Интеграл и его применение

«…Природа формулирует свои законы языком математики»

Г. Галилей

Презентация составлена преподавателем
Гиляровой Мариной Геннадьевной

Волгоград, 2009г.

Историческая справка

История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур, т.е. задачами на вычисление площадей. Вычислениями площадей поверхностей и объемов тел занимались еще математики Древней Греции и Рима. Первым европейским математиком, получившим новые формулы для площадей фигур и объемов тел, был знаменитый астроном И. Кеплер. После исследований ряда ученых (П.Ферма, Д.Валлиса) И. Барроу открыл связь между задачами отыскания площадей и проведением касательной (т.е. между интегрированием и дифференцированием). Исследование связи между этими операциями, свободное от геометрического языка, было дано И.Ньютоном и Г. Лейбницем.

Современное обозначение интеграла восходит к Лейбницу, у которого оно выражало мысль, что площадь криволинейной трапеции есть сумма площадей бесконечно тонких полосок шириной *d* и высоты *f(x)*. Сам знак интеграла является стилизованной латинской буквой S (summa). Символ интеграла введен с 1675г., а вопросами интегрального исчисления занимаются с 1696г. Хотя интеграл изучают, в основном, ученые–математики, но и физики внесли свой вклад в эту науку. Практически ни одна формула физики не обходится без дифференциального и интегрального исчислений.

Краткая история интегрального исчисления

Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении задач на нахождение площадей, а также объемов тел связаны с именем Архимеда(287-212 до н. э.)

Развивая идеи предшественников Архимед определил длину окружности и площадь круга, объем и поверхность шара. В работах «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сферах», он показал, что определение объемов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объема конуса и цилиндра. Архимед разработал и применил методы, предвосхитившие созданное в XVII в. интегральное исчисление.

Потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем идеи Архимеда нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления. В XVII в. математики уже умели вычислять площади многих фигур с кривыми границами и объемы многих тел. А общая теория была создана во второй половине XVII в. в трудах великого английского математика Иссака Ньютона(1643-1716) и великого немецкого математика Готфрида Лейбница(1646-1716). Ньютон и Лейбниц являются основателями интегрального исчисления. Они открыли важную теорему, носящую их имя:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где f(x) – функция, интегрируемая на отрезке [a;b], F(x) – одна из ее первообразных.

Рассуждения, которые приводили Ньютон и Лейбниц, несовершенны с точки зрения современного математического анализа. В XVIII в. крупнейший представитель математического анализа Леонард Эйлер эти понятия обобщил в своих трудах. Только в начале XIX в. были окончательно созданы понятия интегрального исчисления. Обычно при этом отмечают заслуги французского математика Огюстена Коши и немецкого математика Георга Римана.

Само слово интеграл придумал Я.Бернулли(1690г.). Оно происходит от латинского integro, которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. В1696г. появилось и название новой ветви математики – интегральное исчисление, которое ввел И. Бернулли. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797 г.). Обозначение определенного интеграла ввел Иосиф Бернулли, а нижние и верхние пределы Леонард Эйлер.

Неопределенный интеграл

Математические операции образуют пары двух взаимно обратных действий, например, сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня. Дифференцирование дает возможность для заданной функции F(x) находить ее производную F´(x). Существует действие, обратное дифференцированию – это **интегрирование** – нахождение функции F(x) по известной ее производной f(x) = F´(x) или дифференциалу f(x)dx.

Функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x), если F´(x) = f(x) или dF(x)=f(x)dx. Если функция f(x) имеет первообразную F(x), то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все ее первообразные содержатся в выражении F(x) +C, где C – постоянная.

