



Интеграл и его применение

«...! Природа формулирует свои
законы языком математики»

Г. Галилей

Презентация составлена преподавателем
Гиляровой Мариной Геннадьевной

Волгоград, 2009г.

900igr.net



Историческая справка



История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур, т.е. задачами на вычисление площадей. Вычислениями площадей поверхностей и объемов тел занимались еще математики Древней Греции и Рима. Первым европейским математиком, получившим новые формулы для площадей фигур и объемов тел, был знаменитый астроном И. Кеплер. После исследований ряда ученых (П.Ферма, Д.Валлиса) И. Барроу открыл связь между задачами отыскания площадей и проведением касательной (т.е. между интегрированием и дифференцированием). Исследование связи между этими операциями, свободное от геометрического языка, было дано И.Ньютоном и Г. Лейбницем.

Современное обозначение интеграла восходит к Лейбницу, у которого оно выражало мысль, что площадь криволинейной трапеции есть сумма площадей бесконечно тонких полосок шириной d и высоты $f(x)$. Сам знак интеграла является стилизованной латинской буквой S (summa). Символ интеграла введен с 1675г., а вопросами интегрального исчисления занимаются с 1696г. Хотя интеграл изучают, в основном, ученые–математики, но и физики внесли свой вклад в эту науку. Практически ни одна формула физики не обходится без дифференциального и интегрального исчислений.



Краткая история интегрального исчисления

Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении задач на нахождение площадей, а также объемов тел связаны с именем Архимеда(287-212 до н. э.)

Развивая идеи предшественников Архимед определил длину окружности и площадь круга, объем и поверхность шара. В работах «О шаре и цилиндре», «О спиральях», «О коноидах и сферах», он показал, что определение объемов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объема конуса и цилиндра. Архимед разработал и применил методы, предвосхитившие созданное в XVII в. интегральное исчисление.

Потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем идеи Архимеда нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления. В XVII в. математики уже умели вычислять площади многих фигур с кривыми границами и объемы многих тел. А общая теория была создана во второй половине XVII в. в трудах великого английского математика Иссака Ньютона(1643-1716) и великого немецкого математика Готфрида Лейбница(1646-1716). Ньютон и Лейбниц являются основателями интегрального исчисления. Они открыли важную теорему, носящую их имя:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где $f(x)$ – функция, интегрируемая на отрезке $[a;b]$, $F(x)$ – одна из ее первообразных.

Рассуждения, которые приводили Ньютон и Лейбниц, несовершенны с точки зрения современного математического анализа. В XVIII в. крупнейший представитель математического анализа Леонард Эйлер эти понятия обобщил в своих трудах. Только в начале XIX в. были окончательно созданы понятия интегрального исчисления. Обычно при этом отмечают заслуги французского математика Огюстена Коши и немецкого математика Георга Римана.

Само слово интеграл придумал Я.Бернулли(1690г.). Оно происходит от латинского *integro*, которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. В1696г. появилось и название новой ветви математики – интегральное исчисление, которое ввел И. Бернулли. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797 г.). Обозначение определенного интеграла ввел Иосиф Бернулли, а нижние и верхние пределы Леонард Эйлер.



Неопределенный интеграл

Математические операции образуют пары двух взаимно обратных действий, например, сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня. Дифференцирование дает возможность для заданной функции $F(x)$ находить ее производную $F'(x)$. Существует действие, обратное дифференцированию – это **интегрирование** – нахождение функции $F(x)$ по известной ее производной $f(x) = F'(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все ее первообразные содержатся в выражении $F(x) + C$, где C – постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)dx$) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь \int – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования. Отыскание неопределенного интеграла называется **интегрированием функции**.

Свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

• Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

• Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному слагаемому C : $\int d(F(x)) = F(x) + C$

• Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

• Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых: $\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int [f_1(x)] dx \pm \int [f_2(x)] dx$



Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла выводится через криволинейную трапецию. **Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.** Площадь криволинейной трапеции выражается интегральной суммой или числом, которое называется определенным интегралом. **Определенный интеграл** вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Общность обозначения определенного и неопределенного интегралов подчеркивает тесную связь между ними: определенный интеграл – это число, а неопределенный интеграл – совокупность первообразных функций. Связь между определенным и неопределенным интегралом выражается формулой Ньютона – Лейбница.

