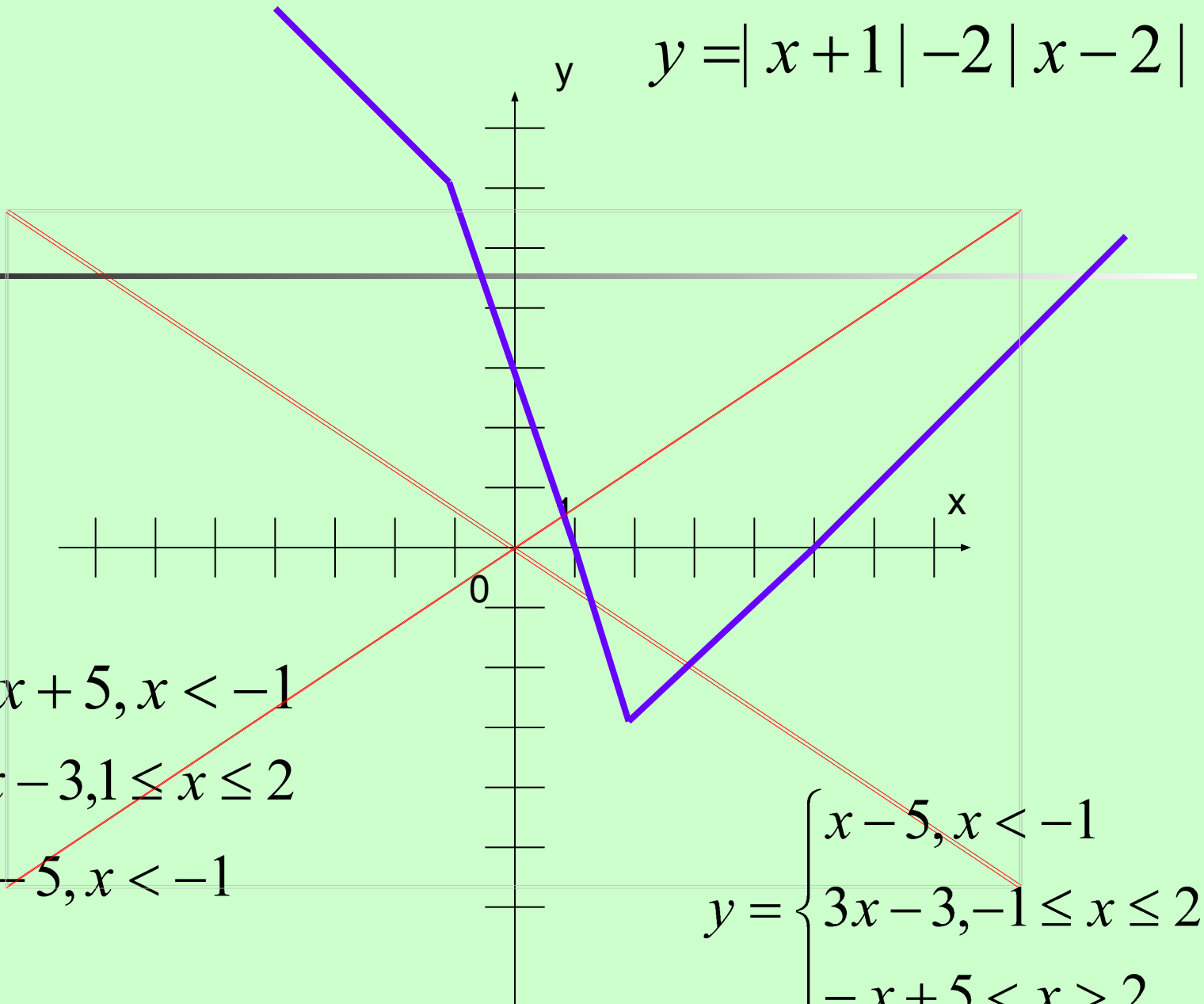

$$y = ||x + 1| - 2| |x - 2|$$

---

$$1) y = |x + 1| - 2 |x - 2|$$

$$y = \begin{cases} x - 5, & x < -1 \\ 3x - 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$$

