

Муниципальное общеобразовательное учреждение  
«Лермонтовская средняя общеобразовательная  
школа»

---

Тема: **«Инверсия»**

**научно – исследовательская работа  
по математике.**

Автор: Карбовская Елена

Класс: 10

Руководитель:

Долид Наталья  
Николаевна

# Содержание

1. Введение
2. Определение и свойства инвертных точек.
3. Метод инверсии.
  - 3.1. Инверсия относительно оси ОХ.
  - 3.2. Построение графиков  $y=1/f(x)$ .
  - 3.3. Построение графиков  $y= ax^2 + bx + c$  в зависимости от коэффициентов  $a, b, c$ .
4.
  - 4.1. Инверсия относительно оси ОУ
  - 4.2. Построение графиков  $y = f(1/x)$
5. Применение инверсии в решении уравнений с параметром графическим способом.
6. Список литературы.

# 1. Введение

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = \frac{1}{x^2 + 4}$$

$$y = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{\sin x}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{x+1}} + 3$$

***Инверсия*** - изменение нормального положения компонентов, расположение их в обратном порядке. (Толковый словарь С.И. Ожегова).

***Инверсия*** (от лат. Inversion – переворачивание, перестановка) – термин, относящийся к перестановкам в математике.

# Цель работы:

---

*Изучить метод инверсии  
и его применение при  
построении графиков  
функций и графическом  
решении уравнений с  
параметром.*

# *Задачи:*

1. Знакомство с методом инверсии.
2. Рассмотрение инверсии относительно прямой, осей координат.
3. Изучение свойств инверсии.
4. Практическое применение инверсии при построении графиков и решении уравнений.

# *Достоинства способа:*

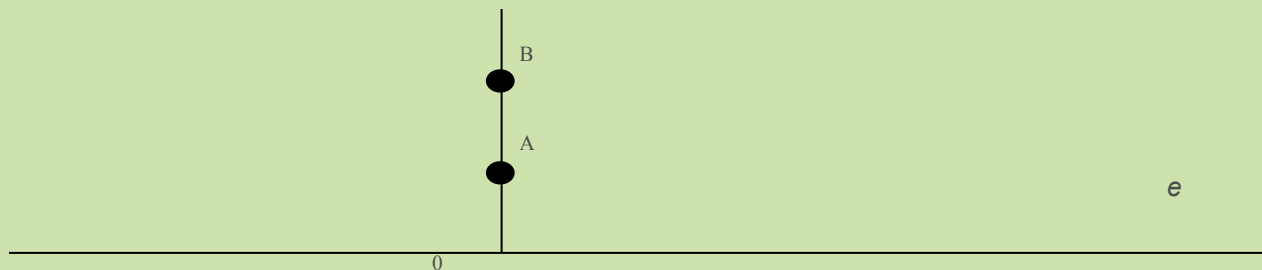
---

- он помогает приобрести навык построения графиков функций;
- он помогает усвоению таких важных свойств функций как монотонность, экстремум, знакопостоянство, четность;
- график функции — ее «портрет», поэтому данный способ помогает лучше увидеть свойства функции и решать уравнения с параметрами.

## 2. Определение и свойства инвертных точек.

Точка В называется *инвертной* точке А относительно прямой (оси) е, если:

- 1) эти точки лежат по одну сторону относительно е;
- 2) отрезок, их соединяющий, перпендикулярен оси е;
- 3) произведение расстояний от этих точек до е равно 1 ( $OA \cdot OB = 1$ )
- 4) для точек оси е инвертных нет.





Преобразование плоскости, при котором каждая точка переходит в инвертную ей относительно данной прямой, называется ***инверсией***. Для точек этой прямой преобразование не определяется.

## 3. Метод инверсии.

### 3.1. Инверсия относительно оси $Ox$ .

Рассмотрим инверсию относительно оси  $Ox$ .