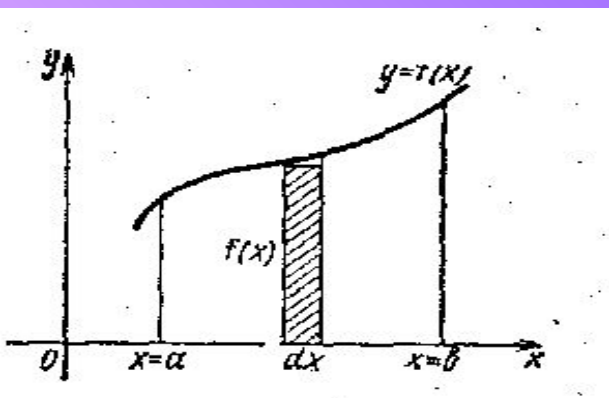
Свойства определенного интеграла:

- 1) Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл сохранит абсолютную величину, но изменит свой знак на противоположный.
- 2) Если верхняя и нижняя границы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю.
- 3) Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разбить на несколько частей, определенный интеграл на отрезке $[a;b]$ будет равен сумме определенных интегралов этих отрезков.
- 4) Определенный интеграл от суммы функций, заданных на отрезке $[a;b]$ равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций.
- 5) Постоянный множитель к подынтегральной функции можно выносить за знак определенного интеграла.
- 6) Оценка определенного интеграла: если $m \leq f(x) \leq M$ на $[a;b]$, то

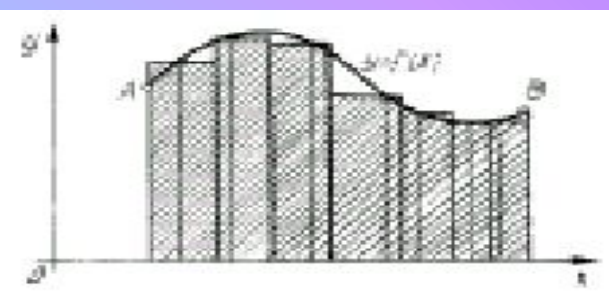
$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$$



Геометрический смысл определенного интеграла



Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная графиком AB функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox (см. рисунок), называется *криволинейной трапецией*.



Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение равно площади прямоугольника с основанием и высотой, а сумма представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке. Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и выбора количества точек разбиения.

Чем меньше Δx , тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции принимается предел интегральной суммы.

Таким образом, с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.



Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределенных интегралов путем приведения их к табличным с применением основных свойств. Здесь могут представиться следующие случаи: 1) данный интеграл берется непосредственно по формуле соответствующего табличного интеграла; 2) данный интеграл после применения свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам; 3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применением свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

- 1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t . Формула замены переменной в этом случае имеет вид $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$;
- 2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке: $\int f[\psi(x)] \psi'(x) dx = \int f(u) du$

3. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int u dv = uv - \int v du$, где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x . С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден.



Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + const \quad \alpha \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + const$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + const$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + const$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + const$$

$$\int \cos x dx = \sin x + const$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + const$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + const$$

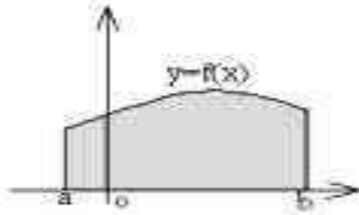
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + const$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + const$$

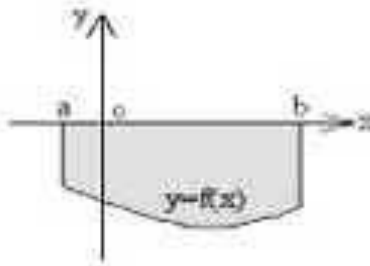
Повторение теоретического материала

Как найти площади изображенных фигур?



