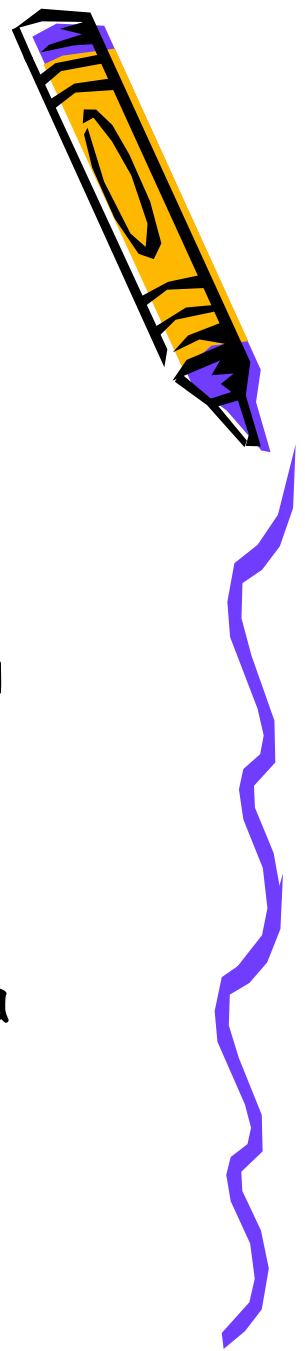




# Интеграл и первообразная



# Содержание



- 1. Первообразная
  - 1.1. Определение первообразной
  - 1.2. Основное свойство первообразной
  - 1.3. Три правила нахождения первообразной
  - 1.6. Таблица
- 2. Интеграл
  - 2.1. Площадь криволинейной трапеции
  - 2.2. Интеграл. Формула Ньютона - Лейбница

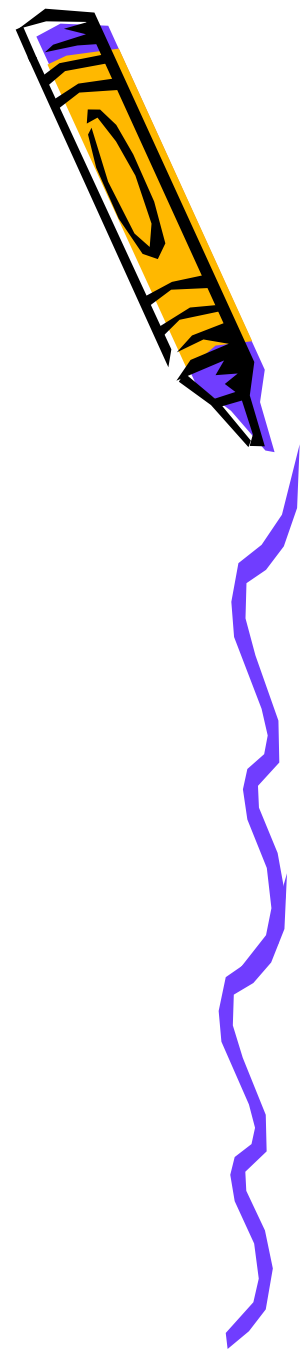


# 1. Первообразная

## 1.1. Определение первообразной

- **Определение:** Функция  $F$  называется **первообразной** для функции  $f$  на заданном промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка

- $F'(x) = f(x)$



# 1.2 основное свойство первообразной



- **общий вид первообразных.** Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные.
- 
- **Признак постоянства функции.** Если  $F'(x) = 0$  на некотором промежутке  $I$ , то функция  $F$  - постоянна на этом промежутке.
- **Доказательство.** Зафиксируем некоторое  $x_0$  из промежутка  $I$ . Тогда для любого числа  $x$  из такого промежутка в силу формулы Лагранжа можно указать такое число  $c$ , заключенное между  $x$  и  $x_0$ , что
- $F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$ .
- По условию  $F'(c) = 0$ , так как  $c \in I$ , следовательно,
- $F(x) - F(x_0) = 0$ .
- Итак, для всех  $x$  из промежутка  $I$
- $F(x) = F(x_0)$ ,
- т.е. функция  $F$  сохраняет постоянное значение.
- (продолжение следует)



# Основное свойство первообразной...



- Все первообразные функции  $f$  можно записать с помощью одной формулы, которую называют общим видом первообразных для  $f$  функции  $f$ . Справедлива следующая теорема (основное свойство первообразных):
- **Теорема.** Любая первообразная для  $f$  функции  $f$  на промежутке  $I$  может быть записана в виде
  - $F(x) + C,$
- Где  $F(x)$  - одна из первообразных для  $f$  функции  $f(x)$  на промежутке  $I$ , а  $C$  - произвольная постоянная.



