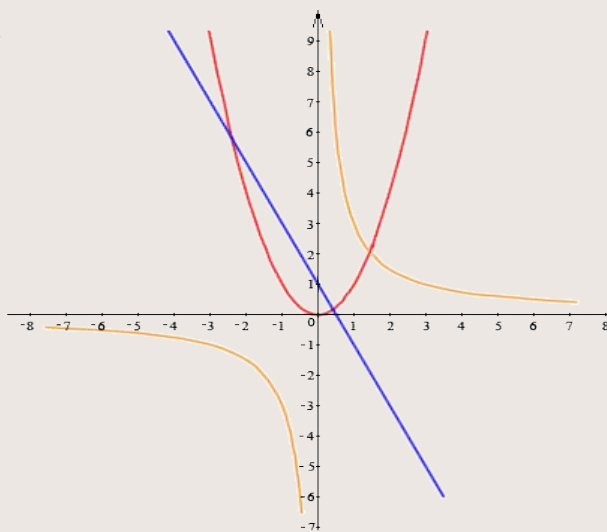


# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ к исследованию функции и построению графика функции

**10 класс**

по УМК А.Г. Мордковича



*Разработано учителем математики*

*МОУ «СОШ» п. Аджером*

*Корткеросского района Республики Коми*

*Мишариной Альбиной Геннадьевной*

# Содержание

- **Определение промежутков возрастания и убывания функции (исследование функции на монотонность)**
- **Нахождение точек экстремума функции**
- **Построение графиков функций**
- **Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции**
- **Работа с графиками функций**
- **Проверь себя**

# **Исследование функции**

**на монотонность**

**(т.е. определение**

**промежутков возрастания**

**и убывания функции).**

**Исследовать функцию на**

**МОНОТОННОСТЬ – ЭТО ЗНАЧИТ**

**ВЫЯСНИТЬ, НА КАКИХ**

**ПРОМЕЖУТКАХ ИЗ ОБЛАСТИ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

**ФУНКЦИЯ ВОЗРАСТАЕТ,**

**А НА КАКИХ – УБЫВАЕТ.**

# Вспомним

○: Функция  $f(x)$  называется возрастающей на промежутке  $I$ ,  
если для любых  $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

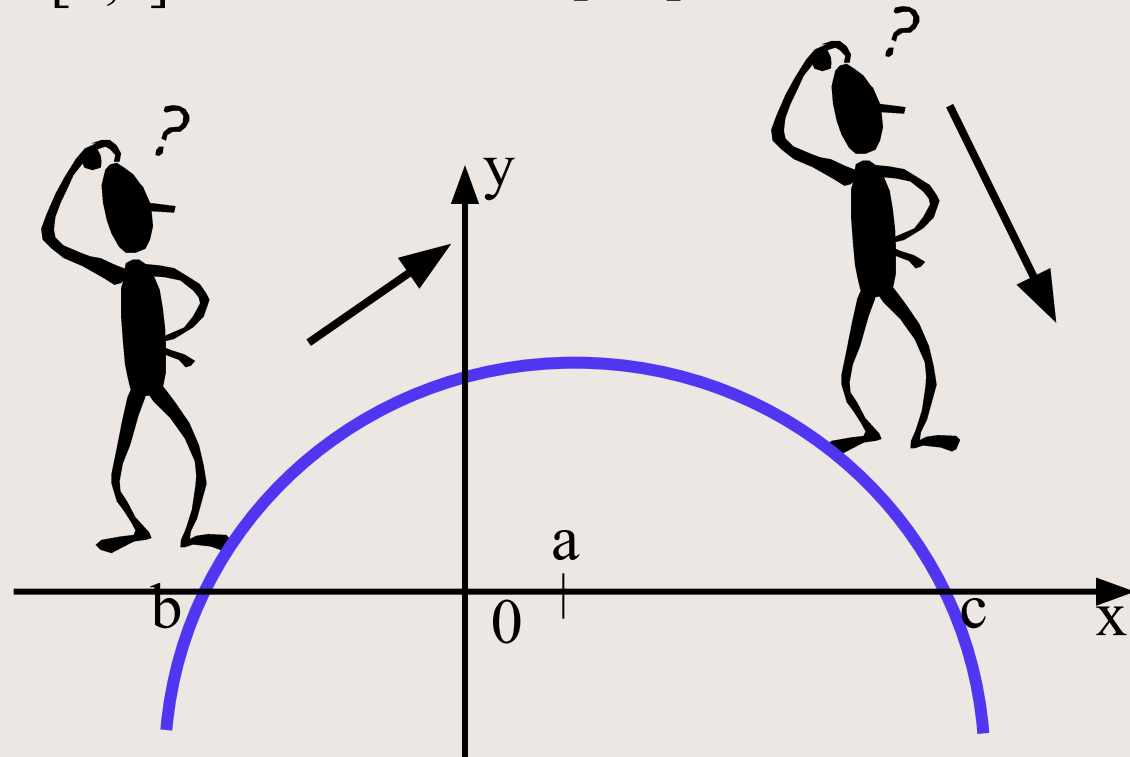
○: Функция  $f(x)$  называется убывающей на промежутке  $I$ ,  
если для любых  $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

○: Функция  $f(x)$  называется монотонной на промежутке  $I$ ,  
если она либо возрастает, либо убывает на этом промежутке.