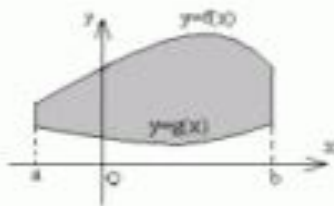
1) Если $y=f(x)$ – непрерывная, $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



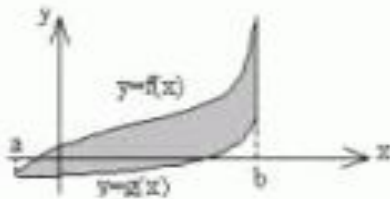
2) Если $y=f(x)$ – непрерывная, $f(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то

$$S = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



3) Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ – непрерывные на $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$, то

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

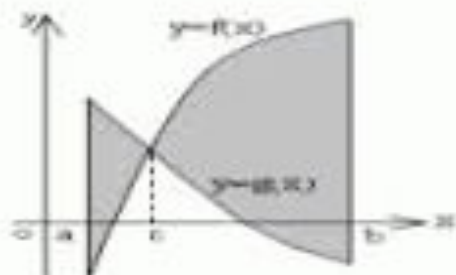


4) Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ – непрерывные на $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$, то

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

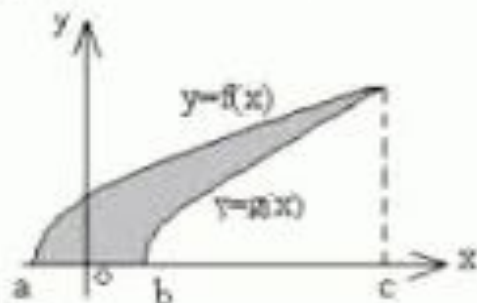


Продолжаем повторять



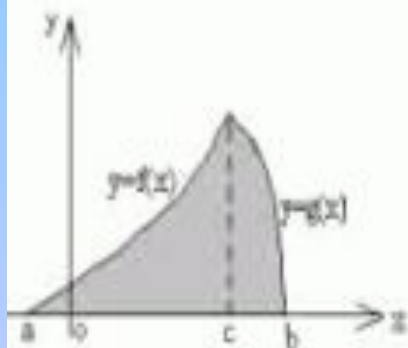
5) Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ – непрерывные на $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$ на $[c;b]$, где $c \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ на $[a;c]$, то

$$S = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$



6) Если $y=f(x)$ – непрерывная на $[a;c]$, $y=g(x)$ – непрерывная на $[b;c]$, $f(x) \geq g(x)$ на $[a;c]$, где $c \in [a;b]$, то

$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c g(x) dx$$



7) Если $y=f(x)$ – непрерывная на $[a;c]$, $y=g(x)$ – непрерывная на $[c;b]$, где $c \in [a;b]$, то

$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$



Применение интеграла

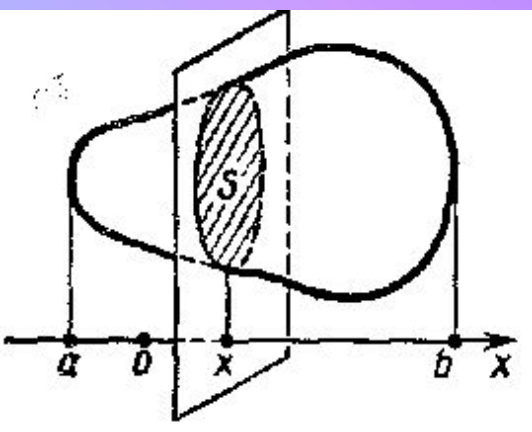
Величины	Соотношение в дифференциалах	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа F – сила N – мощность	$dA = F(x) dx$	$F(x) = \frac{dA}{dx}$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
	$dA = N(t) dt$	$N(t) = \frac{dA}{dt}$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$
m – масса тонкого стержня ρ – линейная плотность	$dm = \rho(x) dx$	$\rho(x) = \frac{dm}{dx}$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
q – электрический заряд I – сила тока	$dq = I(t) dt$	$I(t) = \frac{dq}{dt}$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
s – перемещение v – скорость	$ds = v(t) dt$	$v(t) = \frac{ds}{dt}$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
Q – количество теплоты t – теплоемкость	$dQ = c(t) dt$	$c(t) = \frac{dQ}{dt}$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$

Кроме этого определенный интеграл используется для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел вращения, длин дуг кривых.



