Интерполирование функций

Постановка задачи:

Функция задана таблично:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

(1)

Вычислить: $y(x^*)$,

$$x^* \neq x_i \qquad (2)$$

$$x^* \in [x_0, x_n]$$

$\{x_0, x_1, .., x_n\}$ -сетка или узлы интерполирования

Постановка задачи:

Построим функцию $\varphi(x)$ -интерполяционную функцию,

удовлетворяющую условию:

$\varphi(x_i) = y_i,$ - условие интерполяции

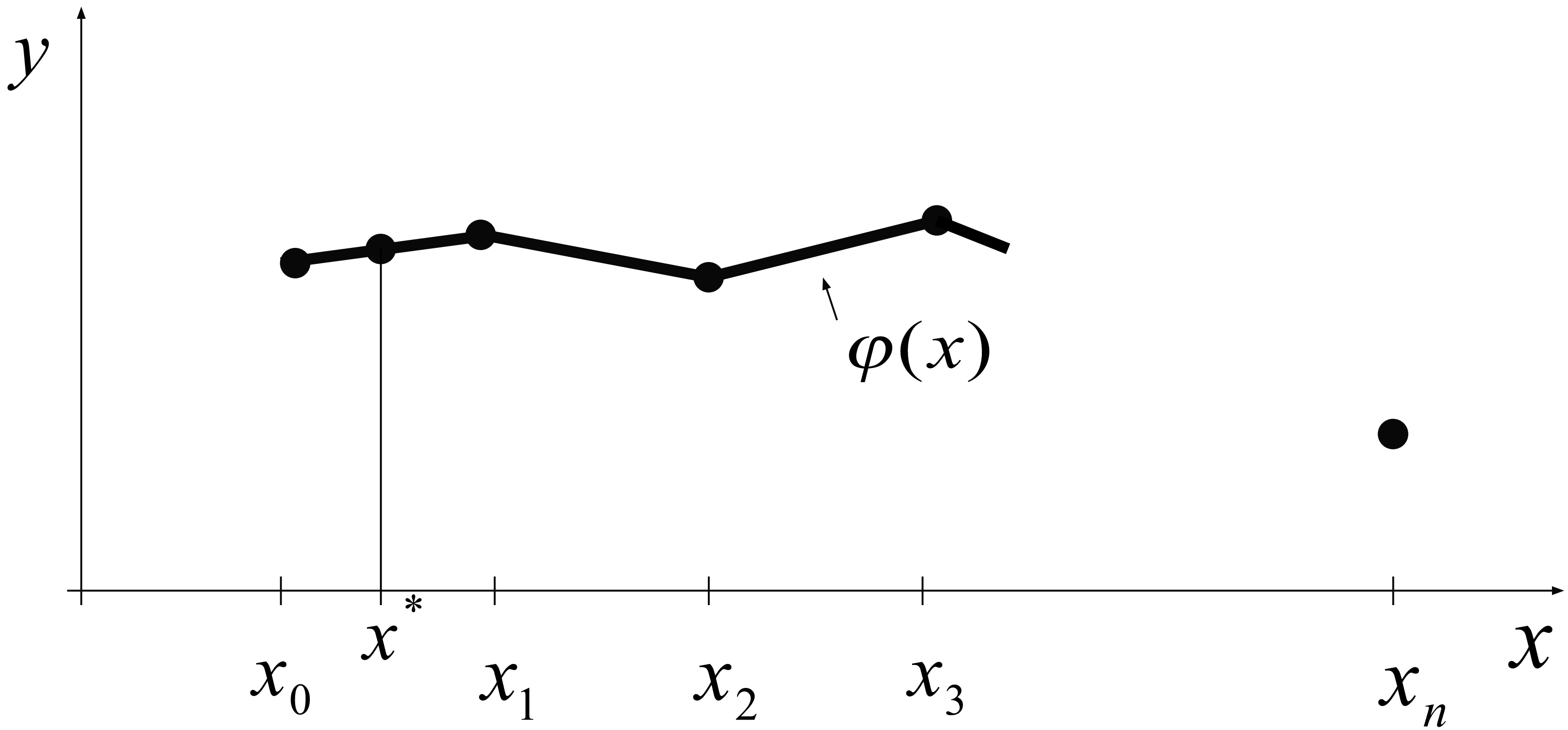
$i = \overline{0, n}$

тогда

$$y(x^*) \overset{\textbf{считать}}{=} \varphi(x^*)$$

Линейная интерполяция

Функция $y(x)$ аппроксимируется на каждом частичном отрезке прямой.



Расчетные формулы линейной интерполяции

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} \qquad (4)$$

$$y = y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(y_{i+1} - y_i) \qquad (5)$$

Квадратичная интерполяция

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$x \in [x_{i-1}, x_{i+1}];$$

$$\begin{cases} \varphi(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ \varphi(x_i) = y_i \\ \varphi(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases}$$ - условие интерполирования

Получение расчетных формул

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-1}^2 = y_{i-1} \\ a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 = y_i \\ a_0 + a_1 x_{i+1} + a_2 x_{i+1}^2 = y_{i+1} \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 \\ 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 \end{vmatrix} \neq 0$$ - определитель Вандермонда

a_0, a_1, a_2 - неизвестные переменные

Алгоритм

1. Определить отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$,содержащий x^*

2. Решить систему (6), для определения:

a_0, a_1, a_2

3. Подставить x^* в функцию $\varphi(x)$ при известных

коэффициентах a

Глобальная интерполяция алгебраическими многочленами

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (7)$$

$\varphi(x_i) = y_i$ - условие интерполирования (8)