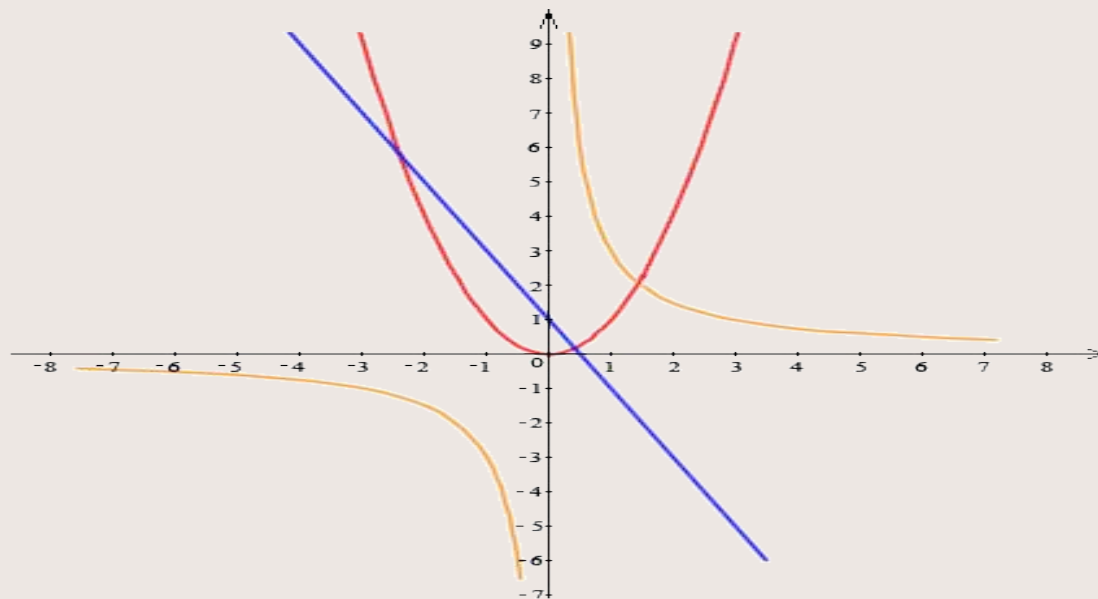
# Возрастание и убывание функции можно изобразить так

Иду в гору. Функция  
*возрастает* на  
промежутке  $[b;a]$

Иду под гору. Функция  
*убывает* на промежутке  
 $[a;c]$



**Для определения промежутков  
возрастания и убывания  
функции можно использовать и  
производную .**



# Теорема:

Если  $f(x)$  – непрерывна на промежутке и имеет  $f'(x)$ , то

а) если  $f'(x) > 0$ , то  $f(x)$  – **возрастает**

б) если  $f'(x) < 0$ , то  $f(x)$  – **убывает**

в) если  $f'(x) = 0$ , то  $f(x)$  – **постоянна**

**(константа)**



# Алгоритм исследования функции на монотонность

- 1) Найти производную функции  $f'(x)$
- 2) Найти стационарные ( $f'(x) = 0$ ) и критические ( $f'(x)$  не существует) точки функции  $y = f(x)$
- 3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
- 4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
- 5) По знаку производной определить промежутки монотонности функции

(если  $f'(x) > 0$  – функция возрастает; если  $f'(x) < 0$  функция убывает; если  $f'(x) = 0$  – функция постоянна)

# Определения

- Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными**.
- Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, называются **критическими**

**Например:** найти промежутки

монотонности функции  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

1)  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

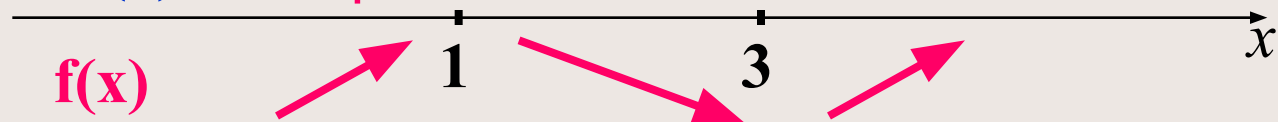
2) Найдем стационарные точки:

$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$f'(x) \quad x = 1 \text{ и } x = 3$$

3)



4)

5)  $f'(x) > 0$ , при  $x \in (-\infty; 1)$  и  $(3; +\infty)$

$f'(x) < 0$ , при  $x \in (1; 3)$

**Ответ:** при  $x \in (-\infty; 1)$  и  $(3; +\infty)$  функция возрастает, а при  $x \in (1; 3)$  - убывает

# Найти промежутки монотонности функции

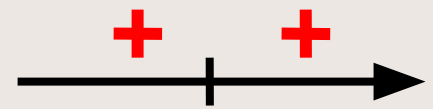
1.  $y = 2x^3 + 3x^2 - 100$

2.  $y = x^3 + 2x^2 + 6$

3.  $y = 5x^2 + 15x - 1$

4.  $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$

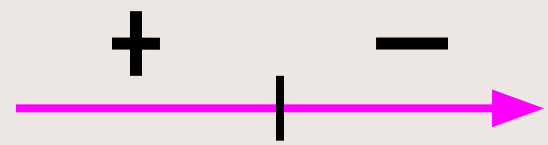
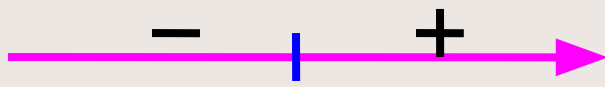
5.  $y = -3x + 6x^2 - 100$



