«Применение ***<u>графического</u>*** *и* ***<u>функционально-графического</u>*** методов к решению неравенств »

Математика – наука молодых. Иначе и быть не может. Занятия математикой – это такая гимнастика ума, для которой нужны вся гибкость и вся выносливость молодости.

Норберт Винер (1894-1964), американский ученый

Неравенство -

<u>***отношение***</u> ***между числами a и b (математическими выражениями), соединенное знаками***

$$<;\ >;\ \leq;\ \geq;\ \neq .$$

Историческая справка

- Задачи на доказательство равенств и неравенств возникли в глубокой древности . Для обозначения знаков равенства и неравенства использовали специальные слова или их сокращения.

- Более 2000 лет до н.э. было известно неравенство

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \text{ где } a>0, b>0.$$

Обращается в верное равенство при a=b.

- IV век до н.э., Евклид, V книга «Начал»: если a, b, c, d – положительные числа и a – наибольшее число в пропорции *a/b=c/d*, то выполняется неравенство *a+d=b+c*.

- III век , основной труд Паппа Александрийского «Математическое собрание»: если a, b, c, d – положительные числа и a/b>c/d, то выполняется неравенство ad>bc.

Современные специальные знаки

- 1557 год. Введен знак равенства = английским математиком Р.Рикордом.

Его мотив: «Никакие два предмета не могут быть более равными, чем два параллельных отрезка».

- 1631 год. Введены знаки > и < английским ученым Харритом в книге «Практика аналитического искусства».

- 1734 год. Знаки $\leq; \geq$ введены французским математиком П.Буге.

Виды неравенств

Числовые

С переменной
(одной или
несколькими)

Строгие
Нестрогие

Простые
Двойные
Кратные

С модулем
С параметром

Системы
Совокупности

Нестандартные

Целые алгебраические:
-линейные
-квадратные
-высших степеней
Дробно-рациональные
Иррациональные
Тригонометрические
Показательные
Логарифмические
Смешанного типа

Методы решения неравенств

Основные

Графический

Метод интервалов
(в том числе обобщенный)

Алгебраические

Функционально-графический

- Использование свойств неравенств
- Переход к равносильным системам
- Переход к равносильным совокупностям
- Замена переменной

Метод расщепления
для нестрогих неравенств

Специальные

Неравенства

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое при подстановке обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются равносильными, если все решения каждого являются решениями другого неравенства или оба неравенства решений не имеют.

Охарактеризуйте неравенства. Решите устно

1). $x^2 - 9 < 0$

2) $x(\sqrt{3} - 2) > 0$

3) $(x - 2)(x + 3) \geq 0$

4) $\sqrt{x-1} > 2$

5) $\dfrac{x+1}{x^2+1} < 0$

6) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}} \leq 0$

7) $\sqrt{x^2} \leq 9$

8) $\left|3x^2 - 9\right| > -2$

9) $ax > 0$

Графический метод

- Решите графически неравенство

$$\sqrt{x+4} > x^2 - 4x + 2$$

1) Строим график $y = \sqrt{x+4}.$

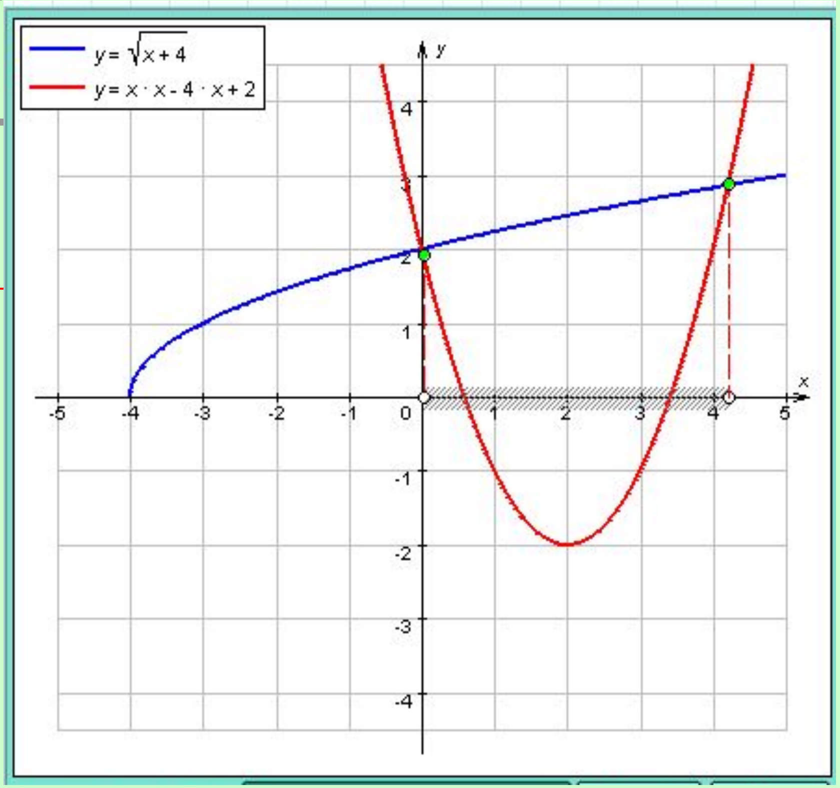
2) Строим график $y = x^2 - 4x + 2$
 в той же системе координат.