$i = \overline{0, n}$

(8) – СЛАУ из (***n***+***1***) уравнения с определителем

Вандермонда $\neq 0 \ \Rightarrow$

(7) существует и единственно

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = c_0(x)y_0 + c_1(x)y_1 + \ldots + c_n(x)y_n \quad (1)$$

$c_i(x)$ - многочлены ***n***-ой степени

$y_0, y_1, \ldots, y_n$ - значения функций из таблицы

$L_n(x_i) = y_i$ - условия интерполирования (2)

$i = \overline{0, n}$

Построение многочленов $c_i(x)$

$$\begin{cases} c_0(x_0)y_0 + c_1(x_0)y_1 + \ldots + c_n(x_0)y_n = y_0 \\ c_0(x_1)y_0 + c_1(x_1)y_1 + \ldots + c_n(x_1)y_n = y_1 \\ \ldots \\ c_0(x_n)y_0 + c_1(x_n)y_1 + \ldots + c_n(x_n)y_n = y_n \end{cases}$$

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \qquad (3)$$

Построение многочленов $c_i(x)$ (продолжение)

$$c_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)\lambda \qquad (4)$$

$$\lambda = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \qquad (5)$$

$$c_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \qquad (6)$$

Вид интерполяционного многочлена Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \qquad (7)$$

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \qquad (8)$$

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) = \frac{\omega(x)}{x - x_i} \qquad (9)$$

Запись интерполяционного многочлена Лагранжа через ω

$$\omega'(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \qquad (10)$$

$$\omega'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) \qquad (11)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x)} \qquad (12)$$

Частные случаи интерполяционного многочлена Лагранжа

а) линейная интерполяция через точки $(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{y_i})$, $(\boldsymbol{x_{i+1}},\boldsymbol{y_{i+1}})$

$$L_1(x) = y_i\,\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1}\,\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$L_1(x) = y$$

$$y = y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(y_{i+1} - y_i)$$

$$y = y_i + y_{i+1}\,\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - y_i\,\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = y_i\left(\frac{x_{i+1} - x_i - x + x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) + y_{i+1}\,\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} =$$

$$= y_i\,\frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1}\,\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

б) квадратичная интерполяция через точки $(\boldsymbol{x_{i-1}},\boldsymbol{y_{i-1}})$, $(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{y_i})$, $(\boldsymbol{x_{i+1}},\boldsymbol{y_{i+1}})$

$$L_2(x) = y_{i-1}\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_i)} + y_i\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} +$$

$$+\, y_{i+1}\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

Погрешность интерполирования

$r_n(x) \overset{\text{обозн.}}{=} y(x) - L_n(x)$ - остаточный член формулы Лагранжа

$$g(s) = y(s) - L_n(s) - k\omega(s) \qquad (13)$$

Функция $g(s)$ имеет *(n+1)* нулей $s = x_i, i = \overline{0, n}$

требуем $g(x) = 0$

следовательно, *(n+2)* нуля

$$g^{(n+1)}(s) = y^{(n+1)}(s) - k(n+1)! \qquad (14)$$

Пусть $s = \xi \quad \Rightarrow \quad g^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$g^{(n+1)}(\xi) = y^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0 \qquad k = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Погрешность интерполирования (продолжение)

Из (13) получим, что

$$k = \frac{y(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

$$\frac{r_n(x)}{\omega(x)} = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$r_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

Верхняя оценка погрешности $r_n(x)$

$$\left| r_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\omega(x) \qquad (15)$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} \left| y^{(n+1)}(x) \right|$$

Сходимость интерполяционного процесса

Определение: равномерная сходимость означает, что

$|r_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$

Определение: говорят, что интерполяционный процесс для функции $\boldsymbol{y(x)}$ сходится в точке $x^* \in [x_0, x_n]$, если существует

$$\lim_{n \to \infty} L_n(y(x^*)) = y(x^*)$$

Интерполяционная формула Ньютона

Разделенными разностями первого порядка называются отношения:

$$y(x_i;x_j) = \frac{y(x_j) - y(x_i)}{x_j - x_i} \qquad i, j = \overline{0,n} \quad i \neq j \qquad (1)$$

По разделенным разностям первого порядка можно построить разделенные разности второго порядка:

$$y(x_i;x_{i+1};x_{i+2}) = \frac{y(x_{i+1};x_{i+2}) - y(x_i;x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} \qquad (2)$$

Таблица разделенных разностей

x	y	**первая разделенная разность**	**вторая разделенная разность**	…	**n-ая разделенная разность**
x_0	y_0			…	
		$y(x_0;x_1)$		…	
x_1	y_1		$y(x_0;x_1;x_2)$	…	
		$y(x_1;x_2)$	…	…	$y(x_0;\ldots;x_n)$
x_2	y_2	….	…	…	
…	….		$y(x_{n-2};x_{n-1};x_n)$	…	
…	….	$y(x_{n-1};x_n)$		…	
x_n	y_n			…	

Интерполяционные многочлены Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)y(x_0;x_1) + (x - x_0)(x - x_1)y(x_0;x_1;x_2) +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)y(x_0;x_1;x_2;x_3) + \ldots + \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)y(x_0;x_1;\ldots;x_n) \tag{3}$$

$$\overline{P_n(x)} = y_n + (x - x_n)y(x_{n-1};x_n) + (x - x_n)(x - x_{n-1})y(x_{n-2};x_{n-1};x_n) +$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})y(x_{n-3};x_{n-2};x_{n-1};x_n) + \ldots + \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)y(x_0;x_1;\ldots;x_n) \tag{4}$$