# Нахождение

# точек экстремума

# функции



# Определения

- Точка  $x_0$  называется **точкой минимума** функции  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0)$$

- Точка  $x_0$  называется **точкой максимума** функции  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0)$$

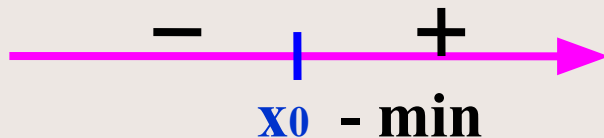
# Определения

- Значение функции в точке максимума обозначают  $U_{\max}$  (но на определенном участке вокруг точки максимума, а не на всей области определения функции – это  $U_{\text{наиб.}}$  )
- Значение функции в точке минимума обозначают  $U_{\min}$  (но это не  $U_{\text{наим.}}$  функции на всей области определения)
- Точки минимума и максимума называются **точками экстремума**

# Теорема

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку  $x = x_0$ . Тогда:

- а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$  выполняется неравенство  $f'(x) < 0$ , а при  $x > x_0$  - неравенство  $f'(x) > 0$ , то  $x_0$  — точка минимума функции  $y = f(x)$





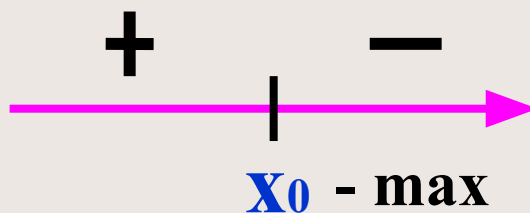
$x_0$

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$

выполняется неравенство  $f'(x) > 0$ , а

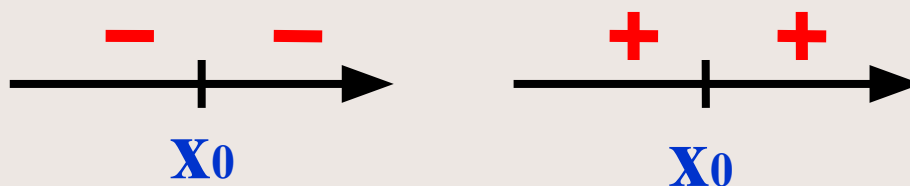
при  $x > x_0$  - неравенство  $f'(x) < 0$ , то

$x_0$  – точка максимума функции  $y = f(x)$



$x_0$

**В)** если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки  $x_0$  знаки производной одинаковы, то в точке  $x_0$  экстремума нет (происходит изменение кривизны графика функции – это точка перегиба)



экстремума нет

# Алгоритм нахождения точек экстремума функции

- 1) Найти производную функции  $f'(x)$
- 2) Найти стационарные и критические точки функции  $y = f(x)$
- 3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
- 4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
- 5) Если  $f'(x_0)$  при переходе через точку меняет знак с «+» на «-», то эта точка – **точка максимума**. Если  $f'(x_0)$  при переходе через точку меняет знак с «-» на «+», то эта точка – **точка минимума**. Если  $f'(x_0)$  не меняет знак, то в этой точке экстремума нет (это точка перегиба).

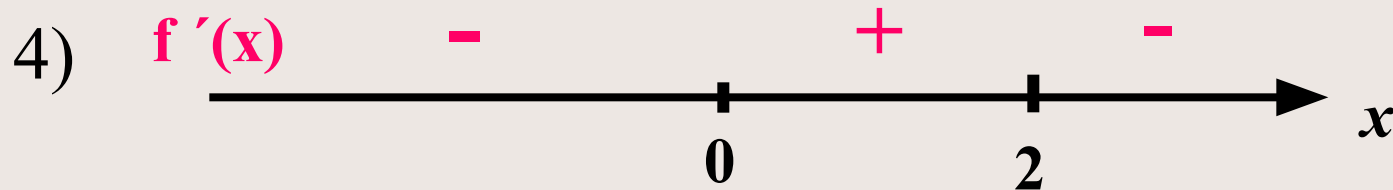
# Например: найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

Решение. 1)  $y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x =$   
 $= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x - 2)^2$

2)  $y' = 0$  при  $x = 0$  и  $x = 2$  (стационарные точки)

3)



5) Значит:  $x = 0$  – точка минимума,  
 $x = 2$  – точка максимума.