Неопределенным интегралом от функции f(x)(или от выражения f(x)dx) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $\int$ – знак интеграла, f(x) - подынтегральная функция, f(x)dx - подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования. Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

- Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

- Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному слагаемому C: $\int d(F(x)) = F(x) + C$
- Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

- Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых: $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int [f_1(x)]\,dx \pm \int [f_2(x)]\,dx$

Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла выводится через криволинейную трапецию. **Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линиями y = f(x), y = 0, x=a, x=b.** Площадь криволинейной трапеции выражается интегральной суммой или числом, которое называется определенным интегралом. **Определенный интеграл** вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

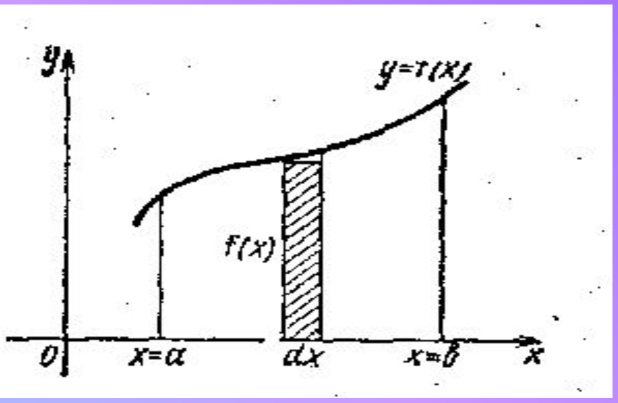
Общность обозначения определенного и неопределенного интегралов подчеркивает тесную связь между ними: определенный интеграл – это число, а неопределенный интеграл – совокупность первообразных функций. Связь между определенным и неопределенным интегралом выражается формулой Ньютона – Лейбница.

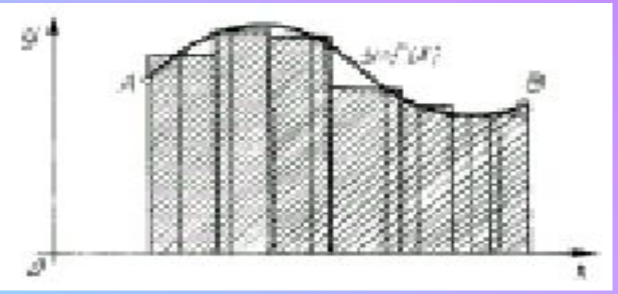
Свойства определенного интеграла:

1) Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл сохранит абсолютную величину, но изменит свой знак на противоположный.
2) Если верхняя и нижняя границы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю.
3) Если отрезок интегрирования [a;b] разбить на несколько частей, определенный интеграл на отрезке [a;b] будет равен сумме определенных интегралов этих отрезков.
4) Определенный интеграл от суммы функций, заданных на отрезке [a;b] равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций.
5) Постоянный множитель к подынтегральной функции можно выносить за знак определенного интеграла.
6) Оценка определенного интеграла: если $m \leq f(x) \leq M$ на [a;b] , то

$$m(b - a) < \int_a^b f(x)dx < M(b - a)$$

Геометрический смысл определенного интеграла





Пусть функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке [a; b] и *f(x) ≥ 0*. Фигура, ограниченная графиком *AB* функции *y=f(x),* прямыми *x=a, x=b* и осью *Ox* (см. рисунок), называется *криволинейной трапецией*.

Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение равно площади прямоугольника с основанием и высотой , а сумма представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке. Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора количества точек разбиения.

Чем меньше Δ x, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь *S* криволинейной трапеции принимается предел интегральной суммы.

Таким образом, *с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.*

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределенных интегралов путем приведения их к табличным с применением основных свойств. Здесь могут представиться следующие случаи: 1) данный интеграл берется непосредственно по формуле соответствующего табличного интеграла; 2) данный интеграл после применения свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам; 3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применением свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид $\int f(x) = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, d(t)$;

2) 2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке: $\int f[\psi(x)]\, \psi'(x)\, d(x) = \int f(u)\, du$

3. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv = uv - \int v\, du$, где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\, du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден.

Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + const \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + const$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + const$$

$$\int \cos x dx = \sin x + const$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + const$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + const$$

$$\int e^x dx = e^x + const$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + const$$

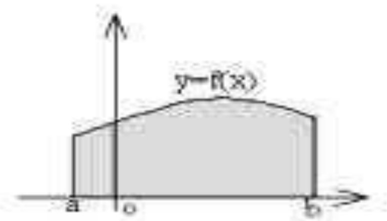
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + const$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + const$$

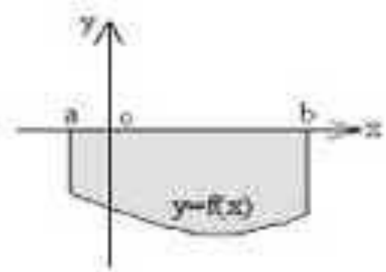
Повторение теоретического материала

Как найти площади изображенных фигур?



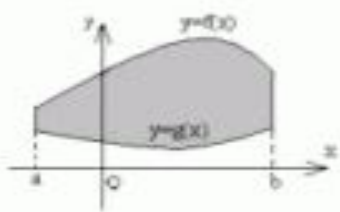
1) Если $y=f(x)$ – непрерывная, $f(x)\geq 0$ на $[a;b]$, то

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



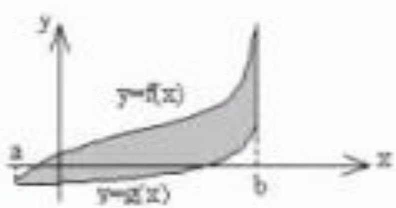
2) Если $y=f(x)$ – непрерывная, $f(x)\leq 0$ на $[a;b]$, то

$$S=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$



3) Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ – непрерывные на $[a;b]$, $f(x)\geq g(x)$ на $[a;b]$, то

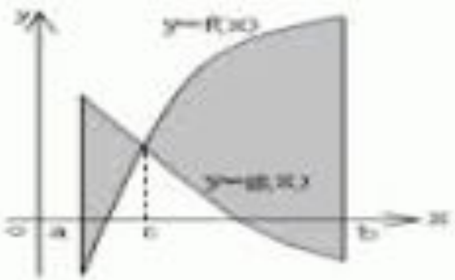
$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



4) Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ – непрерывные на $[a;b]$, $f(x)\geq g(x)$ на $[a;b]$, то

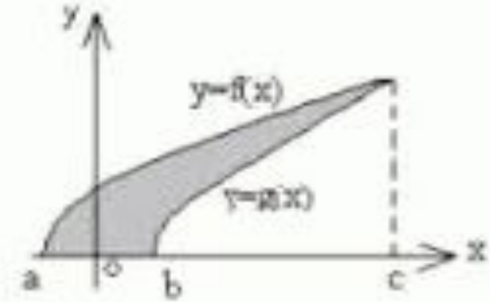
$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Продолжаем повторять



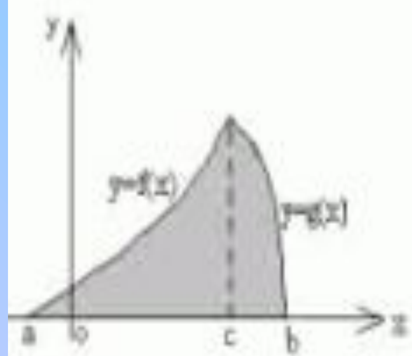
5) Если y=f(x), y=g(x) – непрерывные на [a;b], f(x)≥ g(x) на [c;b], где c∈ [a;b], f(x) ≤g(x) на [a;c], то

$$S=\int_a^c (g(x)-f(x))dx+\int_c^b (f(x)-g(x))dx$$



6) Если y=f(x)- непрерывная на [a;c], y=g(x) –непрерывная на[b;c], f(x) ≥g(x) на[a;c], где c∉ [a;b], то

$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c g(x)dx$$



7) Если y=f(x)- непрерывная на [a;c],y=g(x)–непрерывная на [c;b], где c∈ ∈ [a;b], то