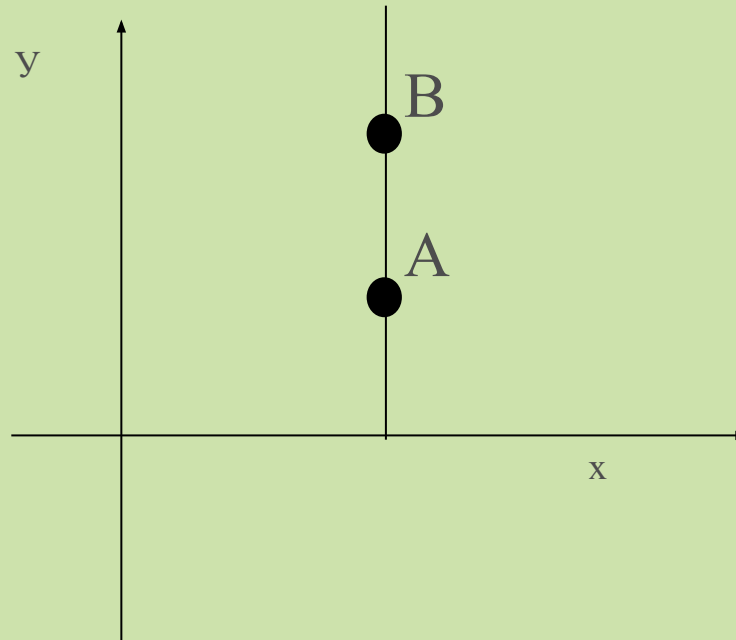


График функции  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  получается из графика функции  $y=f(x)$  инверсией относительно оси  $OX$ .

$$(x ; y) \longrightarrow (x ; \frac{1}{y})$$

# Свойства инверсии относительно оси $Ox$

1. Если  $f(x) > 0$ , то  $> 0$ .

Если  $f(x) < 0$ , то  $< 0$ .

2. Если  $y=f(x)$  имеет корни  $x= x_1, \dots$ , т.е.  $f(x)=0$ , то  $g(x)=\frac{1}{f(x)}$  имеет вертикальные асимптоты  $x=x_1, \dots$

3. Если у графика функции  $y=f(x)$  есть горизонтальная асимптота  $y=0$ , то  $\frac{1}{f(x)}$  имеет асимптоту  $y=0$ .

Если у графика функции  $y=f(x)$  есть горизонтальная асимптота  $y=b$  при  $x \rightarrow \infty$  то график функции  $g(x)=\frac{1}{f(x)}$  будет иметь горизонтальную асимптоту  $y=\frac{1}{b}$ .

4. Если  $f(-x) = f(x)$ , то  $g(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)} = g(x)$

Если  $f(-x) = -f(x)$ , то  $g(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{-f(x)} = -g(x)$ .

5. Если  $f(x)$  – периодическая функция, то  $\frac{1}{f(x)}$  – периодическая функция.

6. Если  $f(x)$  сохраняет знак на множестве  $X$  и возрастает на нем, то  $\frac{1}{f(x)}$  убывает на этом множестве.

Если  $f(x)$  сохраняет знак на множестве  $X$  и убывает на нем, то  $\frac{1}{f(x)}$  возрастает на этом множестве.

7. Наибольшее значение функции изменяется и становится наименьшим, и наоборот. Максимум становится минимумом, и наоборот

8. Если при  $x \rightarrow \infty$   $f(x) \rightarrow 0$ , то в графике инверсии  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$ .