3) Находим абсциссы точек пересечения графиков

 (значения берутся приближенно, точность проверяем подстановкой).

4) Определяем по графику
 решения данного неравенства.

5) Записываем ответ.



$$Ответ: (0;4,2).$$

Функционально-графический метод решения неравенства $f(x) < g(x)$

1. Подбором найдем корень уравнения *f(x)=g(x)*, используя свойства монотонных функций;

:

2. Построим схематически графики обеих функций, проходящие через точку с найденной абсциссой;

3. Выберем решение неравенства, соответствующее знаку неравенства;

4. Запишем ответ.

Функционально-графический метод

Решите неравенство: $\sqrt{x+7} \geq 5 - x$

Решение. *I. Решим уравнение* $\sqrt{x+7} = 5 - x$

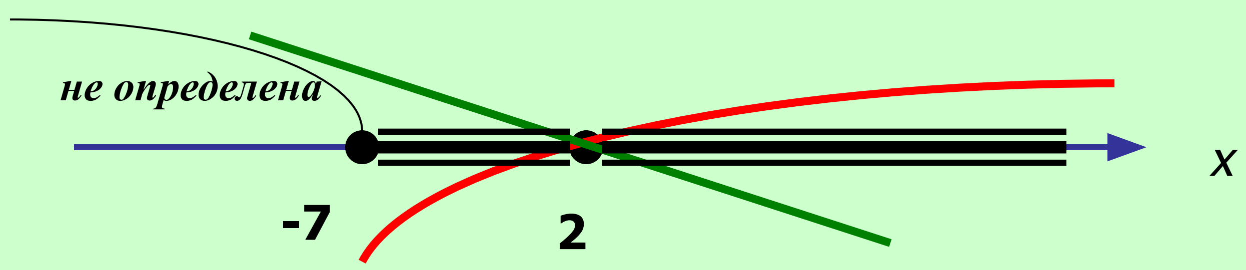
1) $f(x) = \sqrt{x+7}$ *– возрастает на* $[-7;+\infty)$.

2) $g(x) = 5 - x$ *убывает на этом промежутке.*

3) Уравнение f(x)=g(x) имеет не более одного корня.

4) Подбором находим, что x=2.

II. Схематически изобразим на числовой оси Ox графики функций ***f(x)*** *и* ***g(x)****, проходящие через точку x=2.*



III. Определим решения и запишем ответ.

Ответ. $[2;+\infty)$.

Решите неравенства:

1) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}>4,$

2) $(x-1)^5+x^5\le 45-x^3-2x$

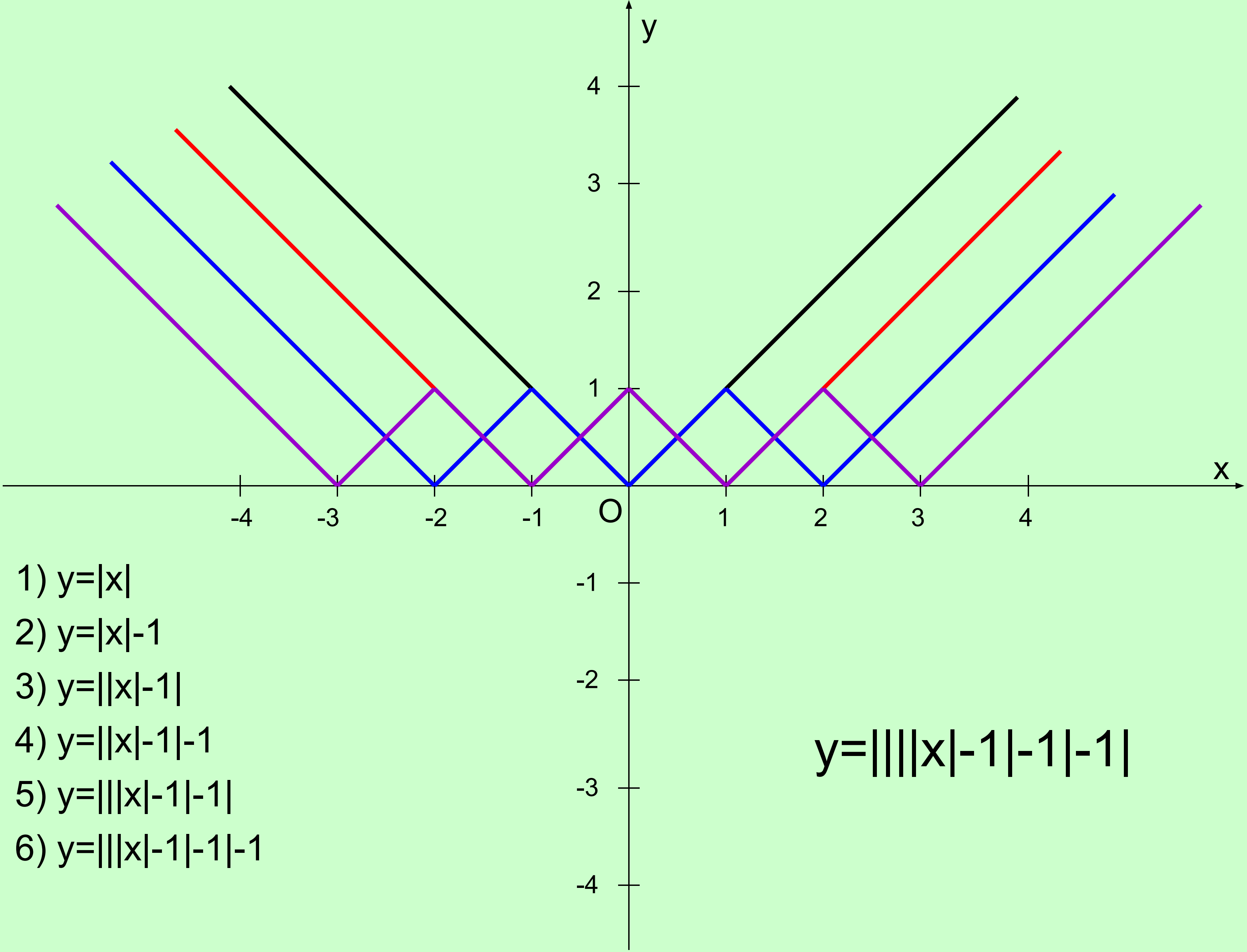
3) $\sqrt{x^4+x^2+2}+\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{x^2+8}<7$