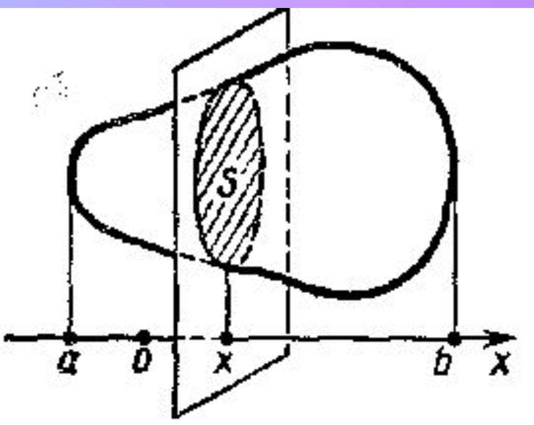
$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$

Применение интеграла

Величины	Соотношение в дифференциалах	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа F – сила N -мощность	$dA = F(x)\,dx$	$F(x) = \frac{dA}{dx}$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$
	$dA = N(t)dt$	$N(t) = \frac{dA}{dt}$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt$
m – масса тонкого стержня p – линейная плотность	$dm = p(x)\,dx$	$\rho(x) = \frac{dm}{dx}$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,dx$
q – электрический заряд I – сила тока	$dq = I(t)\,dt$	$I(t) = \frac{dq}{dt}$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt$
s - перемещение v - скорость	$ds = v(t)\,dt$	$v(t) = \frac{ds}{dt}$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$
Q – количество теплоты t - теплоемкость	$dQ = c(t)\,dt$	$c(t) = \frac{dQ}{dt}$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)\,dt$

Кроме этого определенный интеграл используется для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел вращения, длин дуг кривых.

Вычисление объемов тел

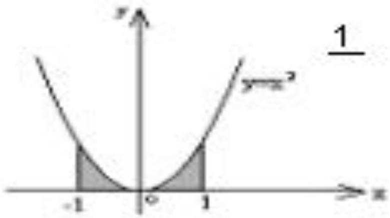


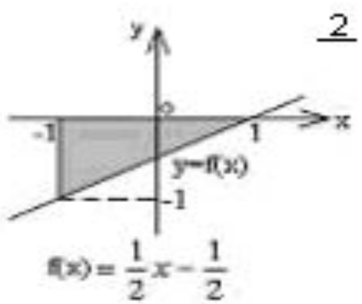
Пусть задано тело объемом V, причем имеется такая прямая, что, какую бы плоскость, перпендикулярную этой прямой, мы ни взяли, нам известна площадь S сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная оси Ox, пересекает ее в некоторой точке x. Следовательно, каждому числу x (из отрезка [a; b]) поставлено в соответствие единственное число S (x) — площадь сечения тела этой плоскостью. Тем самым на отрезке [a; b] задана функция S(x). Если функция S непрерывна на отрезке [a; b] то справедлива формула:

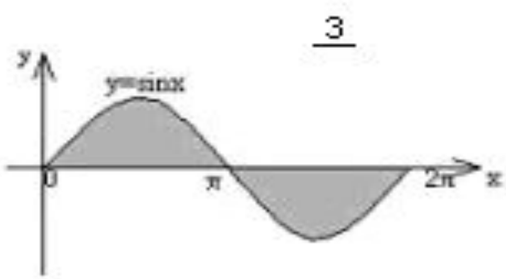
$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

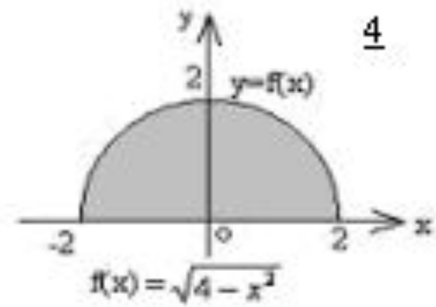
ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

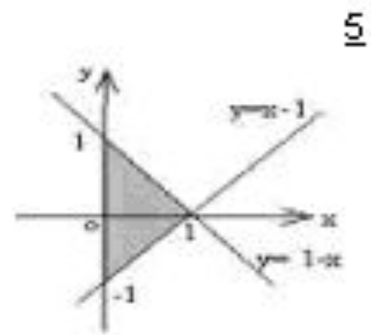
Найдите площадь изображенных фигур 1 – 5.