Вычисление объемов тел

Пусть задано тело объемом V , причем имеется такая прямая, что, какую бы плоскость, перпендикулярную этой прямой, мы ни взяли, нам известна площадь S сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная оси Ox , пересекает ее в некоторой точке x . Следовательно, каждому числу x (из отрезка $[a; b]$) поставлено в соответствие единственное число $S(x)$ — площадь сечения тела этой плоскостью. Тем самым на отрезке $[a; b]$ задана функция $S(x)$. Если функция S непрерывна на отрезке $[a; b]$ то справедлива формула:

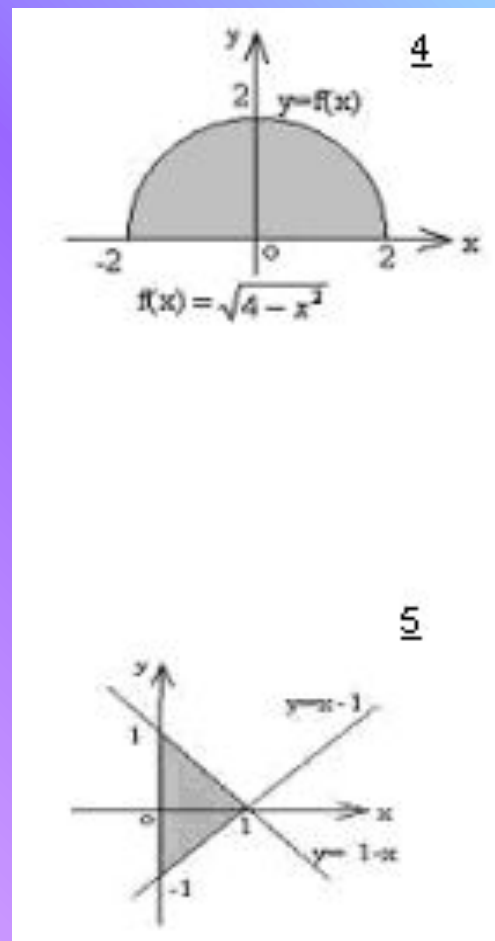
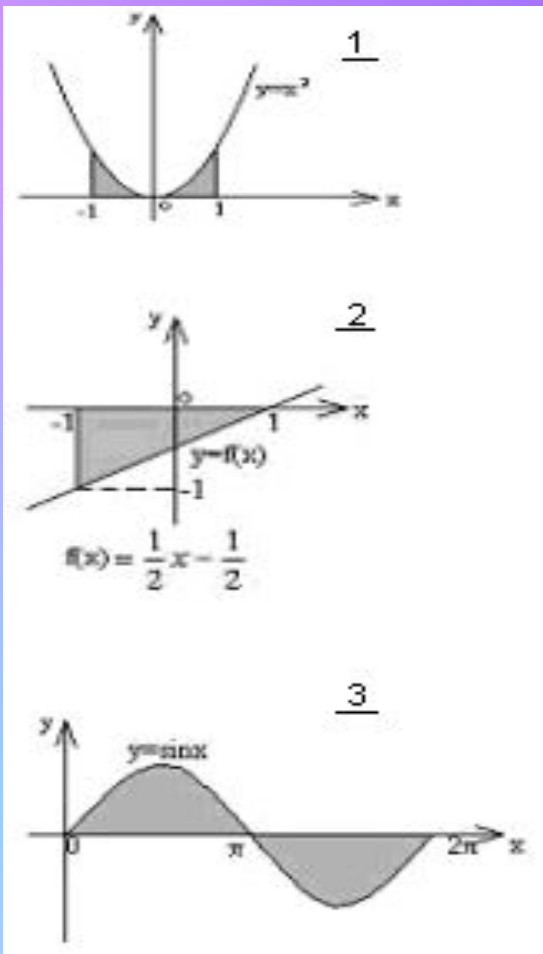


$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Найдите площадь изображенных фигур 1 – 5.



Ответы:

- 1) $S = 2/3$ (четность функции); 2) $S = 1$ (площадь прямоугольного треугольника);
3) $S = 4$ (равенство фигур); 4) $S = 2\pi$ (площадь полукруга); 5) $S = 1$ (площадь треугольника).



Найди ошибку!