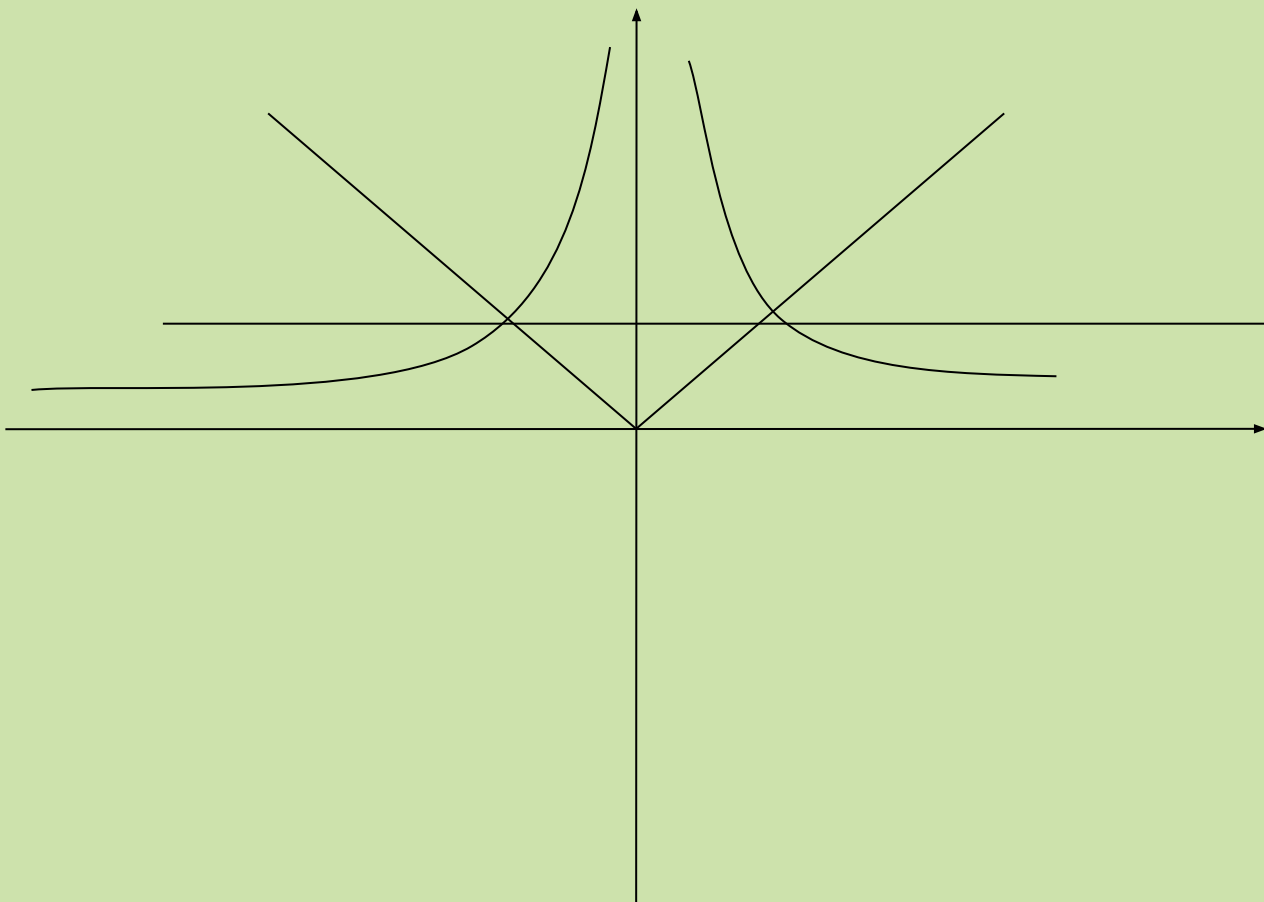
Если при  $x \rightarrow \infty$   $f(x) \rightarrow \infty$ , то в графике инверсии  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$ .

