

Лекции по алгебре и началам анализа

10 класс

Лекция №9



Иррациональные уравнения и неравенства

I. Иррациональные уравнения

Методы решения.

1. Возведение в степень.

$$a) \quad \sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример №1. $\sqrt{3 - 3x} = x - 1$

1. Возведение в степень.

$$б) \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример №2.

$$\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x^2 - 2}$$

1. Возведение в степень.

$$в) \quad \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

Пример №3.

$$\sqrt{3x + 4} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - 4}$$

2. Умножение на сопряженное выражение.

Пример №4. $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$

3. Введение вспомогательных переменных.

Пример №5. $x^2 - 4 - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

4. Выделение полного квадрата под знаком радикала.

Пример №7.

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1$$

5. Сужение области поиска корней уравнения за счет нахождения ОДЗ.

Пример №8.

$$\sqrt{5-x} - \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-15} = 2$$

6. Графический метод

Пример №9.

$$\sqrt{25 - x^2} + \sqrt[3]{x - 5} = 2$$

$$y_1 = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y_2 = 2 - \sqrt[3]{x - 5}$$

II. Иррациональные неравенства.

Методы решения.

$$1) \quad \sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Пример №10.

$$\sqrt{2x} > x - 3$$

$$2) \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример №11.

$$\sqrt{2x} < x - 3$$

Пример №12.

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}$$

III. Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.

Пример №13.

$$\sqrt{x^2 - 1} + x = a$$

Пример №14.

$$\sqrt{x + 2} > x + 2$$