Построить графики функции

$$1)\ y = \left|\left|\left|x\right| - 1\right| - 1\right| - 1\right|$$

$$2)\ y = \left|\left|x+1\right| - 2\left|x-2\right|\right|$$

ЕГЭ-9, 2008 год



1) $y=|x|$

2) $y=|x|-1$

3) $y=||x|-1|$

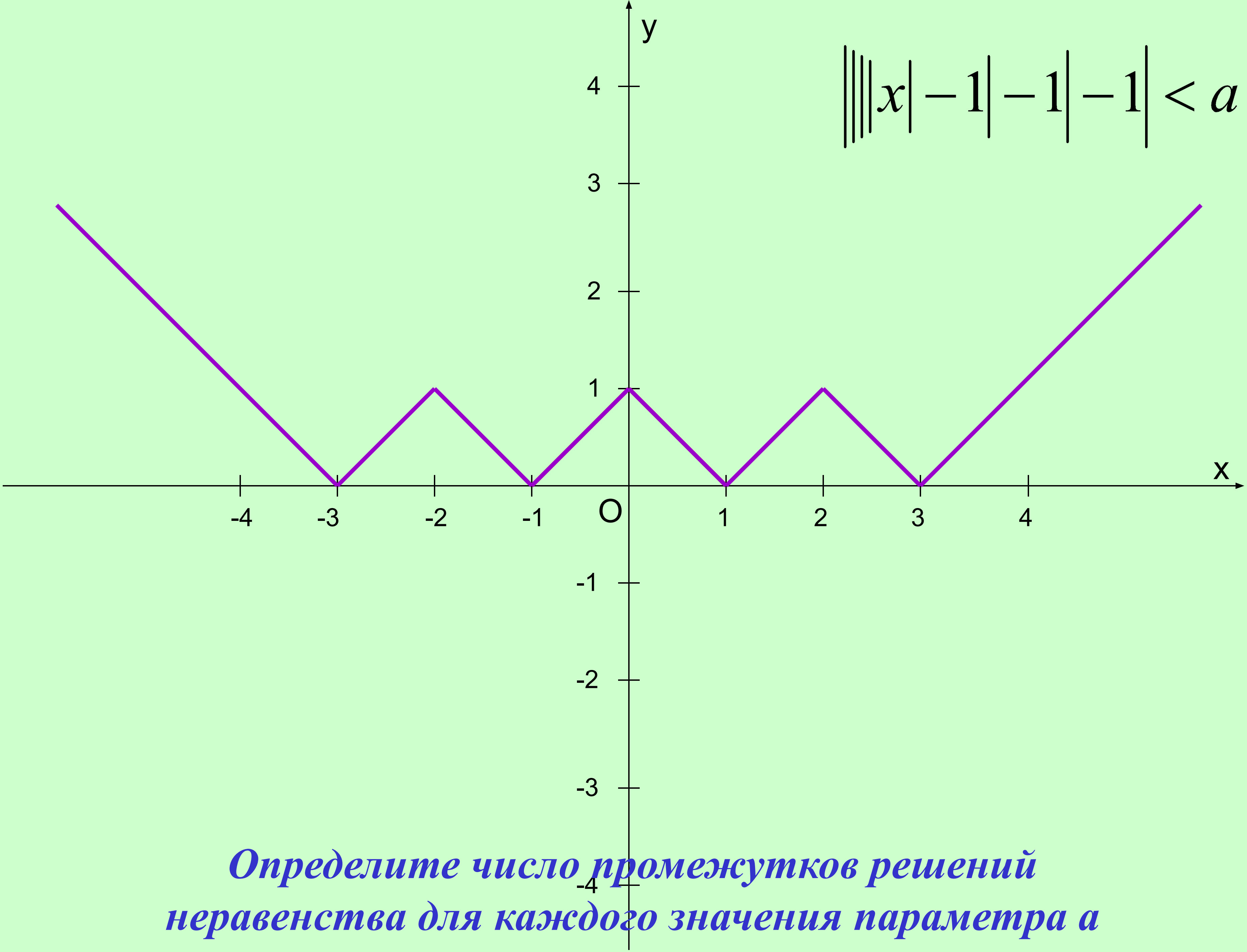
4) $y=||x|-1|-1$

5) $y=|||x|-1|-1|$

6) $y=|||x|-1|-1|-1$

$$y=||||x|-1|-1|-1|$$

$$||||x|-1|-1|-1| < a$$



