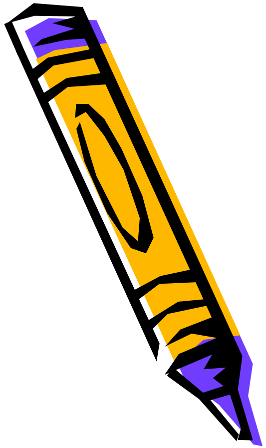
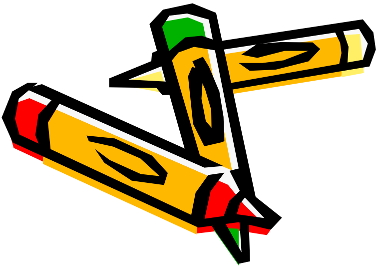
Интеграл и первообразная

900igr.net



Содержание



1. Первообразная

1.1. Определение первообразной

- **Определение:** Функция **F** называется ***первообразной*** для функции **f** на заданном промежутке, если для всех **x** из этого промежутка
  - $F'(x) = f(x)$

1.2 основное свойство первообразной

- **общий вид первообразных.** Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные.
-
- ***Признак постоянства функции***. *Если* ***F′(x) =0*** *на некотором промежутке* ***I****, то функция* ***F*** *– постоянна на этом промежутке.*
- ***Доказательство.*** Зафиксируем некоторое x_0 из промежутка **I**. Тогда для любого числа **x** из такого промежутка в силу формулы Лагранжа можно указать такое число **c**, заключенное между **x** и x_0, что
- $F(x)-F'(c) = F'(c)(x-x_0)$.
- По условию $F'(c)=0$, так как **c** **I**, следовательно,
- $F(x)-F(x_0) = 0$.
- Итак, для всех x из промежутка **I**
- $F(x) = F(x_0)$,
- т.е. функция **F** сохраняет постоянное значение.
- (продолжение следует)

Основное свойство первообразной…

- Все первообразные функции **f** можно записать с помощью одной формулы, которую называют *общим видом первообразных для функции **f**.* Справедлива следующая теорема *(основное свойство первообразных)*:
- ***Теорема.*** *Любая первообразная для функции **f** на промежутке **I** может быть записана в виде*
  - *F(x) + C,*
- Где **F(x)** – *одна из первообразных для функции **f(x)** на промежутке **I**, а **C** – произвольная постоянная.*

Основное свойство первообразной

- Свойства первообразных
- 1) какое бы число ни поставить в выражение *F(x)+C* вместо ***C***, получим первообразную для **f** на промежутке **I**.
- 2) какую бы первообразную **Φ** для **f** на промежутке **I** ни взять, можно подобрать такое число ***C***, что для всех **x** из промежутка **I** будет выполнено равенство
- $\Phi(x) = F(x) + C$.
- ***Доказательство.***
- ***1)*** по условию функции **F** – первообразная для **f** на промежутке **I**. Следовательно, $F'(x)=f(x)$ для любого **x** **I**, поэтому
- $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$,
- т.е. $F(X) + C$ – первообразная для **f** .
- **2)** пусть **Φ(x)** – одна из первообразных для функции **f** на том же промежутке **I**, т.е. $\Phi'(x)=f(x)$ для всех **x** **I**. Тогда
- $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
- Отсюда следует в силу признака постоянства функции, что разность Φ(x)□F(x) есть функция, принимающая некоторое постоянное значение ***C*** на промежутке **I**.
- Таким образом, для всех **x** из промежутка **I** справедливо равенство $\Phi(x) - F(x) = C$, что и требовалось доказать.

1.3 три правила нахождения первообразных

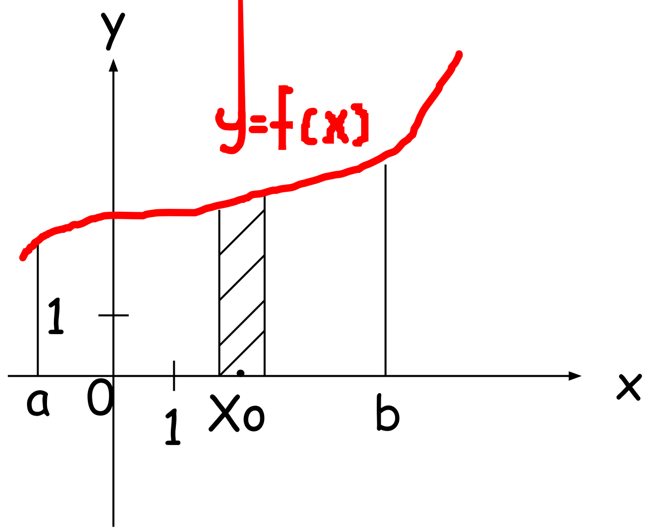
- П**равило 1.** *если **F** есть первообразная для **f**, а для **G** – первообразная для **g**, то **F+G** есть первообразная для **f+g**.*
- Действительно, так как $F'=f$ и $G'=g$, по правилу вычисления производной суммы имеем:
- $(F+G)' = F' + G' = f + g.$
- **Правило 2.** *если **F** есть первообразная для **f**, а **k** – постоянная, то функция **kF** – первообразная для **kf**.*
- Действительно, постоянный множитель можно выносить за знак производной, поэтому:
- $(kF)' = kF' = kf.$
- **Правило 3.** *если **F(x)** есть первообразная для **f(x)**, а **k** и **b** – постоянные, причем **k=0**, то **F(kx+b)** есть первообразная для **f(kx+b)**.*
- Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции имеем:
- $(F(kx + b))' = F'(kx + b)*k=f(kx + b)$