# Найдите точки экстремума функции и определите их характер

1)  $y = 7 + 12x - x^2$

2)  $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$

3)  $y = -2x^3 + 21x^2 + 19$

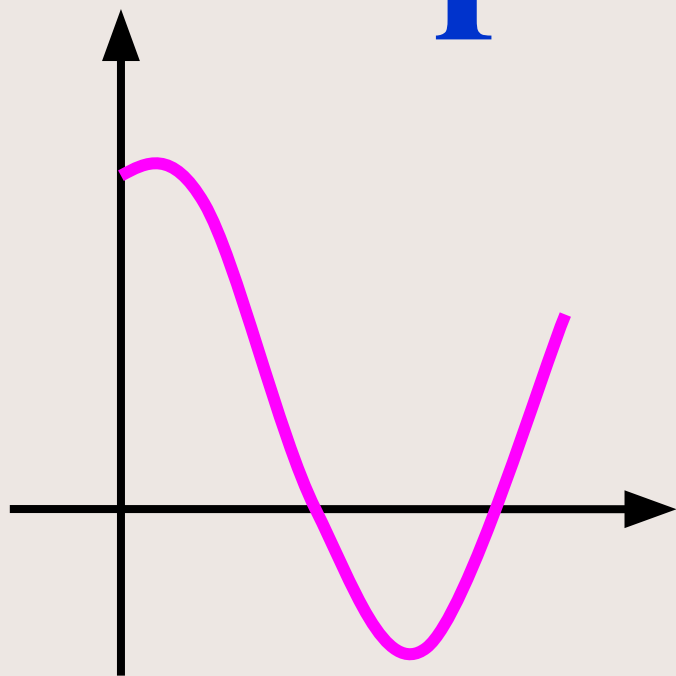
4)  $y = 3x^2 - x^3$

5)  $y = x + 4/x$

# Построение

# графиков

# функций



**В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции или когда заранее трудно представить вид графика, используют следующий алгоритм:**

# **План построения графика функции с помощью производной**

- 1) Найти область определения функции и определить точки разрыва если они существуют**
- 2) Выяснить является ли функция чётно или нечётной, проверить её на периодичность**
- 3) Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно**
- 4) Найти стационарные и критические точки**
- 5) Найти точки экстремума функции и промежутки монотонности**
- 6) Определить промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции**
- 7) Найти координаты ещё нескольких точек (для большей точности)**



# Как найти промежутки выпуклости, вогнутости и точку перегиба графика функции

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

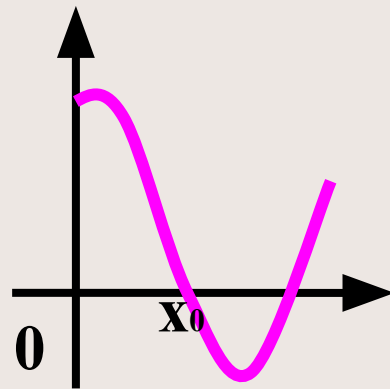
**Теорема.** (признак вогнутости и выпуклости)

Если **вторая производная** функции  $y=f(x)$  в данном промежутке **положительна**, то **кривая вогнута** в этом промежутке, а если **отрицательна** – **выпукла** в этом промежутке.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующий алгоритм:

- 1) Находят  $f'(x)$ , а затем  $f''(x)$
- 2) Находят точки, в которых  $f''(x) = 0$
- 3) Отмечают полученные точки на числовой прямой и получают несколько промежутков области определения функции
- 4) Устанавливают знаки второй производной в каждом из полученных промежутков. Если  $f''(x) < 0$ , то на этом промежутке кривая выпукла; если  $f''(x) > 0$  - вогнута

**Точкой перегиба** кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой её части.



**Точкой перегиба** кривой графика функции будут те точки, в которых  $f''(x) = 0$  и при переходе через неё вторая производная меняет знак.

**Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции**

Решение.  $y = x^4 - 6x^2 + 4$

Найдем  $y'(x)$  и  $y''(x)$ :

$$y'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow y''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

Найдём стационарные точки второго порядка,

$$\text{т.е. } y''(x) = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$



**Значит: при  $x \in (-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$  функция вогнута, а при  $x \in (-1; 1)$  – выпукла; точки перегиба  $x = \pm 1$**

Например: исследовать функцию  
 $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$  и построить её график

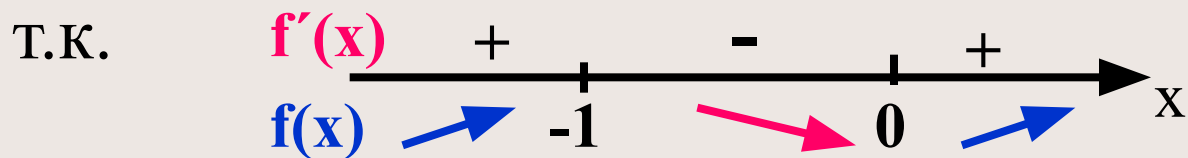
Решение.  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ , четность не определена

Найдем стационарные точки:

$$\text{т.к. } y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \Rightarrow 6x(x+1) = 0$$

тогда  $x=0$  и  $x=-1$  стационарные точки

Найдем точки экстремума:



и  $x=-1$  — точка максимума

$x=0$  — точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

при  $x \in (-\infty; -1]$  и  $[0; +\infty)$  - функция  
возрастает

при  $x \in [-1; 0]$  - функция убывает

Найдем точки пересечения графика с  
осями координат:

если  $x=0$ , то  $y=-1 \Rightarrow (0; -1)$

если  $y=0$ , то  $x=-1 \Rightarrow (-1; 0)$

## Найдем ещё некоторые точки

(контрольные, дополнительные):

- т.к.  $x=-1$  – точка максимума, то  $U_{\max}=0$   
 $\Rightarrow (-1; 0)$  -точка локального максимума
- т.к.  $x=0$  – точка минимума,  $U_{\min}=-1$   
 $\Rightarrow (0; -1)$  -точка локального минимума
- если  $x=1$ , то  $y=4 \Rightarrow (1; 4)$
- если  $x=-2$ , то  $y=-5 \Rightarrow (-2; -5)$

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Составим таблицу:



$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+	<b>0</b>	-	<b>0</b>	+
$f(x)$	↑	<b>0</b> $(-1; 0)$ <b>max</b>	↓	<b>-1</b> $(0; -1)$ <b>min</b>	↑

Найдем  $f''(x)$ .