# Основное свойство первообразной



- Свойства первообразных

- 1) какое бы число ни поставить в выражение  $F(x)+C$  вместо  $C$ , получим первообразную для  $f$  на промежутке  $I$ .
- 2) какую бы первообразную  $\Phi$  для  $f$  на промежутке  $I$  ни взять, можно подобрать такое число  $C$ , что для всех  $x$  из промежутка  $I$  будет выполнено равенство
  - $\Phi(x) = F(x) + C$ .
  - **Доказательство.**
    - 1) по условию функции  $F$  - первообразная для  $f$  на промежутке  $I$ . Следовательно,  $F'(x)=f(x)$  для любого  $x \in I$ , поэтому
      - $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$ ,
    - т.е.  $F(x) + C$  - первообразная для  $f$ .
    - 2) пусть  $\Phi(x)$  - одна из первообразных для функции  $f$  на том же промежутке  $I$ , т.е.  $\Phi'(x)=f(x)$  для всех  $x \in I$ . Тогда
      - $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
      - Отсюда следует в силу признака постоянства функции, что разность  $\Phi(x) - F(x)$  есть функция, принимающая некоторое постоянное значение  $C$  на промежутке  $I$ .
      - Таким образом, для всех  $x$  из промежутка  $I$  справедливо равенство  $\Phi(x) - F(x) = C$ , что и требовалось доказать.



# 1.3 три правила нахождения первообразных

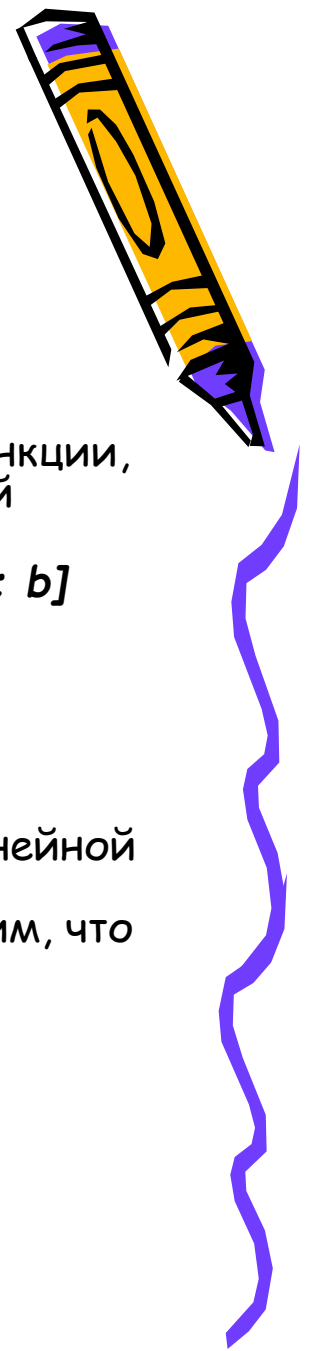


- **Правило 1.** если  $F$  есть первообразная для  $f$ , а для  $G$  - первообразная для  $g$ , то  $F+G$  есть первообразная для  $f+g$ .
- Действительно, так как  $F'=f$  и  $G'=g$ , по правилу вычисления производной суммы имеем:
- $(F+G)' = F' + G' = f + g$ .
- **Правило 2.** если  $F$  есть первообразная для  $f$ , а  $k$  - постоянная, то функция  $kF$  - первообразная для  $kf$ .
- Действительно, постоянный множитель можно выносить за знак производной, поэтому:
- $(kF)' = kF' = kf$ .
- **Правило 3.** если  $F(x)$  есть первообразная для  $f(x)$ , а  $k$  и  $b$  - постоянные, причем  $k \neq 0$ , то  $F(kx+b)$  есть первообразная для  $f(kx+b)$ .
- Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции имеем:
- $(F(kx+b))' = F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b)$