Ответы:

1) S = 2/3 (четность функции); 2) S = 1 (площадь прямоугольного треугольника);

3) S = 4 (равенство фигур); 4) S = 2π (площадь полукруга); 5) S = 1 (площадь треугольника).

Найди ошибку!

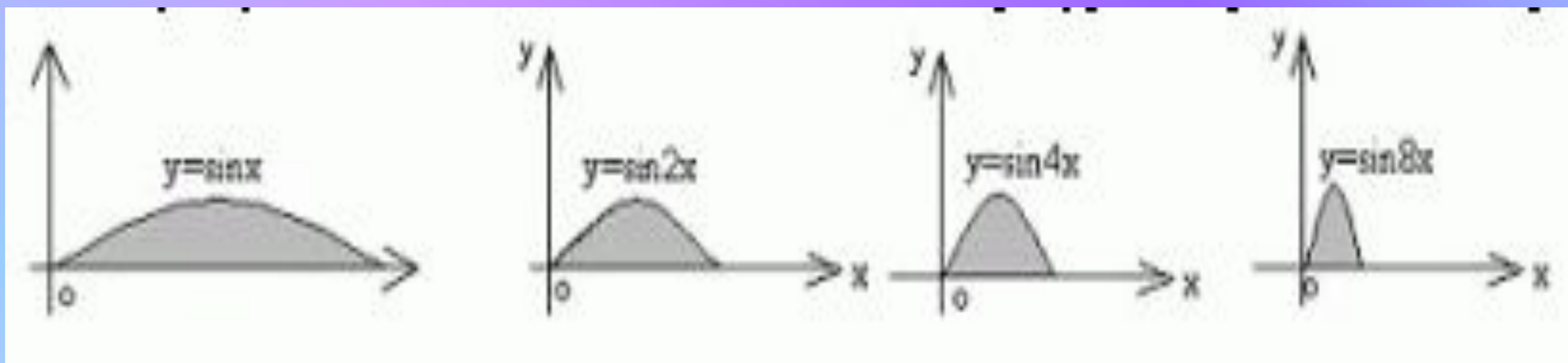
$$\int x^5 dx = 5x^4 + c$$

$$\int x6dx = \frac{1}{7}x^7$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$$

Интересная задача!

Найти сумму площадей бесконечного количества фигур, заштрихованных на рисунках. (Аргумент каждой следующей функции увеличивается в 2 раза)



Ответ: sin nx=0 ; x=π/n; где n=1,2,4,8,16…;

S=2+1+1/2+1/4+1/8+…=2/(1-1/2)=4

Ответ: 4.

$$S_n = \int_0^{\pi/n} \sin nx dx = 2/n$$

Программированный контроль

Задания		Ответы			
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:					
I вариант	II вариант	**1**	**2**	**3**	**4**
$y = x^2 + 2,\ y = x + 2$	$y = -x^2 + 4,\ y = -x + 4$	7	1/6	2/3	1/3
$y = \sin 2x,\ y = 0$ $x = 0,\ x = \pi / 4$	$y = \cos 2x,\ y = 0$ $x = -\pi/4,\ x = \pi / 4$	2	-1	1/2	1
$y = -2 / x,\ y = 2$ $x = -4,\ x = -1$	$y = -1/x,\ y = 1$ $x = -3,\ x = -1$	6-4ln2	2-ln3	2ln2	2-3ln2

Верные ответы: I вариант: 2,3,1 ; II вариант: 2,4,2.

Самостоятельная работа

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (схематично изобразив графики функций).

1) $y = 6 + x - x^2$ и $y = 6 - 2x$;

2) $y = 2x^2$ и $y = x + 1$;

3) $y = 1 - x$ и $y = 3 - 2x - x^2$;

4) $y = x^2$ и $y = \sqrt{X}$.