$$f''(x) = (6x(x+1))' = 12x + 6 = 6(2x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(2x + 1) = 0 \Rightarrow x = -0,5 - \text{точка перегиба}$$

т.к. при  $x = -1$  (левее  $x = -0,5$ )  $f''(x) < 0$ ,

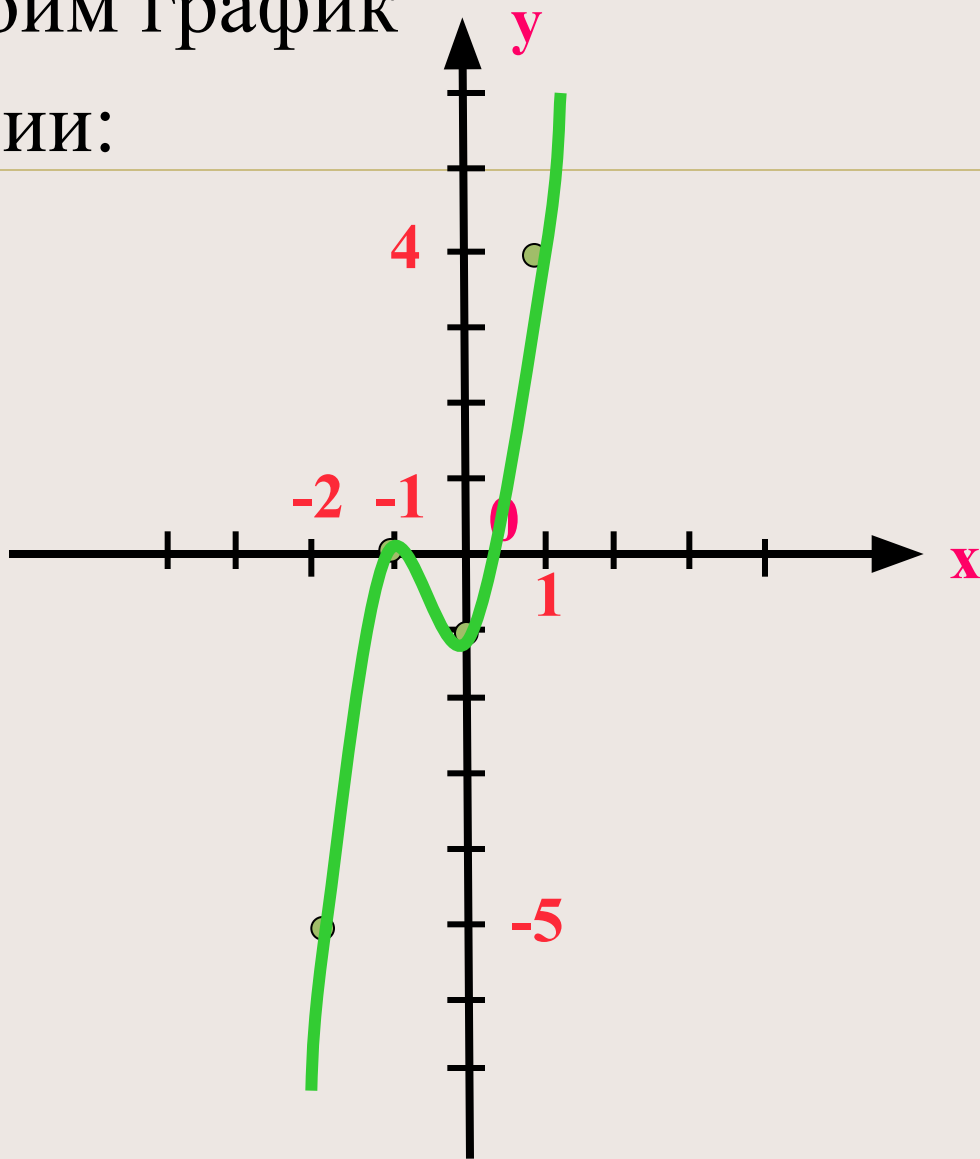
а при  $x = -0,1$  (правее  $x = -0,5$ )  $f''(x) > 0$

Найдем её координаты:  $(-0,5; ?)$ , если это не трудно



x

Построим график  
функции:



# Исследовать функцию и построить её график

1)  $y = 3x^2 - x^3$

2)  $y = -9x + x^3$

3)  $y = x^3 - 3x^2 + 2$

4)  $y = -x^3 + 6x^2 - 5$

5)  $y = 3x^3 + x^2 - 8x - 7$

6)  $y = (x)/(1+x^2)$

**Нахождение**

**наибольшего**

**и наименьшего**

**значений**

**непрерывной**

**функции**

**на промежутке**



# Теорема

Дифференцируемая на  $(a;b)$  и непрерывная на  $[a;b]$  функция  $y=f(x)$  достигает своего **наибольшего (наименьшего)** значения **на границе отрезка  $[a;b]$  или в одной из точек экстремума на интервале  $(a;b)$ .**

*Если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет **единственную точку экстремума** – точку максимума (минимума), то **в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение***

## Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$

- 1) Найти производную  $f'(x)$
- 2) Найти стационарные и критические точки функции и **проверить принадлежат ли они отрезку  $[a;b]$**
- 3) Вычислить значение функции  $y=f(x)$ 
  - на концах отрезка, т.е в точках  $x=a$  и  $x=b$
  - в стационарных и критических точках, принадлежащих  $[a;b]$
- 4) Выбрать среди найденных значений наименьшее (это и будет  **$U_{\text{наим.}}$** ) и наибольшее (это и будет  **$U_{\text{наиб.}}$** )

**Например:** найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$  на отрезках а)  $[-4;6]$

б)  $[-2;2]$

Решение. а) 1)  $y' = 3x^2 - 6x - 45$

$$2) y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -3 \in [-4;6] \text{ и } x_2 = 5 \in [-4;6]$$

3) Найдём  $y(-4)$ ;  $y(6)$ ;  $y(-3)$ ;  $y(5)$ :

Получим:  $y(-4) = 69$ ;  $y(6) = -161$ ;  $y(-3) = 82$ ;  
 $y(5) = -174$ .