# интеграл

## 2.1. площадь криволинейной трапеции

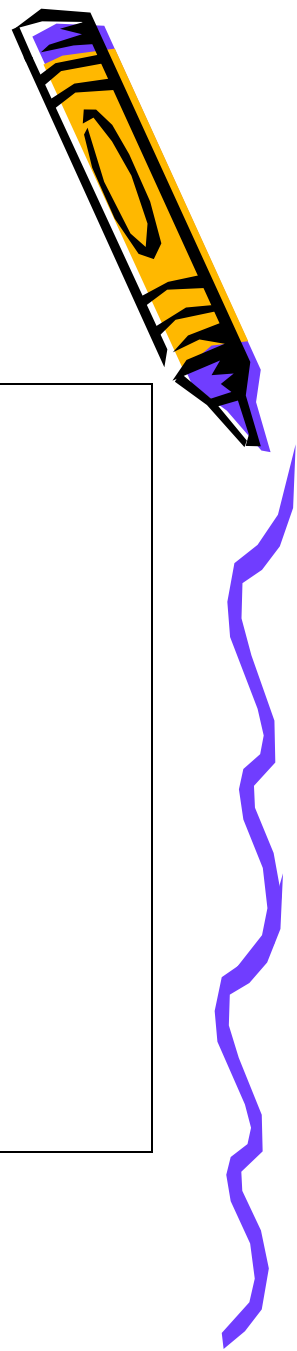


- Пусть на отрезке  $[a; b]$  оси  $OX$  задана непрерывная функция  $f$ , не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком  $[a; b]$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , называют криволинейной трапецией.
- **Теорема.** Если  $f$  - непрерывная и неотрицательная на отрезке  $[a; b]$  функция, а  $F$  - ее первообразная на этом отрезке, то площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке  $[a; b]$ , т.е.
  - $S = F(b) - F(a)$ .
- **Доказательство.** Рассмотрим функцию  $S(x)$ , определенную на отрезке  $[a; b]$ . Если  $a < x < b$ , то  $S(x)$  - площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $x_0$  (рис. 1). Если  $x = a$ , то  $S(a) = 0$ . Отметим, что  $S(b) = S$  - площадь криволинейной трапеции).
- Докажем, что
  - $S'(x_0) = f(x_0)$ .