Ответ : 1) 4,5 ; 2) 9/8 ; 3) 4,5 ; 4) 1/3 .

Задачи на вычисление объемов

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$;

2) $y = \sqrt{X}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

3) $y = 2x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;

4) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$;

5) $y^2 – 4x = 0$, $x – 2 = 0$, $x – 4 = 0$, $y = 0$;

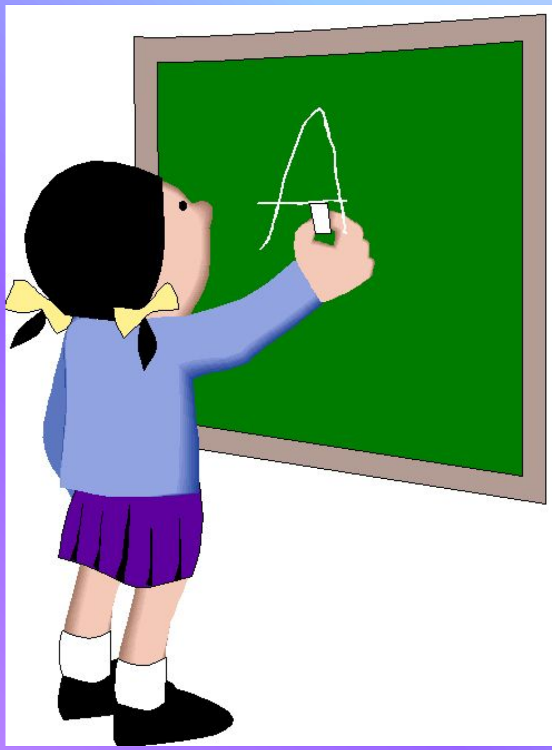
6) $y^2 – x + 1 = 0$, $x – 2 = 0$, $y = 0$;

7) $y = - x^2 + 2x$, $y = 0$;

8) $y^2 = 2x$, $x – 2 = 0$, $y = 0$;

9) $y = \sqrt{X - 1}$, $x = 3$, $y = 0$;

10) $y = 1 – x^2$, $y = 0$.

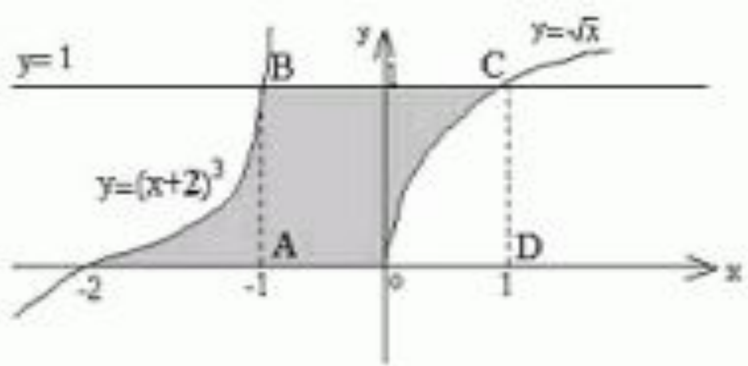


Ответ: 1) ; 2) 7,5 π ; 3) 11π ; 4) 16 ⅔π; 5) 24 π;

6) π/2; 7) 16π/15; 8) 4 π; 9) 2 π; 10) 16π/15.

Задачи из ЕГЭ

)Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}, y=(x+2)^3, y=0, y=1.$



S=19/12

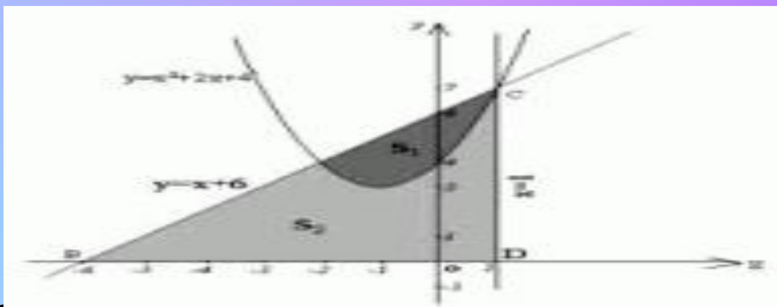
Комментарии:

1 способ: $S=S_1+S_2+S_3$

2 способ: $S=S_1+S_{ABCD}-S_{OCD}$

3 способ: ?