Значит:  $U_{\text{наим}} = -174$ ;  $U_{\text{наиб}} = 82$ .

**Решение. б) на  $[-2;2]$**

$$1) y' = 3x^2 - 6x - 45$$

$$2) y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \notin [-2;2]$$

$$x_2 = 5 \notin [-2;2]$$

3) Найдём  $y(-2)$ ;  $y(2)$ :

$$\text{Получили } y(-2) = 71; y(2) = -93$$

Значит: **Унаим = -93; Унаиб = 71.**

**Самостоятельно найдите  
наименьшее и наибольшее  
значения функции**

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$$

**на отрезке [0;6]**

**Ответ:** Унаим. = -174 (достигается в  
точке  $x=5$ )

Унаиб. = 1 (достигается в точке  $x=0$ )



**Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке.**

1)  $y = x^2 - 8x + 19$  на  $[-1; 5]$

2)  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$  на  $[-2; 3]$

3)  $y = x + 4/(x+1)$  на  $[-2; 0]$

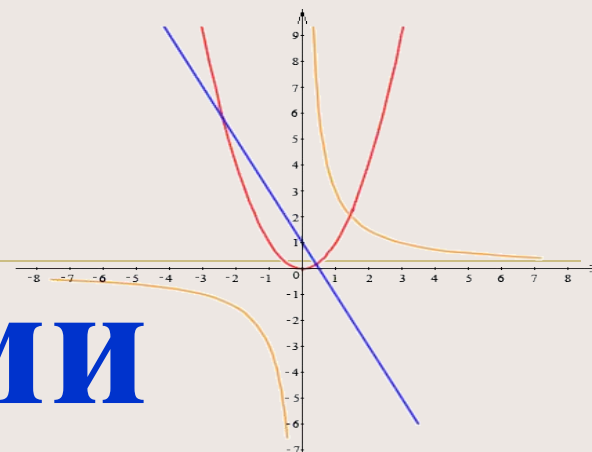
4)  $y = x^3 - 2x^2 + 1$  на  $[0,5; +\infty)$