Определите число промежутков решений неравенства для каждого значения параметра а

Построить график функции

$$2)\ y = \left|\,|x+1| - 2|x-2|\,\right|$$

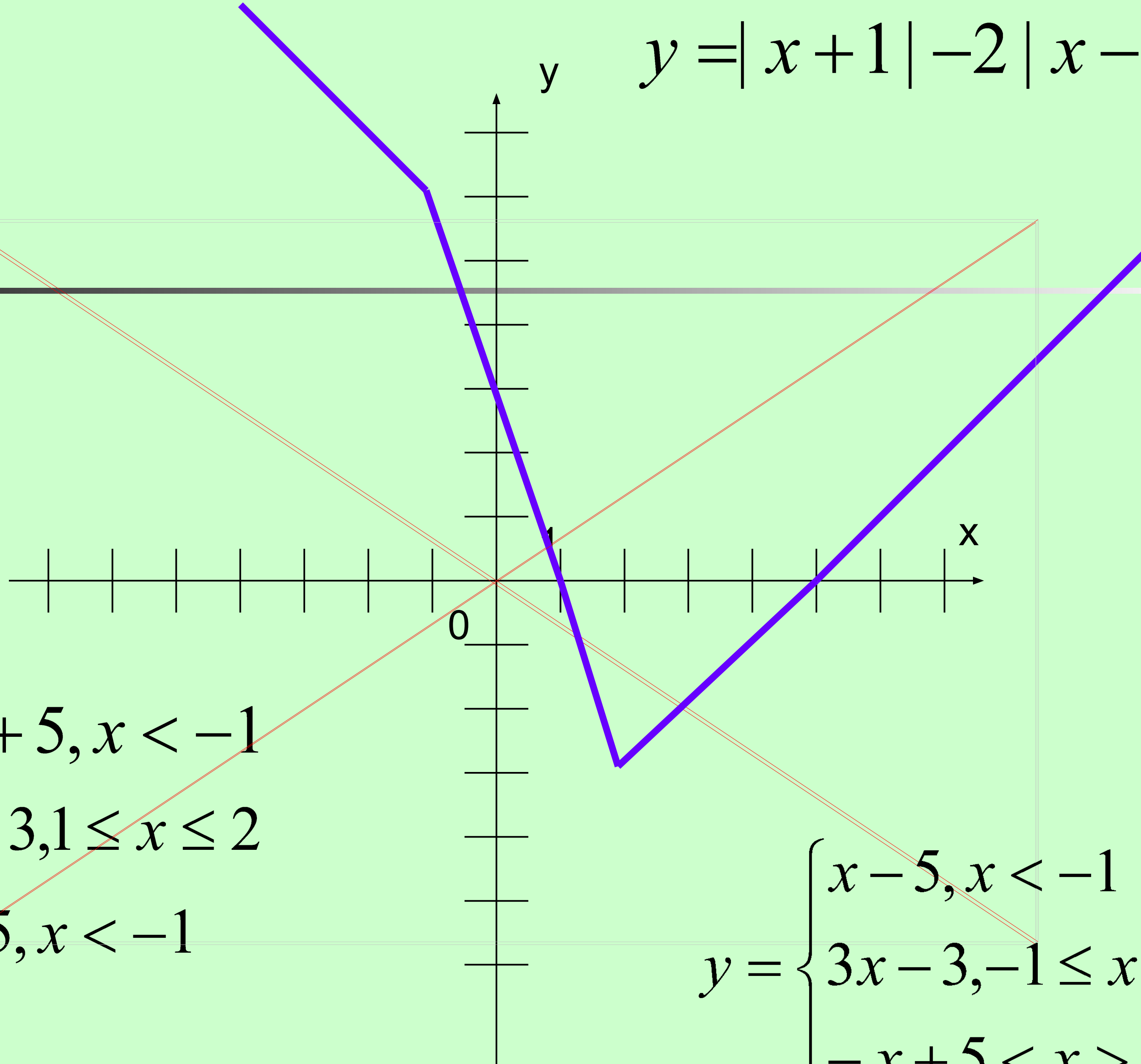
ЕГЭ-9, 2008 год

$$y = ||x+1| - 2|x-2||$$

$$1)\, y = |x+1| - 2|x-2|$$

$$y = \begin{cases} x-5, x < -1 \\ 3x-3, -1 \le x \le 2 \\ -x+5, x > 2 \end{cases}$$