## 3.2. Построение графиков $y=1/f(x)$ .

### ***Алгоритм построения:***

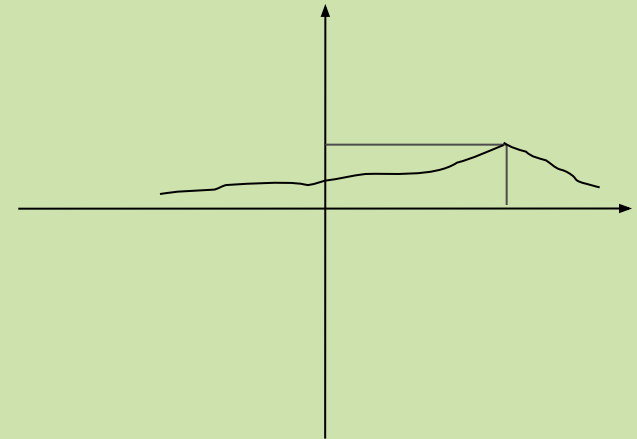
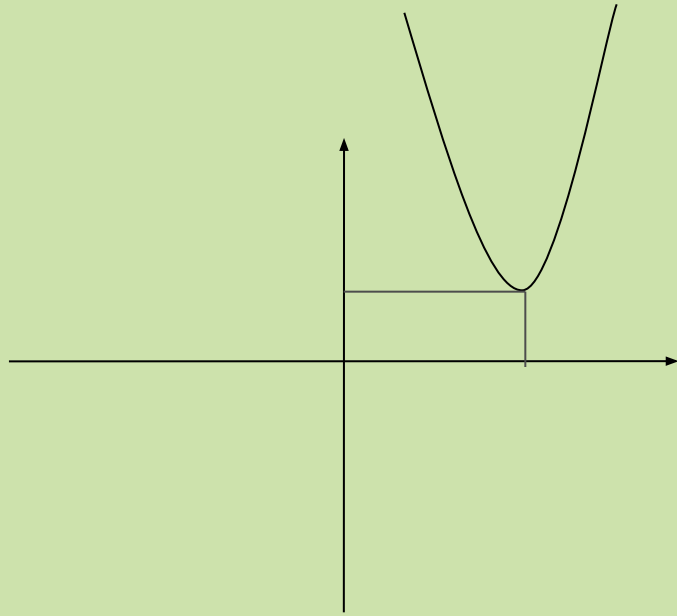
1. Строим график функции  $y=f(x)$ .
2. Через точки пересечения графика функции  $y=f(x)$  с осью  $OX$  проводим вертикальные асимптоты или вынуть из области определения нули функции.
3. Строим вспомогательные прямые  $y=1$ ,  $y=-1$ .
4. Промежутки знакопостоянства сохраняем.
5. Сохраняем четность функции (симметрия графика)
6. Сохраняем периодичность функции.
7. Меняем промежутки возрастания (убывания) на промежутки убывания (возрастания).