5)  $y = 0,2x \square - x^2$  на  $(-\infty; 1]$

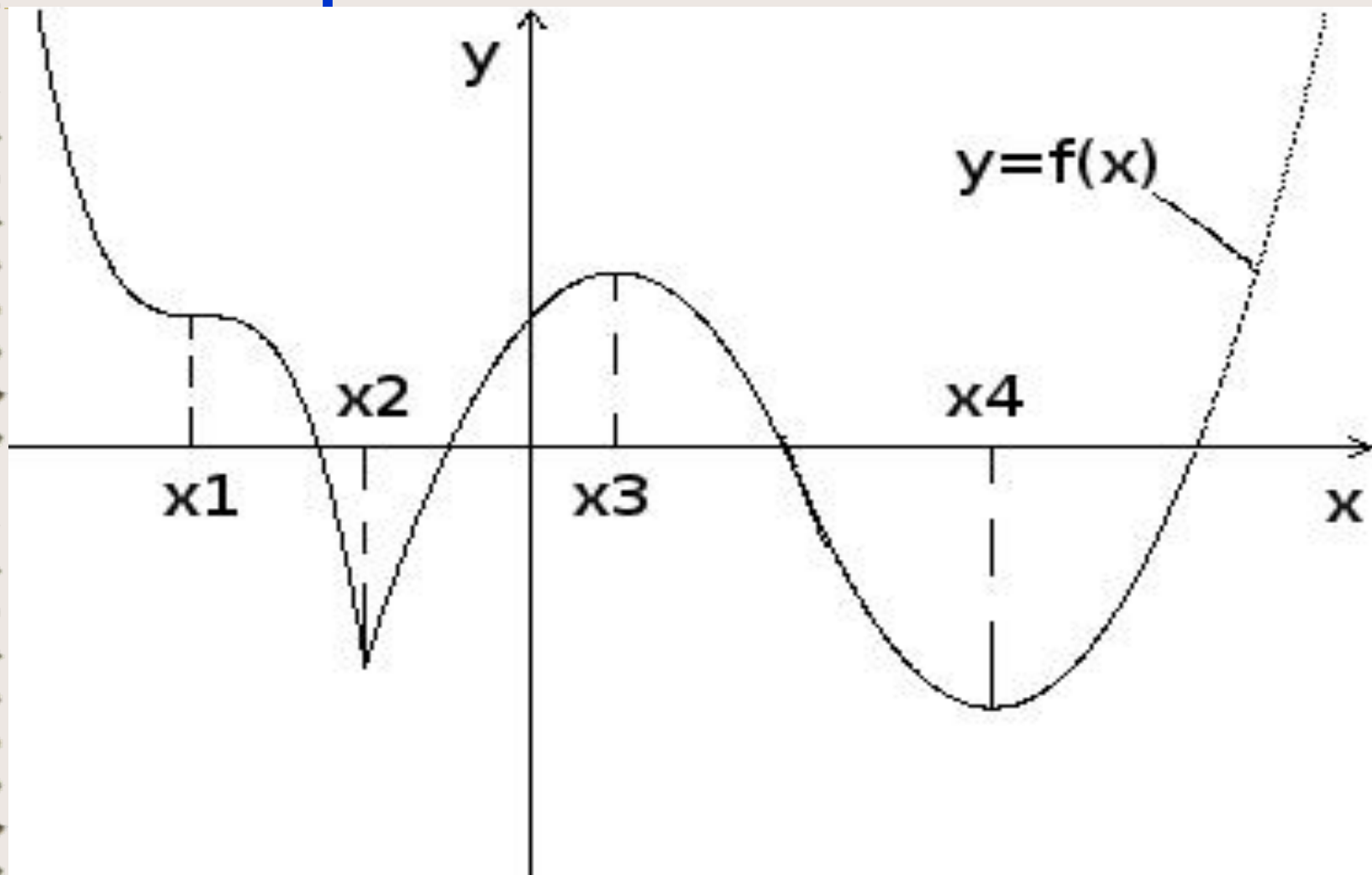
# Работа

# с графиками

# функций



**№ 1.** По графику функции ответьте на вопросы



- 1) Отметьте стационарные точки.
- 2) Что можно сказать о производной в точке  $x_1$ ?
- 3) Назовите точки экстремума.
- 4) Что можно сказать о производной на  $(-\infty; x_2)$ ?
- 5) Укажите промежутки возрастания функции.
- 6) Отметьте критические точки

# Проверим ответы

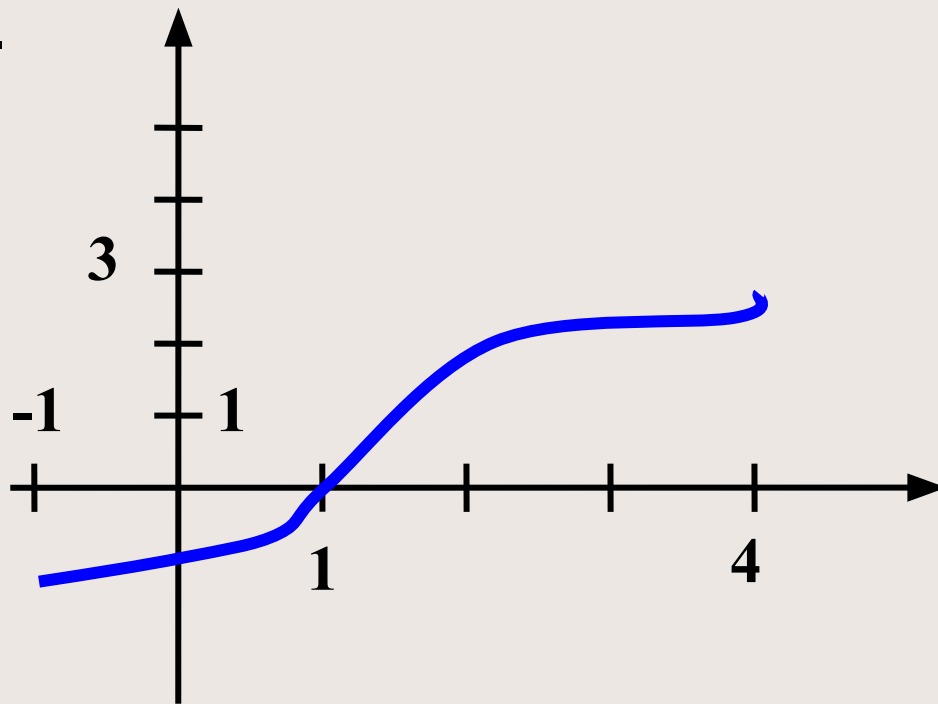
1.  $(x_1, x_3, x_4)$ .
2. не существует.
3.  $(x_2, x_3, x_4)$ .
4.  $f'(x) \leq 0$ .
5.  $[x_2; x_3] \cup [x_4; +\infty)$  функция возрастает.
6.  $x_2$

**№ 2.** Постройте график непрерывной функции  $y = f(x)$ , определенной на  $[a; b]$ , удовлетворяющей следующим условиям:

- а)**  $a = -1$ ,  $b = 4$ ,  $f'(x) > 0$  при  $-1 < x < 4$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(4) = 3$   
**б)**  $a = 0$ ,  $b = 5$ ,  $f'(x) < 0$  при  $0 < x < 5$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(3) = -2$