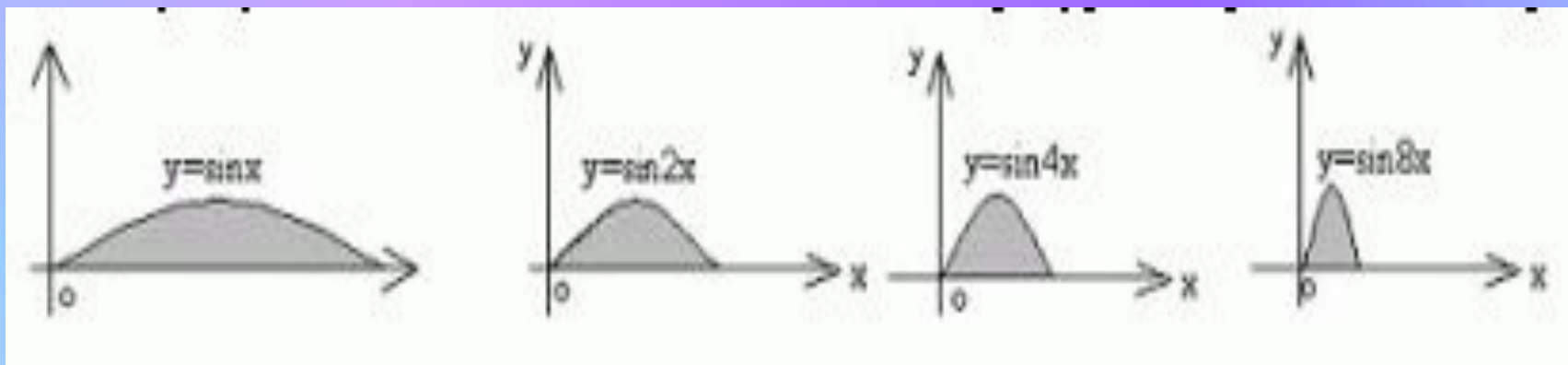
$$\int x^5 dx = 5x^4 + c$$

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7$$

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$$

Интересная задача!

Найти сумму площадей бесконечного количества фигур, заштрихованных на рисунках.
(Аргумент каждой следующей функции увеличивается в 2 раза)



Ответ: $\sin nx = 0$; $x = \pi/n$; где $n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$;

$$S = 2 + 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2 / (1 - 1/2) = 4$$

Ответ: 4.

$$S_n = \int_0^{\pi/n} \sin nx dx = 2/n$$



Программированный контроль

Задания		Ответы			
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:					
I вариант	II вариант	1	2	3	4
$y = x^2 + 2, y = x + 2$	$y = -x^2 + 4, y = -x + 4$	7	1/6	2/3	1/3
$y = \sin 2x, y = 0$ $x = 0, x = \pi / 4$	$y = \cos 2x, y = 0$ $x = -\pi / 4, x = \pi / 4$	2	-1	1/2	1
$y = -2/x, y = 2$ $x = -4, x = -1$	$y = -1/x, y = 1$ $x = -3, x = -1$	$6 - 4\ln 2$	$2 - \ln 3$	$2\ln 2$	$2 - 3\ln 2$

Верные ответы: I вариант: 2,3,1 ; II вариант: 2,4,2.



Самостоятельная работа

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (схематично изобразив графики функций).

1) $y = 6 + x - x^2$ и $y = 6 - 2x$;

2) $y = 2x^2$ и $y = x + 1$;

3) $y = 1 - x$ и $y = 3 - 2x - x^2$;

4) $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Ответ : 1) 4,5 ; 2) 9/8 ; 3) 4,5 ; 4) 1/3 .





Задачи на вычисление объемов

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 + 1, x = 0, x = 1, y = 0$;

2) $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4, y = 0$;

3) $y = 2x, y = x + 3, x = 0, x = 1$;

4) $y = x + 2, y = 1, x = 0, x = 2$;

5) $y^2 - 4x = 0, x - 2 = 0, x - 4 = 0, y = 0$;

6) $y^2 - x + 1 = 0, x - 2 = 0, y = 0$;

7) $y = -x^2 + 2x, y = 0$;

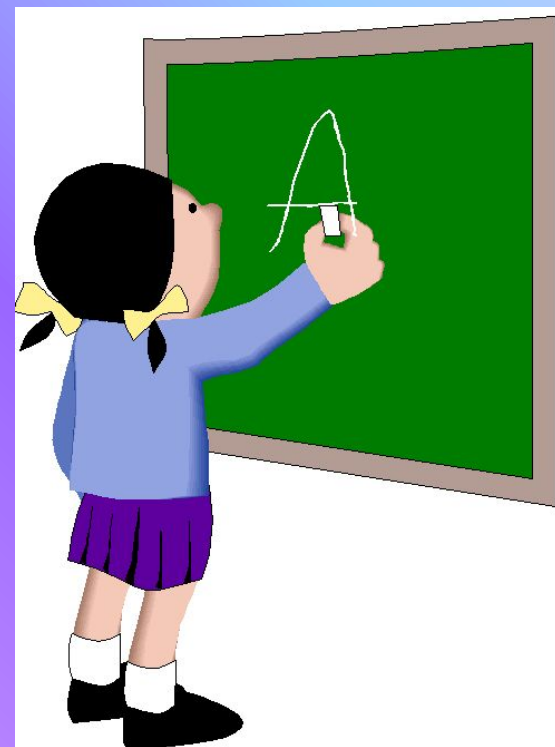
8) $y^2 = 2x, x - 2 = 0, y = 0$;

9) $y = \sqrt{x-1}, x = 3, y = 0$;

10) $y = 1 - x^2, y = 0$.