$$y = \frac{1}{|x|}$$

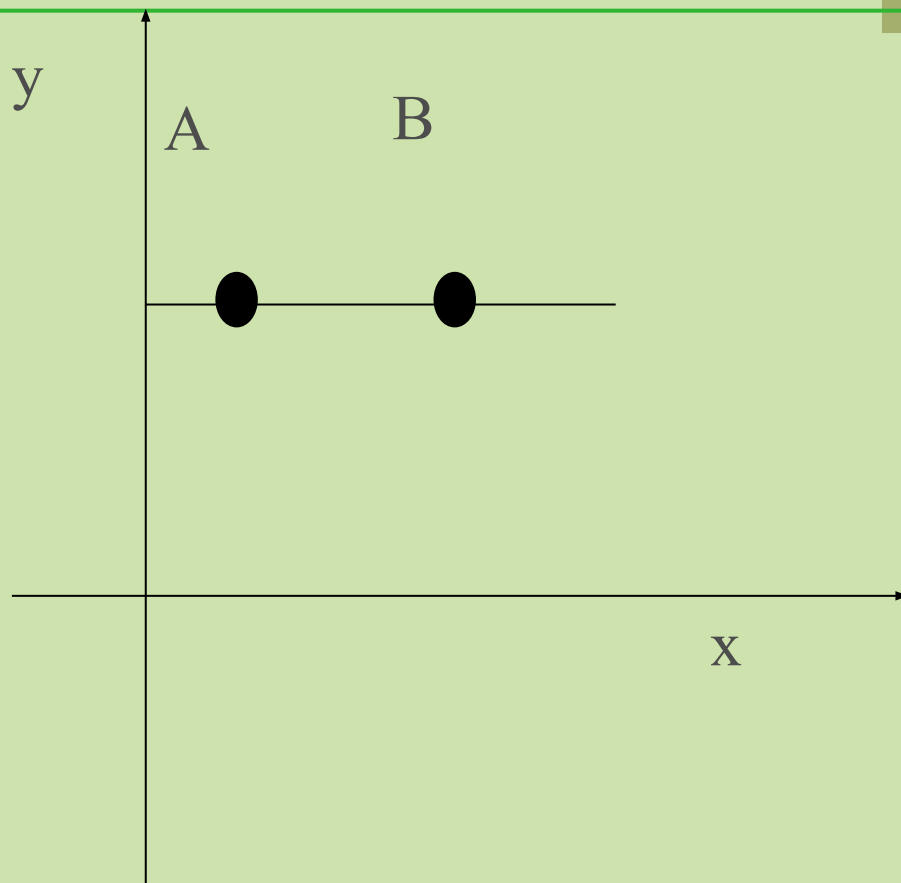




*Построение графиков  $y=1/(ax^2+bx+c)$   
в зависимости от коэффициентов  $a, b, c$ .*



# 4.1. Инверсия относительно оси $OY$



$(x ; y) ($

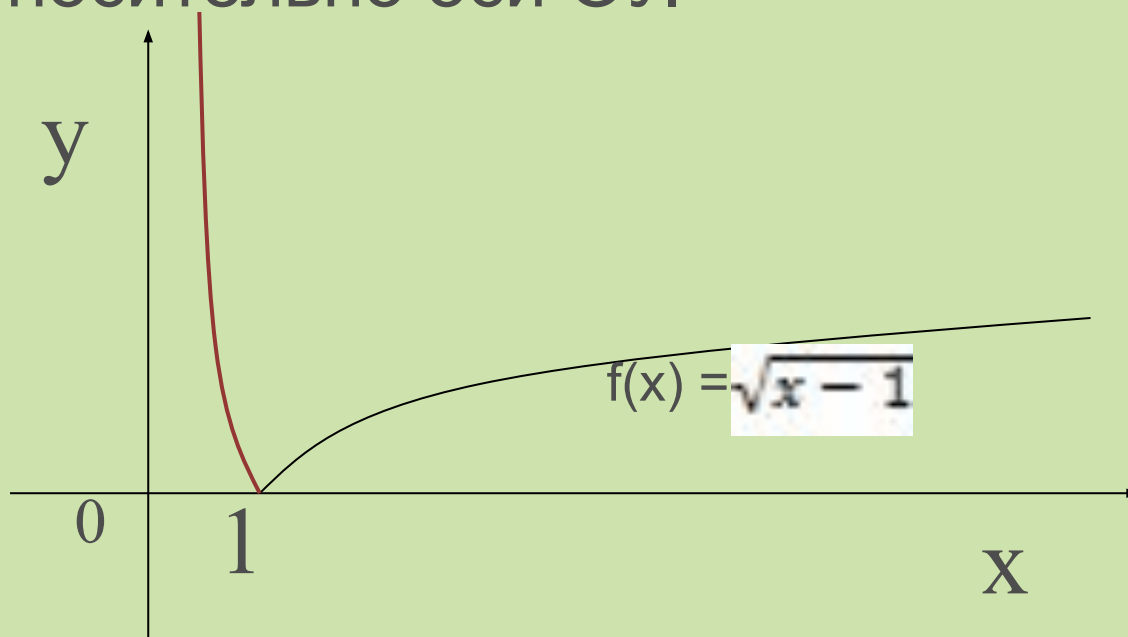
График функции  $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$  получается из графика функции  $y=f(x)$  инверсией относительно оси ОУ.

$$(x ; y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, y\right)$$

у

**Пример 1.** Построить график функции  $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

График этой функции получается из графика функции  $f(x) = \sqrt{x - 1}$  инверсией относительно оси ОУ.