$$y = |x+1| - 2|x-2|$$



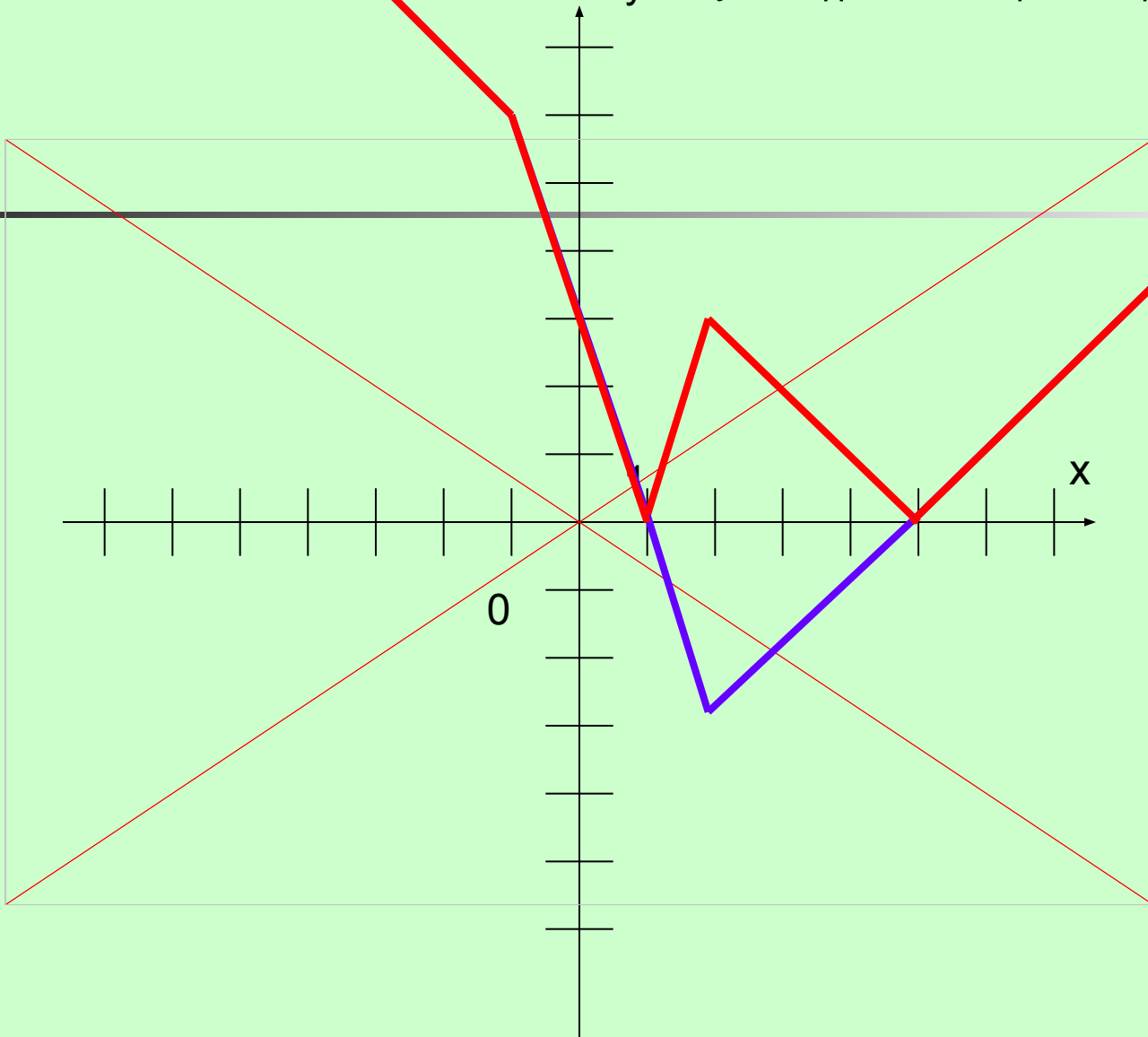
$$1) y = -x + 5, x < -1$$

$$2) y = 3x - 3, -1 \leq x \leq 2$$

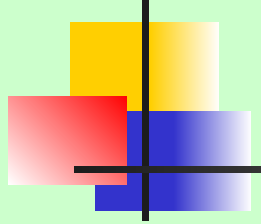