Ответ: 1) ; 2) $7,5\pi$; 3) 11π ; 4) $16\frac{2}{3}\pi$; 5) 24π ;

6) $\pi/2$; 7) $16\pi/15$; 8) 4π ; 9) 2π ; 10) $16\pi/15$.

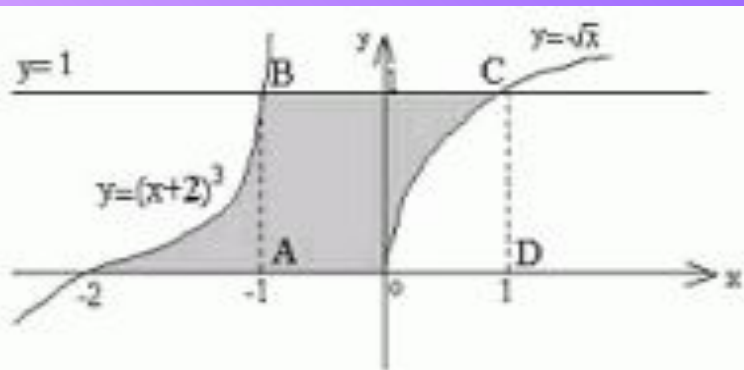




Задачи из ЕГЭ

1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x}, y = (x+2)^3, y = 0, y = 1.$$



$$S = 19/12$$

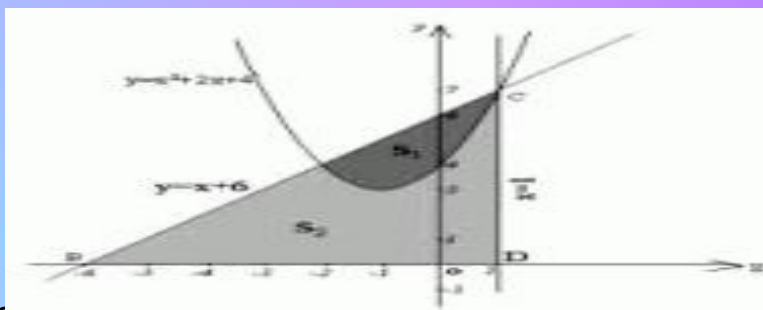
Комментарии:

1 способ: $S = S_1 + S_2 + S_3$

2 способ: $S = S_1 + S_{ABCD} - S_{OCD}$

3 способ: ?

2) Фигура, ограниченная линиями $y = x + 6$, $x = 1$, $y = 0$ делится параболой $y = x^2 + 2x + 4$ на две части. Найти площадь каждой части.



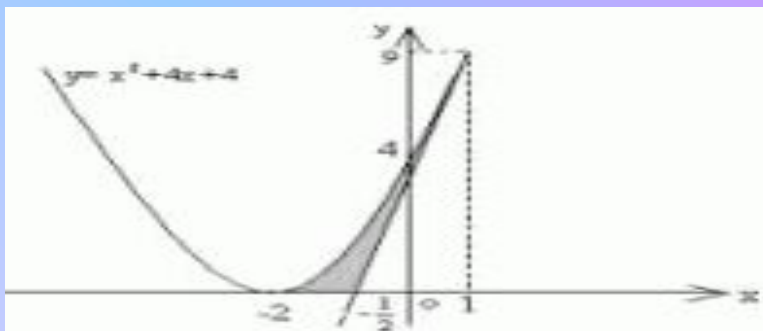
Ответ: $S_1 = 4,5$; $S_2 = 20$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 24,5$$

$$S_1 = \int_{-2}^1 ((x+6) - (x^2 + 2x + 4)) dx = 4,5$$

$$S_2 = S_{\Delta BCD} - S_1$$

3) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми $y = 6x + 3$ и $y = 0$.



$$F(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$S = 9/4$$

Комментарии:

1 способ:

$$S = \int_{-1.5}^1 (x+2)^2 dx - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 9$$

2 способ: ?