$$y = |x+1| - 2|x-2|$$



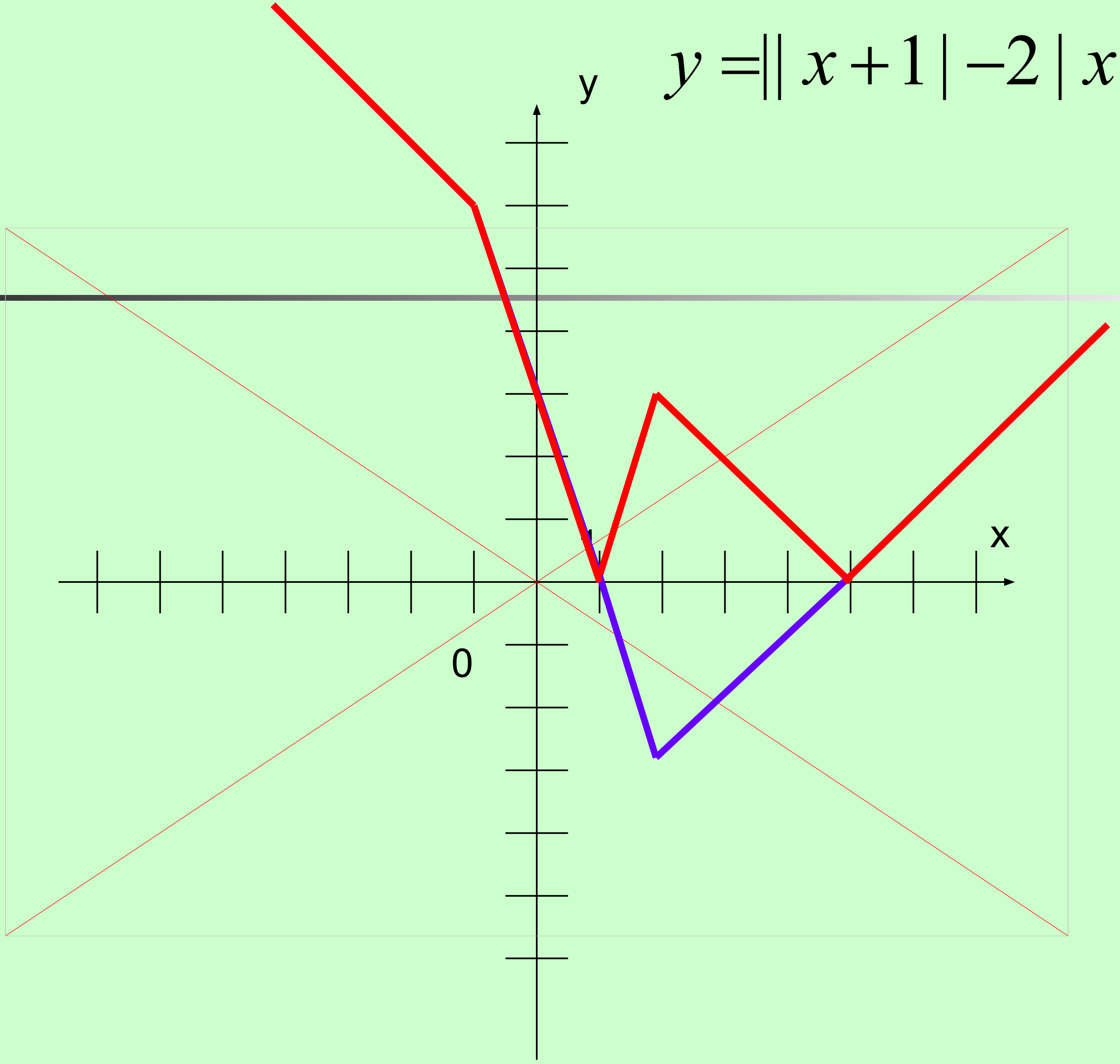
$1)\ y = -x+5, x < -1$

$2)\ y = 3x-3, 1 \le x \le 2$