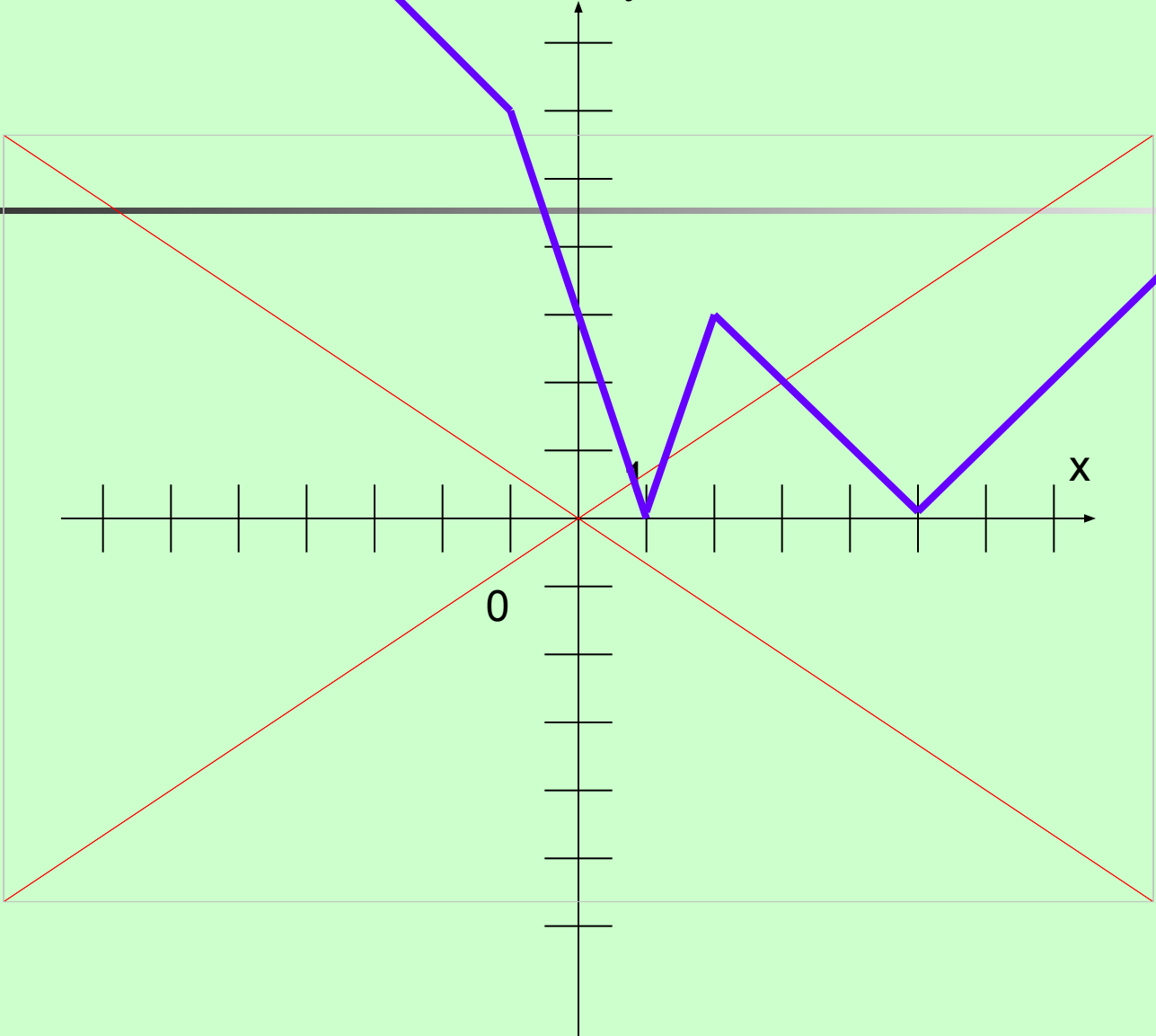
$$3) y = x - 5, x > 2$$

$$y = \begin{cases} x - 5, & x < -1 \\ 3x - 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$$