Контрольные вопросы



1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$?
3. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Как проверить результат интегрирования?
6. Чему равна производная от неопределенного интеграла?
7. Чему равен $\int d(\ln x^8 - \sin 3x)$?
8. Перечислите методы интегрирования.
9. Дайте определение определенного интеграла.
10. Сформулируйте теорему Ньютона – Лейбница.
11. Перечислите свойства определенного интеграла.
12. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла (составьте словесный алгоритм)?
13. Перечислите области применения интеграла, назовите величины, которые можно вычислить с помощью интеграла.



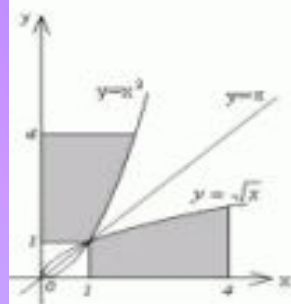
Для любителей математики

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями: $y=x^2$ при $x=0$, $y=1$, $y=4$, $x=0$

Решение:

Данная фигура симметрична криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=4$, $y=0$, графиком функции $y = \sqrt{x}$, обратной $y=x^2$, $x=0$. Поэтому эти фигуры имеют равные площади и

$$S = \int_1^4 \sqrt{x} dx$$



Замечание: (плакат на стенде)

Если фигура ограничена линиями $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $y=c$, $y=d$, где $c < d$ и $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$ на $[c; d]$, то её площадь может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy$$

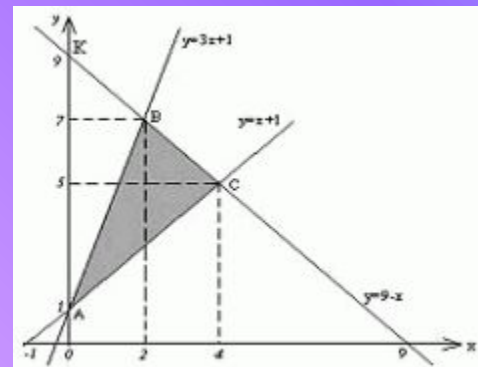
2) Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=3x+1$, $y=9-x$, $y=x+1$.

Решение:

Вершины полученного ABC имеют координаты: A(0;1), B(2;7), C(4;5).

Можно заметить, что ABC - прямоугольный (произведение угловых коэффициентов прямых $y=x+1$ $y=9-x$ равно -1).

Поэтому применение интеграла для вычисления $S(ABC)$ не рационально. Её всегда можно найти как разность площадей треугольников, у которых известны высота и основание или же можно использовать координатный метод.





Домашнее задание



Найти площади фигур, ограниченных линиями (1-7)

- 1) $y=x^2$ ($x \geq 0$), $y=1$, $y=4$, $x=0$
- 2) $y=x^2-4x+8$, $y=3x^2-x^3$, если $x \in [-2;3]$
- 3) $y=x^2-4x+\sin^2(x/2)$, $y=-3-\cos^2(x/2)$, если $x \in [2;3]$
- 4) $y=3x+1$, $y=9-x$, $y=x+1$
- 5) $y=|x-2|$, $y=\sqrt{x}$
- 6) $x|y|=2$; $x=1$; $x=3$
- 7) $y=\arcsin x$; $y=0$; $x=0,5$; $x=1$
- 8) При каком значении a прямая $x=a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2/x$; $x=1$; $x=3$ в отношении 1:3?
- 9) Вычислить $\int_{-3}^2 \sqrt{(x+2)^2} dx$, $\int_0^2 \sqrt{4x-x^2} dx$, исходя из его геометрического смысла.



Список литературы

- Н. А. Колмогоров, «Алгебра и начала анализа», Москва, Просвещение, 2000г.
- М. И. Башмаков, «Алгебра и начала анализа», Москва, ДРОФА, 2002г.
- Ш.А.Алимов, «Алгебра и начала анализа», 11 кл., Москва, ДРОФА, 2004г.
- Л. В. Киселева, Пособие по математике для студентов медицинских училищ и колледжей, Москва, ФГОУ «ВУНМЦ Росздрава», 2005г.
- <http://www.nerungri.edu.ru>
- <http://tambov.fio.ru>
- <http://www.zachetka.ru>
- <http://edu.of.ru>
- <http://festival.1september.ru>