интеграл
2.1. площадь криволинейной трапеции

- Пусть на отрезке **[a; b]** оси **оX** задана непрерывная функция **f**, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком **[a; b]** и прямых **x = a** и **x = b**, называют криволинейной трапецией.
- ***Теорема***. *Если* ***f*** *– непрерывная и неотрицательная на отрезке* ***[a; b]*** *функция, а* ***F*** *- ее первообразная на этом отрезке, то площадь* ***S*** *соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке* ***[a; b]*** *, т.е.*
  - **$S=F(b)-F(a)$.**
- ***Доказательство.*** Рассмотрим функцию **$S(x)$, **определенную на отрезке ***[a; b].*** Если **$a<x<b$**, то **$S(x)$** – площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку Хо (рис. 1). Если **$x = a$**, то **$S(a)=0$**. Отметим, что **$S(b) = S$(S – площадь криволинейной трапеции).**
- Докажем, что
  - **$S'(x_0) = f(x_0)$.**

2.1площадь криволинейной трапеции…

- Рис.1



2.1 площади криволинейной трапеции…

- Пусть Хо принадлежит [a,b]. f(x) непрерывна в Хо. Тогда в достаточно малой окрестности в точке Хо функцию f(x) можно считать постоянной и равной f(Хо).
- Тогда прирощение равно площади приближенно равно: $f(x) \cdot \Delta x$
- $\Delta S : \Delta x = f(x)$
- Если $\Delta x \longrightarrow 0$, $\Delta S : \Delta x \longrightarrow S'(Xo)$
- $S'(Xo) = f(Xo)$ т.е S - первообразная функции f в точке Хо

2.1площаль криволинейной трапеции

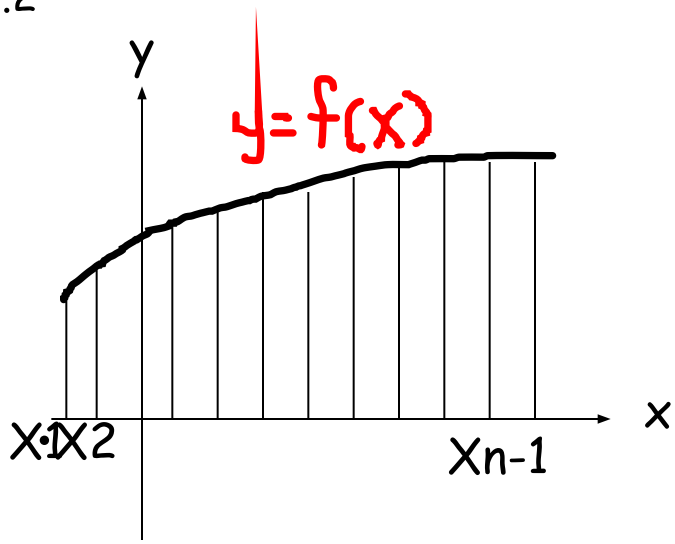
- Получили, что **S** есть первообразная для **f**. Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех **x**   **[a; b]** имеем:
  - **S(x) = F(x) + C,**
- Где **C** - некоторая постоянная, а **F** – одна из первообразных для функции **f**. Для нахождения **C** подставим **x = a:**
  - **F(a) + C=S(a)=0,**
- Откуда **C= -F(a).** Следовательно,
  - **S(x) = F(x) - F(a).**
- Поскольку площадь криволинейной трапеции равна **S(b)**, подставляя **x = b** в формулу **S(x)+F(x)-F(a)**, получим:
  - **S = S(b) = F(b) - F(a).**

2.2Интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

- **Понятие об интеграле.** Пусть функция **f** неотрицательна и непрерывна на отрезке **[a; b]**, тогда площадь **S** соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.
- Разобьем отрезок **[a; b]** на **n** отрезков одинаковой длины точками
- **$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$**, и пусть $x =$ $= x_k – x_{k-1}$, где **$k = 1, 2, \ldots, n-1, n$**. На каждом из отрезков **$[x_{k-1}; x_k]$** как на основании построим прямоугольник высотой **$f(x_{k-1})$.** сумма площадей всех таких прямоугольников (рис.2) равна:
- $S_n = \Delta x\,(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$.
- Т.к f(x) непрерывная функция , то при $\Delta x \to 0$, т.е $n \to \infty$, то $S_n \to S$

2.2

- Рис.2



2.2

- Для любой непрерывной функции на отрезке [a,b] доказано, что S_n S к некоторому числу. Это число называют интегралом функции .
- $\int_a^b$ f(x)d(x), где f(x) подинтегральная функция, a – нижний предел интегрирования, b- верхний, $\int$ - интеграл, x – переменная. Интеграл – это предел интегрированяи сумм. Сравнивая S= F(b) – F(a) и S= $\int_a^b$ f(x)dx, можно записать

$$S=\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

2.2

- Эта формула называется *формулой Ньютона – Лейбница*. Она верна для любой функции **f**, непрерывной на отрезке **[a; b]**.

1.6 Таблица первообразных

Производная функции $f'(x)$	Функция $f(x)$	Первообразная функции $F(x)+C$
0	1	x
0	k (число)	kx
1	x	$\frac{x^2}{2}$
k	$kx+b$	$k\frac{x^2}{2}+bx$
$2x$	x^2	$\frac{x^3}{3}$
$2ax+b$	ax^2+bx+c	$\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx$
$3x^2$	x^3	$\frac{x^4}{4}$

1.6 Таблица первообразных

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
nx^{n-1}	$x^n,\ n \neq 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-k\sin kx$	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx$
$k\cos kx$	$\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx$
$-\frac{k}{x^2}$	$\frac{k}{x}$	$-$
$-\frac{2k}{x^3}$	$\frac{k}{x^2}$	$-\frac{k}{x}$