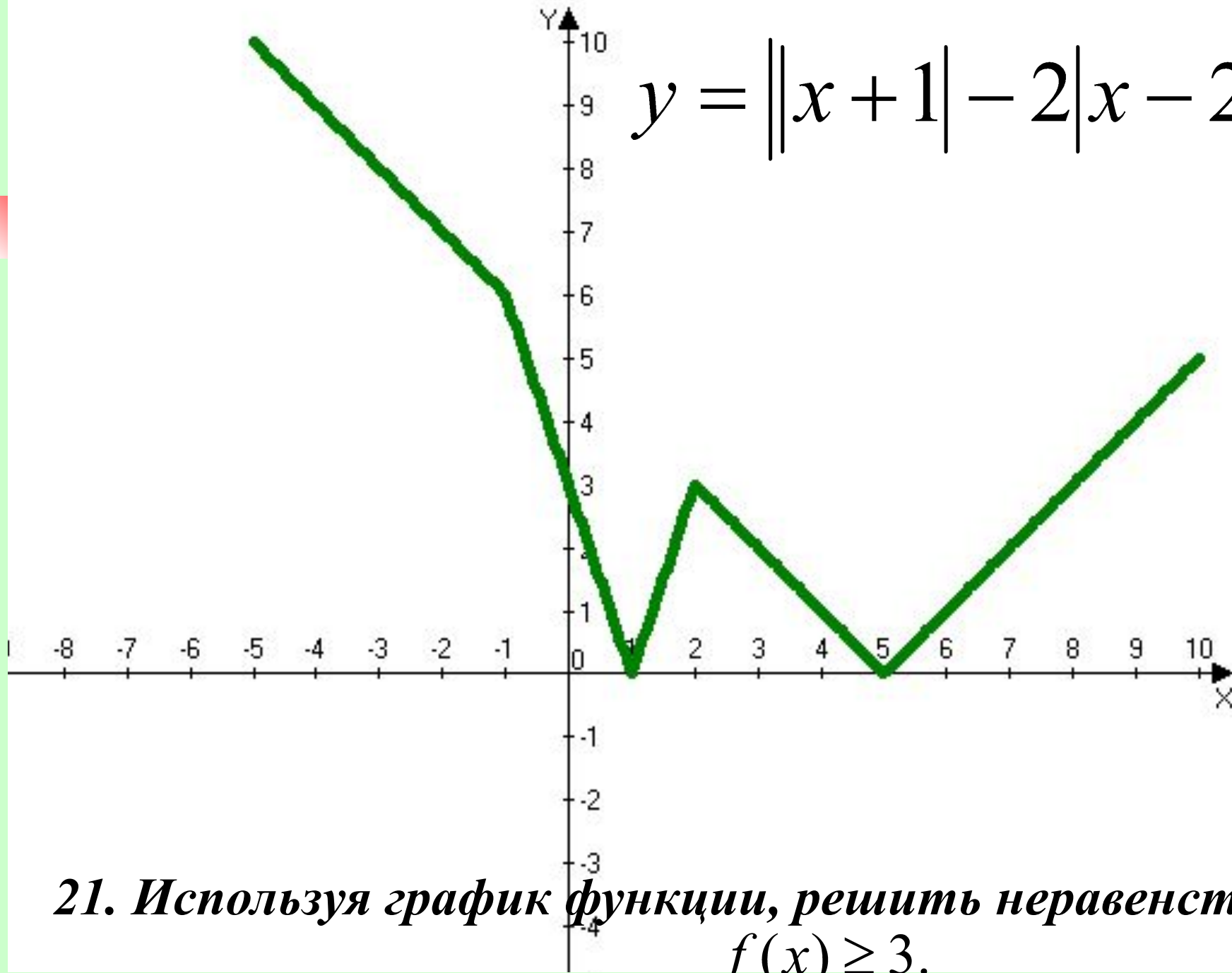
$$y = ||x + 1| - 2|x - 2||$$



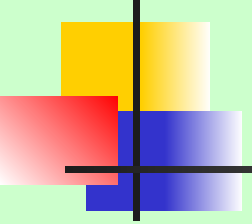
$$y = ||x + 1| - 2|x - 2||$$



$$y = ||x + 1| - 2|x - 2||$$



21. Используя график функции, решить неравенство  $f(x) \geq 3$ .