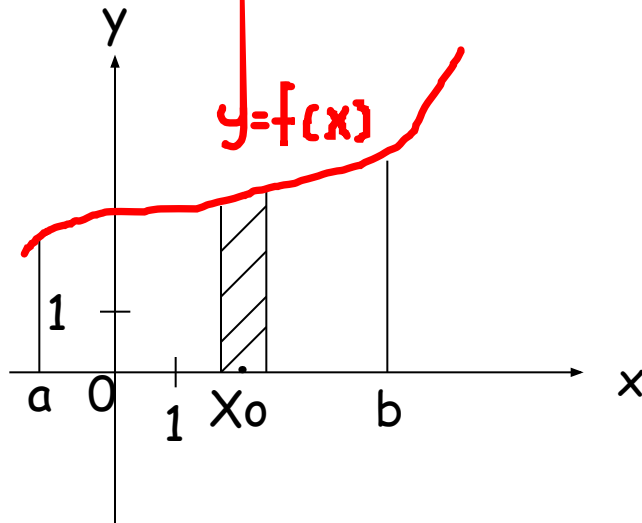


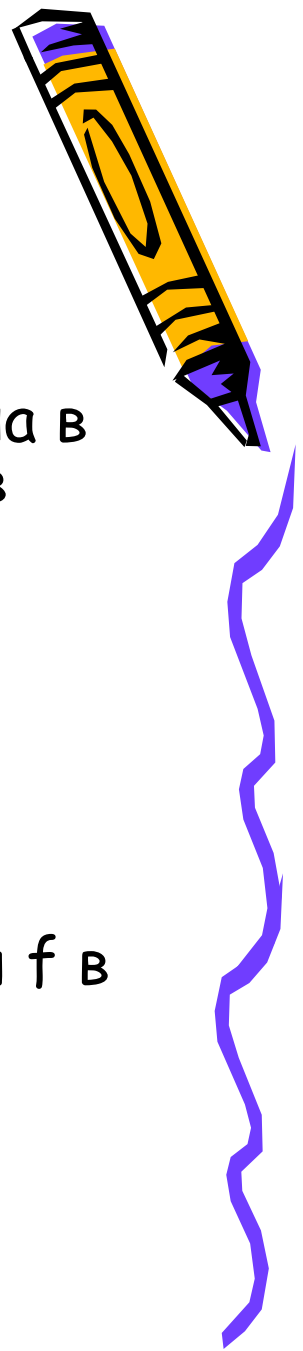


# 2.1 площадь криволинейной трапеции...



• Рис.1



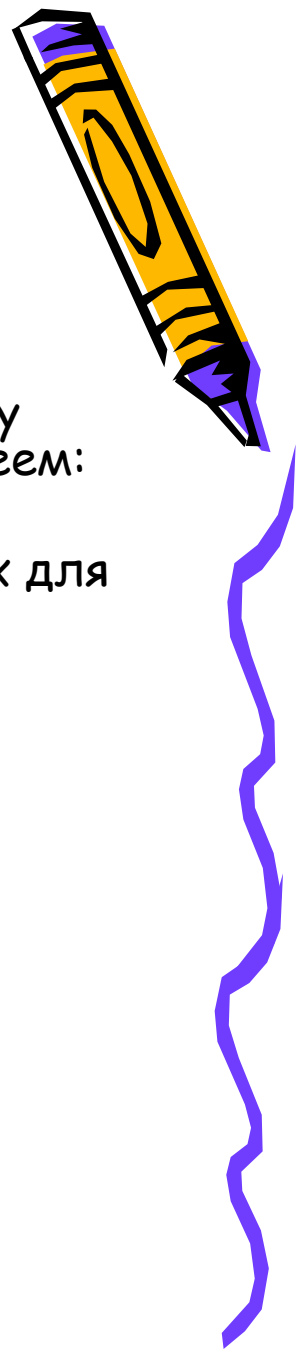


## 2.1 площади криволинейной трапеции...

- Пусть  $x_0$  принадлежит  $[a, b]$ .  $f(x)$  непрерывна в  $x_0$ . Тогда в достаточно малой окрестности в точке  $x_0$  функцию  $f(x)$  можно считать постоянной и равной  $f(x_0)$ .
- Тогда приращение равно площади приближенно равно:  $f(x) \cdot \Delta x$
- $\Delta S : \Delta x = f(x)$
- Если  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta S : \Delta x \rightarrow S'(x_0)$
- $S'(x_0) = f(x_0)$  т.е  $S$  - первообразная функции  $f$  в точке  $x_0$

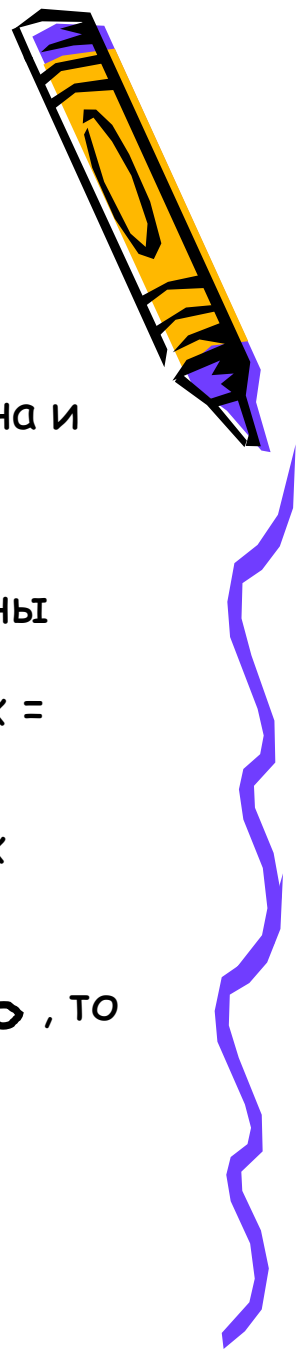


# 2.1 площадь криволинейной трапеции



- Получили, что  $S$  есть первообразная для  $f$ . Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех  $x \in [a; b]$  имеем:
  - $S(x) = F(x) + C,$
- Где  $C$  - некоторая постоянная, а  $F$  - одна из первообразных для функции  $f$ . Для нахождения  $C$  подставим  $x = a$ :
  - $F(a) + C = S(a) = 0,$
- Откуда  $C = -F(a)$ . Следовательно,
  - $S(x) = F(x) - F(a).$
- Поскольку площадь криволинейной трапеции равна  $S(b)$ , подставляя  $x = b$  в формулу  $S(x) = F(x) - F(a)$ , получим:
  - $S = S(b) = F(b) - F(a).$