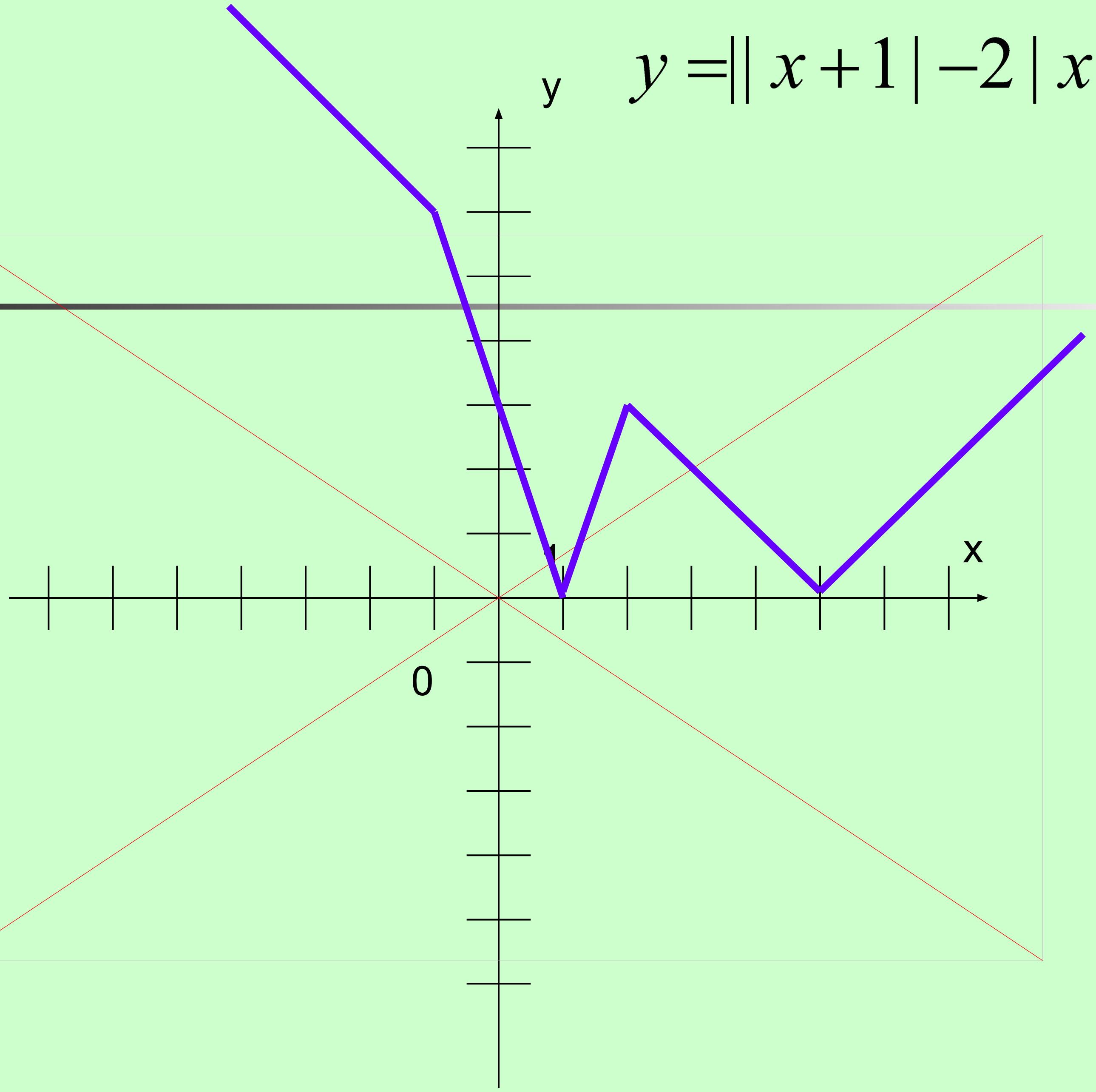
$3)\ y = x-5, x < -1$

$$y = \begin{cases} x-5, x < -1 \\ 3x-3, -1 \le x \le 2 \\ -x+5 < x > 2 \end{cases}$$