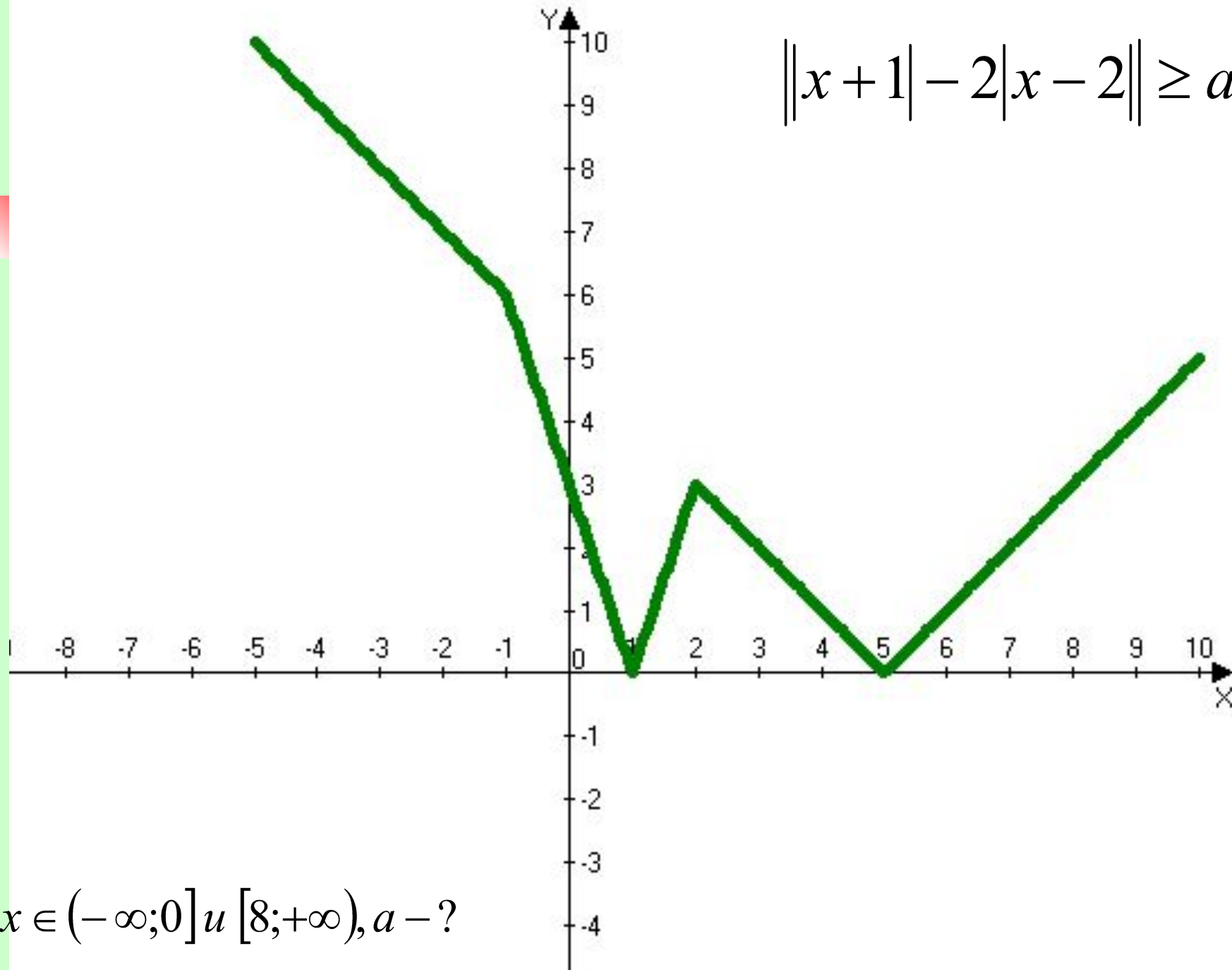
При каких значениях параметра  $a$   
решением неравенства является  
объединение промежутков

---

$$(-\infty; 0] \cup \{2\} \cup [8; +\infty)?$$

$$\left| |x + 1| - 2|x - 2| \right| \geq a$$

$$\left| |x + 1| - 2|x - 2| \right| \geq a$$



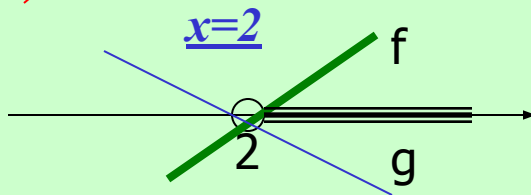
$$x \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty), a = ?$$