Рассмотренная тема находит свое применение в решении уравнений

с параметрами графическим методом.

Он состоит в построении кривой, определяемой уравнением с параметром:

**5. Применение инверсии в решении уравнений**

$$(a - 1)x^2 - 4(a - 1)x + 3a - 4 = 0$$

**с параметром графическим способом.**  
**Проведем преобразования.**

Рассмотренная тема находит свое применение в решении уравнений с параметрами графическим методом.

Он состоит в построении кривой, определяемой уравнением с параметром:

$$(a - 1)x^2 - 4(a - 1)x + 3a - 4 = 0$$

**Проведем преобразования.**

После преобразования получаем:

$$a = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{1}{x^2 - 4x + 3}.$$

а) при каких значениях параметра  $a$  уравнение не имеет решения;

б) при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет решения разных знаков;

в) при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет корень из отрезка  $[-1; 2]$ ;

г) при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет корень больше 6.

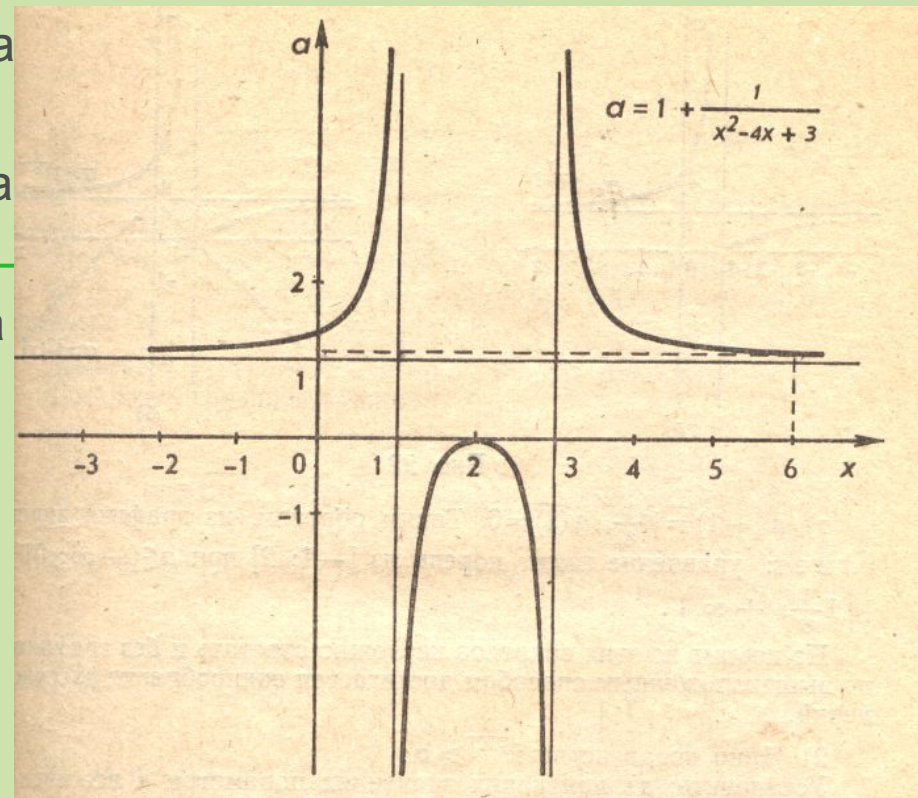
С помощью графика установить:

а) при каких значениях параметра  $a$  уравнение не имеет решения;

б) при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет решения разных знаков;

в) при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет корень из отрезка  $[-1; 2]$ ;

г) при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет корень больше 6.



## Список используемой литературы

---

- А.П. Карп «Даю уроки математики» (М., «Просвещение», 1992)
- Н.Я. Виленкин «Алгебра 9» (учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики). (М., «Просвещение», 1996)
- <http://ru.wikipedia.org/wiki/Инверсия>

СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!