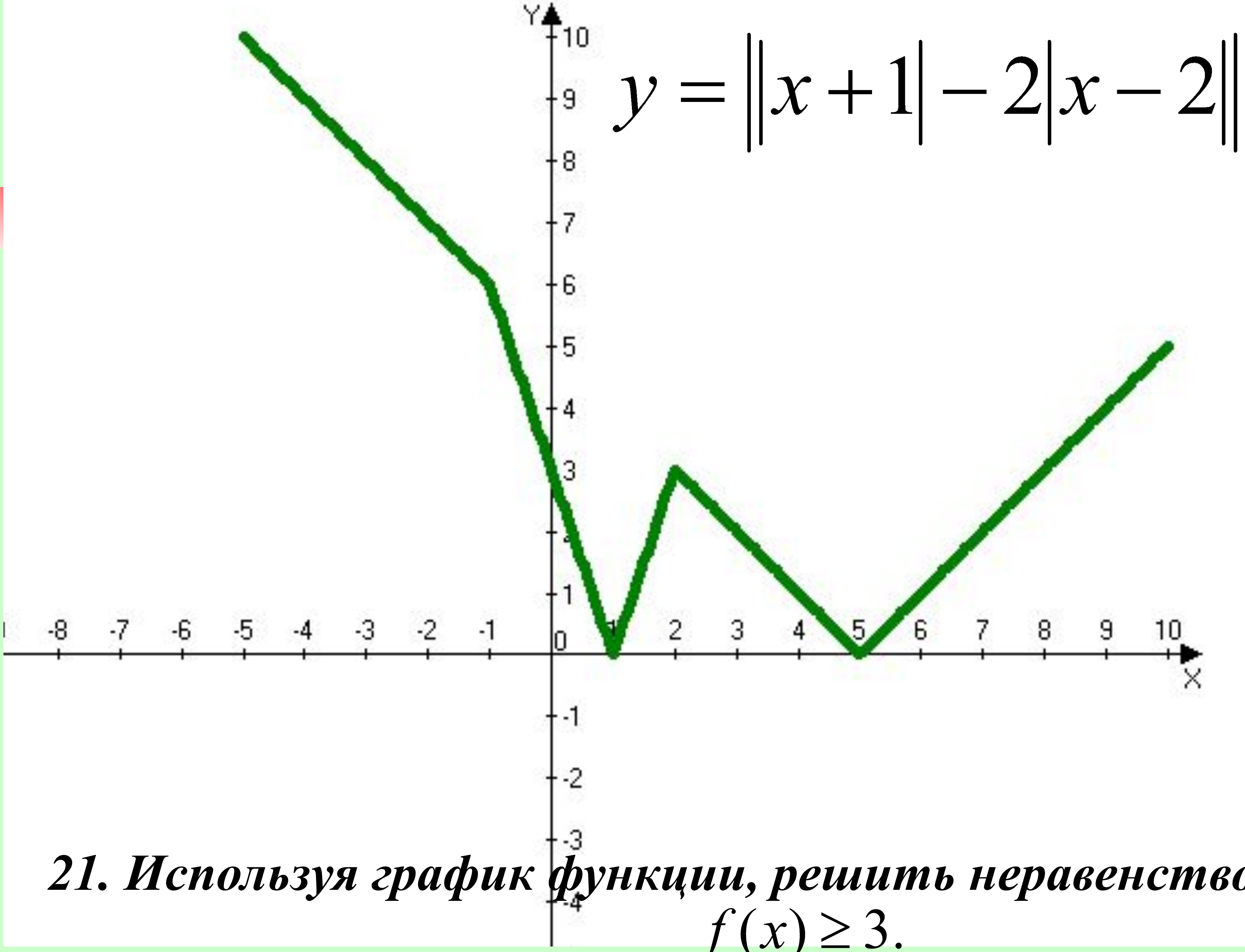
$$y = || x+1| - 2|x-2||$$



$$y = ||x+1| - 2|x-2||$$



$$y = \left\| x+1 \right| - 2\left| x-2 \right\|$$



21. Используя график функции, решить неравенство

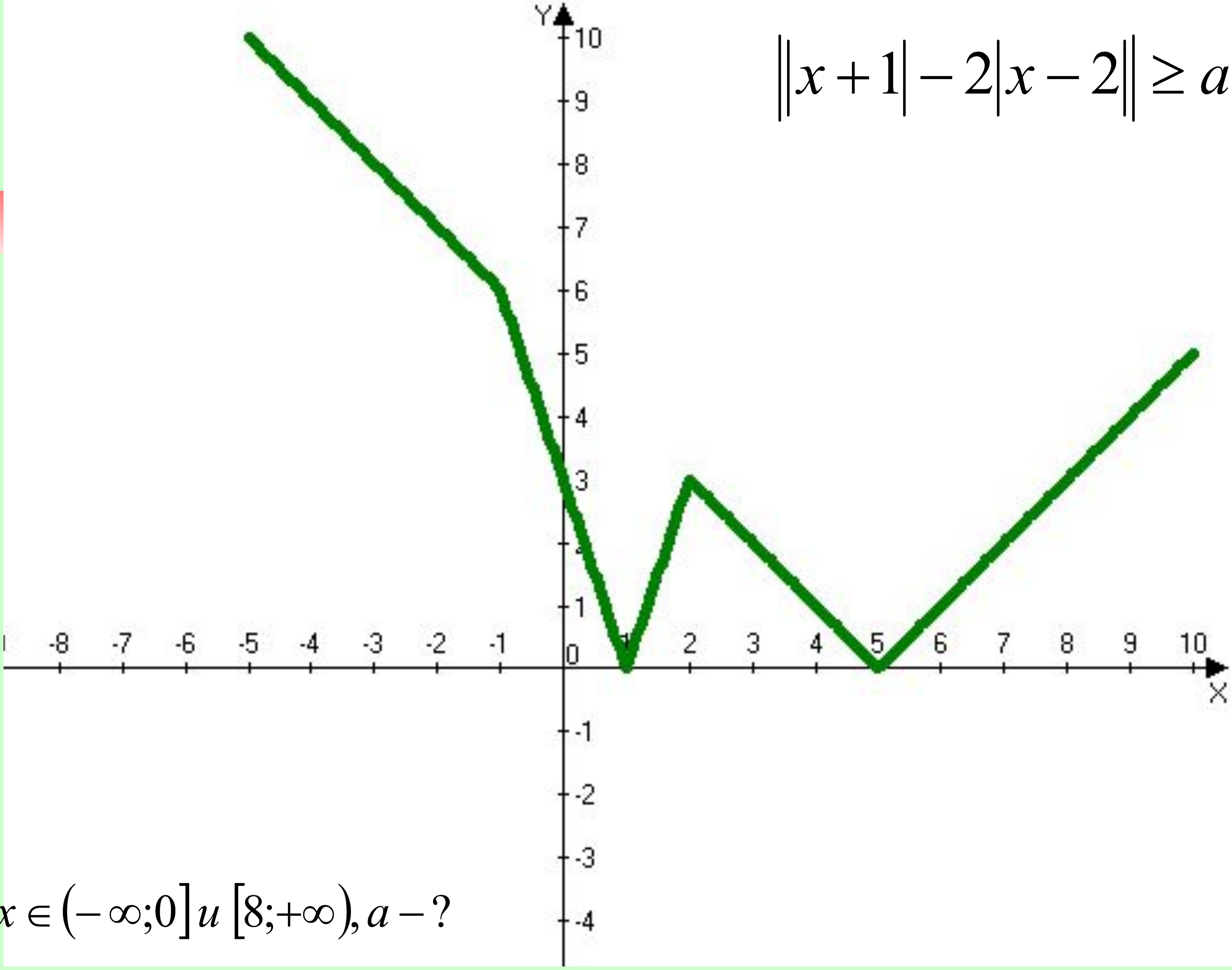
$$f(x) \geq 3.$$

При каких значениях параметра а решением неравенства является объединение промежутков

