

Интегрирование рациональных функций

- Дробно - рациональная функция
- Простейшие рациональные дроби
- Разложение рациональной дроби на простейшие дроби
- Интегрирование простейших дробей
- Общее правило интегрирования рациональных дробей

Дробно - рациональная функция

Дробно – рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлен степени m числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$, в многочлен степени n противном случае дробь называется **неправильной**.

Всякую неправильную рациональную дробь можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и **правильной рациональной дроби**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Дробно - рациональная функция

Привести неправильную дробь к правильному виду: $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x + 9 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{x^4 - 2x^3} \quad \boxed{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{2x^3 - 5x + 9} \\ 2x^3 - 4x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{4x^2 - 5x + 9} \\ 4x^2 - 8x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{3x + 9} \\ 3x - 6 \end{array}$$

$\boxed{15}$

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x - 2} + \frac{15}{x - 2}$$

Простейшие рациональные дроби

Правильные рациональные дроби вида:

$$(I) \quad \frac{A}{x - a}$$

$$(II) \quad \frac{A}{(x - a)^k} \quad (k \geq 2; k \in N)$$

$$(III) \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (p^2 - 4q < 0)$$

$$(IV) \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} \quad (p^2 - 4q < 0; \quad k \geq 2; k \in N)$$

Называются **простейшими рациональными дробями** I, II, III, IV типов.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Теорема Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители:

$$Q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)^k \cdot \square \cdot (x^2 + p_1x + q_1) \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^s$$

можно представить, притом единственным образом в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A}{x - x_1} + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \square + \frac{B_k}{(x - x_2)^k} \\ & + \frac{Cx + D}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \\ & + \square + \frac{M_sx + N_s}{(x^2 + p_2x + q_2)^s} \end{aligned}$$

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2} + \frac{B_3}{(x-3)^3}$$

$$\frac{x^3 + 3}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

$$\frac{7x^2 + 8x + 9}{(x-4)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + x + 1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C, D, \dots применяют два метода: **метод сравнения коэффициентов** и **метод частных значений переменной**. Первый метод рассмотрим на примере.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Представить дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5}$$

$$\frac{A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$$

Придем простейшие дроби к общему знаменателю

$$(x-1)(x^2 - 2x + 5)$$

$$Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx - Bx - C = 2x^2 - 3x - 3$$

Приравняем числители полученной и исходной дробей

$$x^2 \left\{ \begin{array}{l} A + B = 2 \\ -2A + C - B = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$x^1 \left\{ \begin{array}{l} -2A + C - B = -3 \\ 5A - C = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B = 3 \\ C = -2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$x^0 \left\{ \begin{array}{l} 5A - C = -3 \\ C = -2 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C = -2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

$$\text{I} \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

$$\text{II} \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) =$$
$$= \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

$$\text{III} \quad \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.

Интегрирование простейших дробей

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{(x^2+2x)+10} dx &= \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9} dx = \\ &= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx = \left. \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = \\ &= \int \frac{3t-2}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2+9} - 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - \\ &- \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = \frac{3}{2} \ln|t^2+9| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+10| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C \end{aligned}$$

Интегрирование простейших дробей

$$\text{IV} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

Интеграл данного типа с помощью подстановки: $x + \frac{p}{2} = t$
приводится к сумме двух интегралов:

$$M \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k} + N \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$$

Первый интеграл вычисляется методом внесения t под знак дифференциала.

Второй интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} \right)$$

Интегрирование простейших дробей

$$I_3 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^3} \quad a = 1; k = 3 \quad I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot I_1 + \frac{t}{2(2 - 1)(t^2 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2 + 1)}$$

$$I_3 = \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} \cdot I_2 + \frac{t}{2(3 - 1)(t^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2 + 1)} \right) + \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + C$$

Общее правило интегрирования рациональных дробей

- Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
- Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами
- Найти неопределенные коэффициенты методом сравнения коэффициентов или методом частных значений переменной.
- Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

Приведем дробь к
правильному виду.

$$\begin{array}{r} x^5 + 2x^3 + 4x + 4 \mid x^3 + 2x^2 + x \\ \hline x^5 + 2x^4 + x^3 \end{array}$$

$$- 2x^4 + x^3 + 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} - \\ - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 \end{array}$$

$$- 5x^3 + 2x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} - \\ 5x^3 + 10x^2 + 5x \end{array}$$

$$- 8x^2 - x + 4$$

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} = x^2 - 2x + 5 + \frac{-8x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Пример

$$\frac{-8x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{-8x^2 - x + 4}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$

Представим дробь в виде
Разложим знаменатель суммы частных дробей
суммы частных дробей
правильной дроби на

$$A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = -8x^2 - x + 4$$

множителю

$$\begin{array}{l|l} x=0 & A=4 \\ x=-1 & -C=-3 \\ x=1 & 4A+2B+C=-5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-12 \\ C=3 \end{cases}$$

Найдем неопределенные
коэффициенты методом

частных значений переменной

$$\frac{-8x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{4}{x} - \frac{12}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

Пример

$$I = \int x^2 - 2x + 5 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} dx =$$

$$\int x^2 dx - 2 \int x dx + 5 \int dx + 4 \int \frac{dx}{x} - 12 \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + 4 \ln|x| - 12 \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C$$