2) Фигура, ограниченная линиями y=x+6, x=1, y=0 делится параболой y=x ^{2}+2x+4 на две части. Найти площадь каждой части.



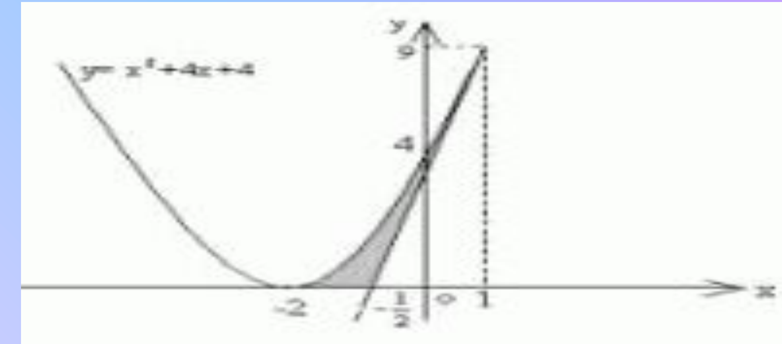
Ответ: $S_1=4{,}5$; $S_2=20$

$S_{\Delta ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 7=24{,}5$

$S_1=\int_{-3}^{1}((x+6)-(x^2+2x+4))dx=4{,}5$

$S_2=S_{\Delta ABCD}-S_1$

3) На … ть площадь фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми y=6x+3 и y=0.



$F(x)=x^2+4x+4$

$S=9/4$

Комментарии:

1 способ: $S=\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 9$

2 способ: ?

Контрольные вопросы

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для функции f(x)?
3. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции f(x)?
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Как проверить результат интегрирования?
6. Чему равна производная от неопределенного интеграла?
7. Чему равен $\int d(\ln x^8 - \sin 3x)$?
8. Перечислите методы интегрирования.
9. Дайте определение определенного интеграла.
10. Сформулируйте теорему Ньютона – Лейбница.
11. Перечислите свойства определенного интеграла.
12. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла (составьте словесный алгоритм)?
13. Перечислите области применения интеграла, назовите величины, которые можно вычислить с помощью интеграла.