$$(-\infty;0]\cup\{2\}\cup[8;+\infty)?$$

$$\big||x+1|-2|x-2|\big|\geq a$$

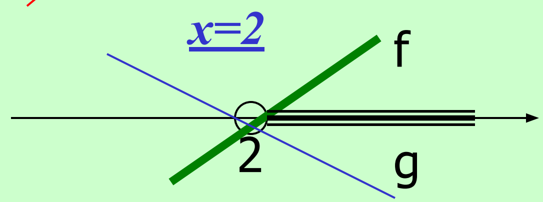
$$\left||x+1|-2|x-2|\right| \geq a$$



$$x \in (-\infty;0] \cup [8;+\infty), a-?$$

Проверочная работа

Образец: $\overset{f}{x+4} \overset{>}{=} \overset{g}{-x^{3}} + 14$



$\boxed{(2;+\infty)}$

Вариант 1

1) $2x^{3} \overset{\geq}{=} -18 - x$

2) $x^{5} + 2x^{3} \overset{\leq}{=} 48$

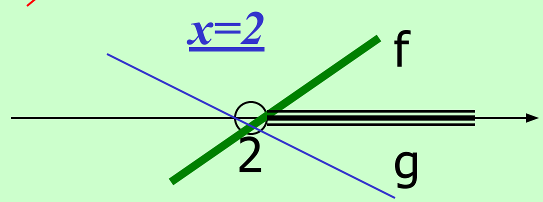
Вариант 2

1) $x^{3} + 33 \overset{<}{=} -2x$

2) $x^{5} + 4x \overset{\geq}{=} -40$

Проверочная работа

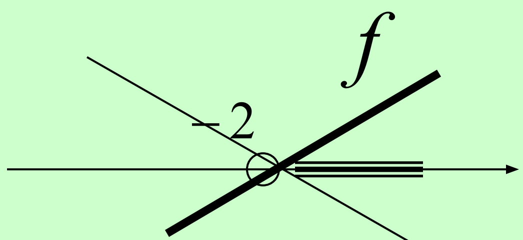
Образец: $$\overset{f}{x+4} \overset{>}{=} \overset{g}{-x^3+14}$$



$$\boxed{(2;+\infty)}$$

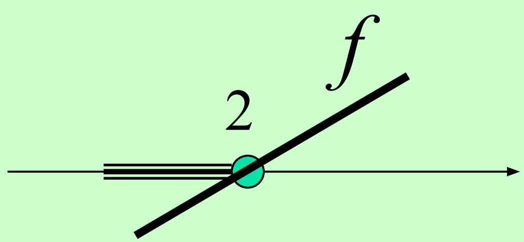
Вариант 1

$$1)\ \overset{f}{2x^3} \overset{\geq}{=} -18-x$$



$$\boxed{(-2;+\infty)}$$

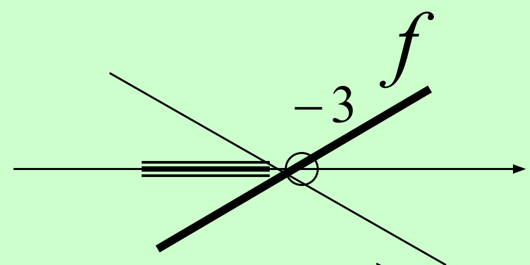
$$2)\ \overset{f}{x^5+2x^3} \overset{\leq}{=} 48$$



$$\boxed{(-\infty;2]}$$

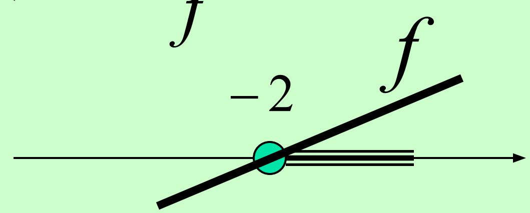
Вариант 2

$$1)\ \overset{f}{x^3+33} \overset{\leq}{=} -2x$$



$$\boxed{(-\infty;-3)}$$

$$2)\ \underset{f}{x^5+4x} \overset{\geq}{=} -40$$



$$\boxed{[-2;+\infty)}$$

Домашнее задание

1) /Г/, № 8.184 (б)

2) $\dfrac{x^4+5x-12}{x}=7$

3) $\sqrt{x^4+x^2+2}+\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{x^2+8}=7$

В каждом уравнении поставить любой знак неравенства и решить полученное неравенство

Спасибо за урок! Успехов в дальнейшем изучении математики!