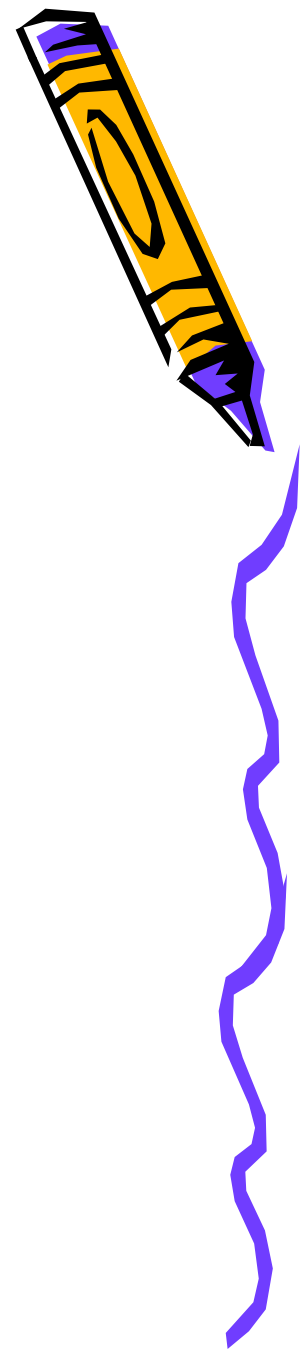
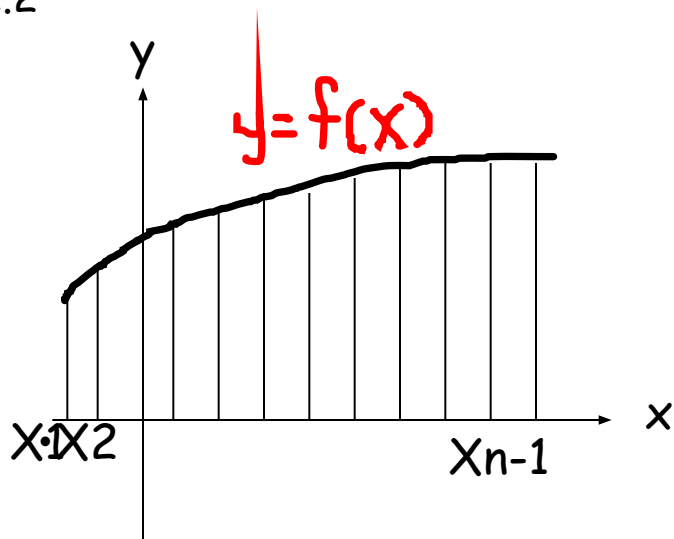
## 2.2 Интеграл. Формула Ньютона - Лейбница

- **Понятие об интеграле.** Пусть функция  $f$  неотрицательна и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , тогда площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.
- Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  отрезков одинаковой длины точками
- $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , и пусть  $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ , где  $k = 1, 2, \dots, n-1, n$ . На каждом из отрезков  $[x_{k-1}; x_k]$  как на основании построим прямоугольник высотой  $f(x_{k-1})$ . Сумма площадей всех таких прямоугольников (рис.2) равна:
- $S_n = \Delta x (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))$ .
- Т.к  $f(x)$  непрерывная функция, то при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т.е.  $n \rightarrow \infty$ , то  $S_n \rightarrow S$



# 2.2

• Рис.2

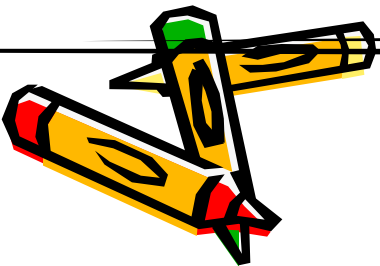


## 2.2



- Для любой непрерывной функции на отрезке  $[a, b]$  доказано, что  $S_n \rightarrow S$  к некоторому числу. Это число называют интегралом функции.
- $\int_a^b f(x) dx$ , где  $f(x)$  подинтегральная функция,  $a$  - нижний предел интегрирования,  $b$  - верхний,  $\int$  - интеграл,  $x$  - переменная. Интеграл - это предел интегрирования сумм. Сравнивая  $S = F(b) - F(a)$  и  $S = \int_a^b f(x) dx$ , можно записать

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



## 2.2

- Эта формула называется *формулой Ньютона - Лейбница*. Она верна для любой функции  $f$ , непрерывной на отрезке  $[a; b]$ .



# 1.6 Таблица первообразных



Производная функции $f'(x)$	Функция $f(x)$	Первообразная функции $F(x) + C$
0	1	$x$
0	$k$ (число)	$kx$
1	$x$	$\frac{x^2}{2}$
$k$	$kx + b$	$k\frac{x^2}{2} + bx$
$2x$	$x^2$	$\frac{x^3}{3}$
$2ax + b$	$ax^2 + bx + c$	$\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx$
$3x^2$	$x^3$	$\frac{x^4}{4}$





# 1.6 Таблица первообразных



$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$nx^{n-1}$	$x^n, n \neq 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-k\sin kx$	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx$
$k\cos kx$	$\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx$
$-\frac{k}{x^2}$	$\frac{k}{x}$	-
$-\frac{2k}{x^3}$	$\frac{k}{x^2}$	$-\frac{k}{x}$