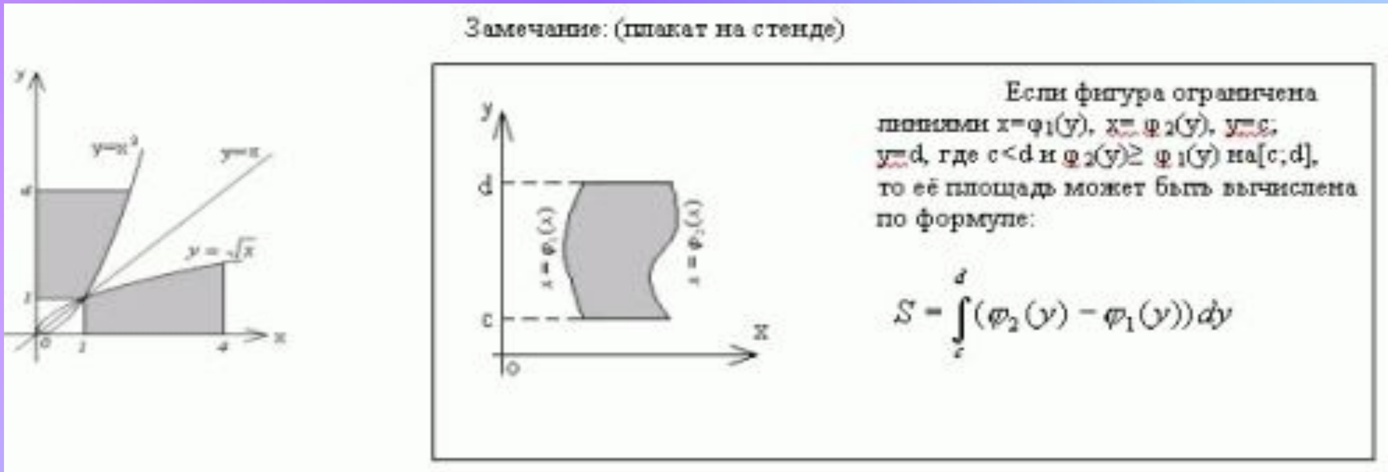
Для любителей математики

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:y=x2 при x0, y=1, y=4, x=0

Решение:

Данная фигура симметрична криволинейной трапеции, ограниченной прямыми x=1, x=4, y=0, графиком функции $y=\sqrt{x}$, обратной y=x2, x0. Поэтому эти фигуры имеют равные площади и

$$S=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$



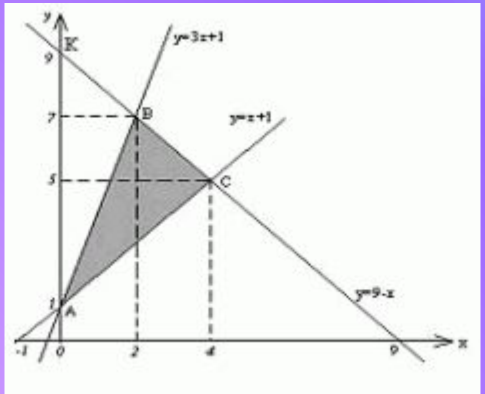
2) Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми y=3x+1, y=9-x, y=x+1.

Решение:

Вершины полученного ABC имеют координаты: A(0;1), B(2;7), C(4;5).

Можно заметить, что ABC - прямоугольный (произведение угловых коэффициентов прямых y=x+1 y=9-x равно -1).

Поэтому применение интеграла для вычисления S(ABC) не рационально. Её всегда можно найти как разность площадей треугольников, у которых известны высота и основание или же можно использовать координатный метод.



Домашнее задание

Найти площади фигур, ограниченных линиями (1-7)

1) $y=x^2$ $(x\geq 0)$, $y=1$, $y=4$, $x=0$
2) $y= x^2-4x+8$, $y=3x^2-x^3$, если $x\in[-2;3]$
3) $y=x^2-4x+\sin^2(x/2)$, $y=-3-\cos^2(x/2)$, если $x\in$ $[2;3]$
4) $y=3x+1$, $y=9-x$, $y=x+1$
5) $y=|x-2|$, $y=\sqrt{x}$
6) $x|y|=2$; $x=1$; $x=3$
7) $y= \arcsin x$; $y=0$; $x=0,5$; $x=1$
8) При каком значении а прямая x=a делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2/x$; $x=1$; $x=3$ в отношении 1:3?
9) Вычислить $\int_{-3}^{2}\sqrt{(x+2)^2}\,dx$, $\int_{0}^{2}\sqrt{4x-x^2}\,dx$, исходя из его геометрического смысла.

Список литературы

- Н. А. Колмогоров, «Алгебра и начала анализа», Москва, Просвещение,2000г.
- М. И. Башмаков, «Алгебра и начала анализа», Москва, ДРОФА,2002г.
- Ш.А.Алимов, «Алгебра и начала анализа», 11 кл., Москва, ДРОФА, 2004г.
- Л. В. Киселева, Пособие по математике для студентов медицинских училищ и колледжей, Москва, ФГОУ «ВУНМЦ Росздрава», 2005г.
- http://www.nerungri.edu.ru
- http://tambov.fio.ru
- http://www.zachetka.ru
- http://edu.of.ru
- http://festival.1september.ru