# Проверочная работа

Образец:

$$x^f + 4 > -x^g + 14$$



$$(2; +\infty)$$

Вариант 1

$$1) 2x^3 \geq -18 - x$$

\_\_\_\_\_

Вариант 2

$$1) x^3 + 33 \leq -2x$$

\_\_\_\_\_

$$2) x^5 + 2x^3 \leq 48$$

\_\_\_\_\_

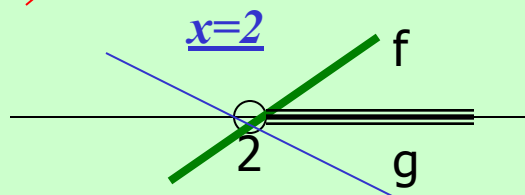
$$2) x^5 + 4x \geq -40$$

\_\_\_\_\_

# Проверочная работа

Образец:

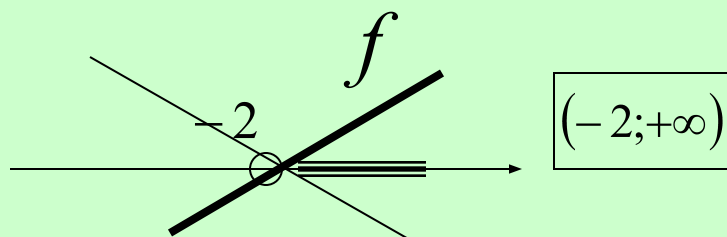
$$x + 4 \stackrel{f}{=} -x^3 + 14 \stackrel{g}{}$$



$$(2; +\infty)$$

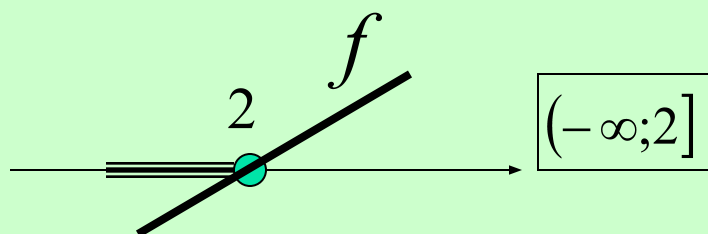
Вариант 1

$$1) 2x^3 \stackrel{f}{\geq} -18 - x$$



$$(-2; +\infty)$$

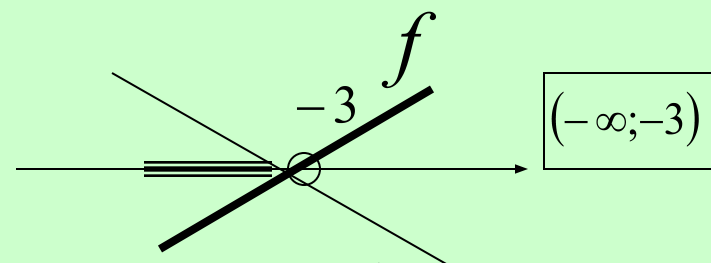
$$2) x^5 + 2x^3 \stackrel{f}{\leq} 48$$



$$(-\infty; 2]$$

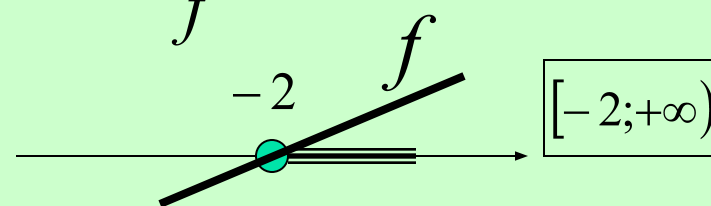
Вариант 2

$$1) x^3 + 33 \stackrel{f}{\leq} -2x$$



$$(-\infty; -3)$$

$$2) x^5 + 4x \stackrel{f}{\geq} -40$$



$$[-2; +\infty)$$



## Домашнее задание

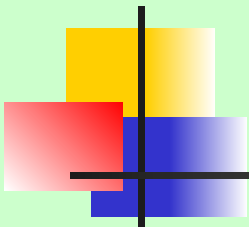
1) /Г/, № 8.184 (б)

---

$$2) \frac{x^4 + 5x - 12}{x} = 7$$

$$3) \sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{5x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 8} = 7$$

В каждом уравнении поставить  
любой знак неравенства и решить  
полученное неравенство



Спасибо за урок! Успехов в дальнейшем изучении математики!