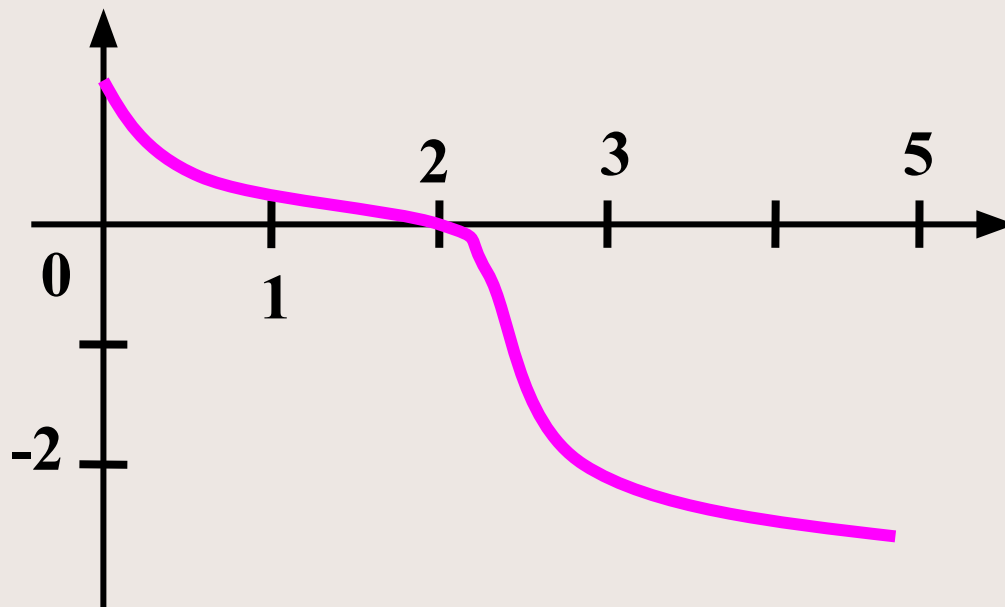
**График.**

**а)**

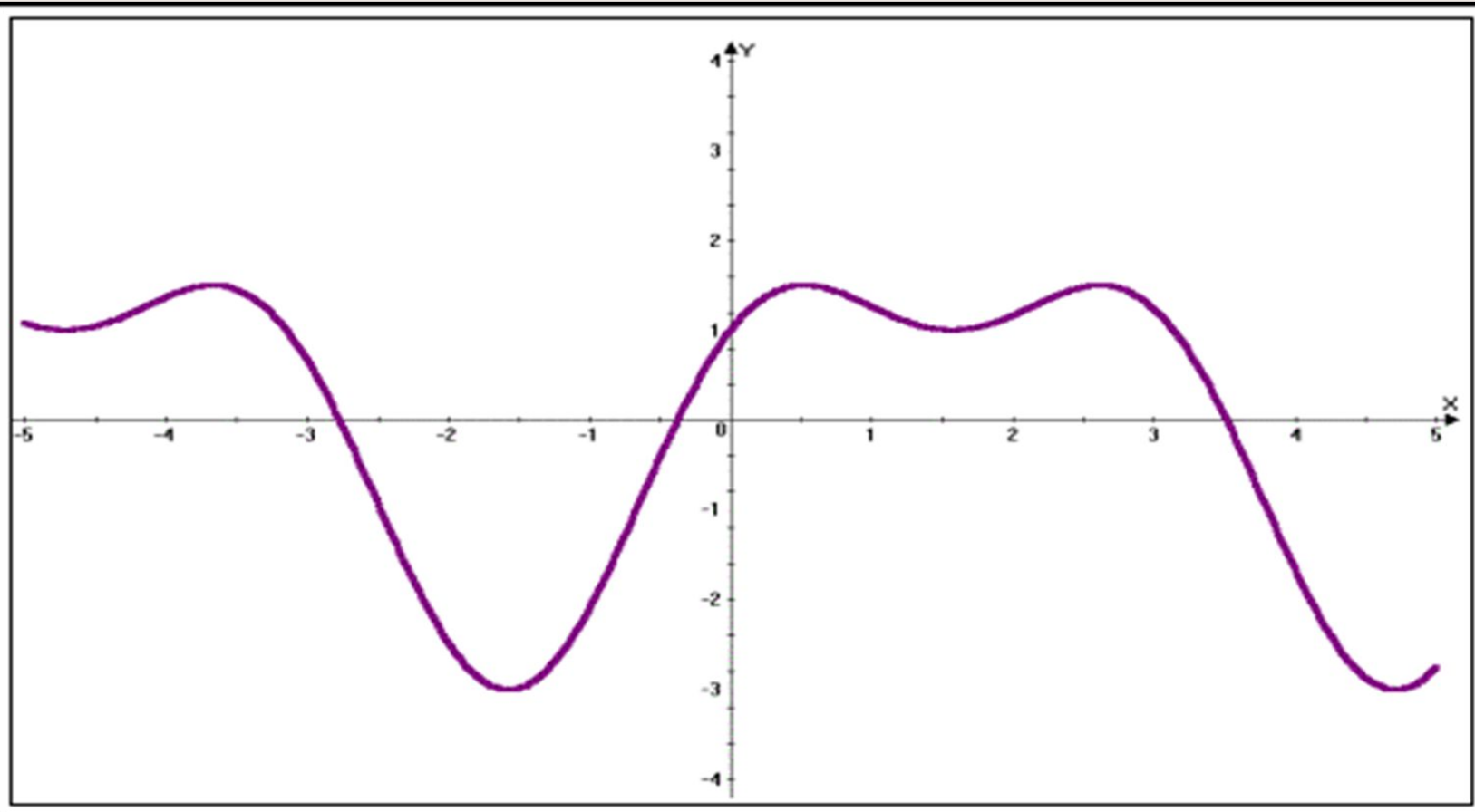


б)  $a=0$ ,  $b=5$ ,  $f'(x)<0$  при  $0<x<5$ ,  $f(2)=0$ ,  $f(3)=-2$

График.

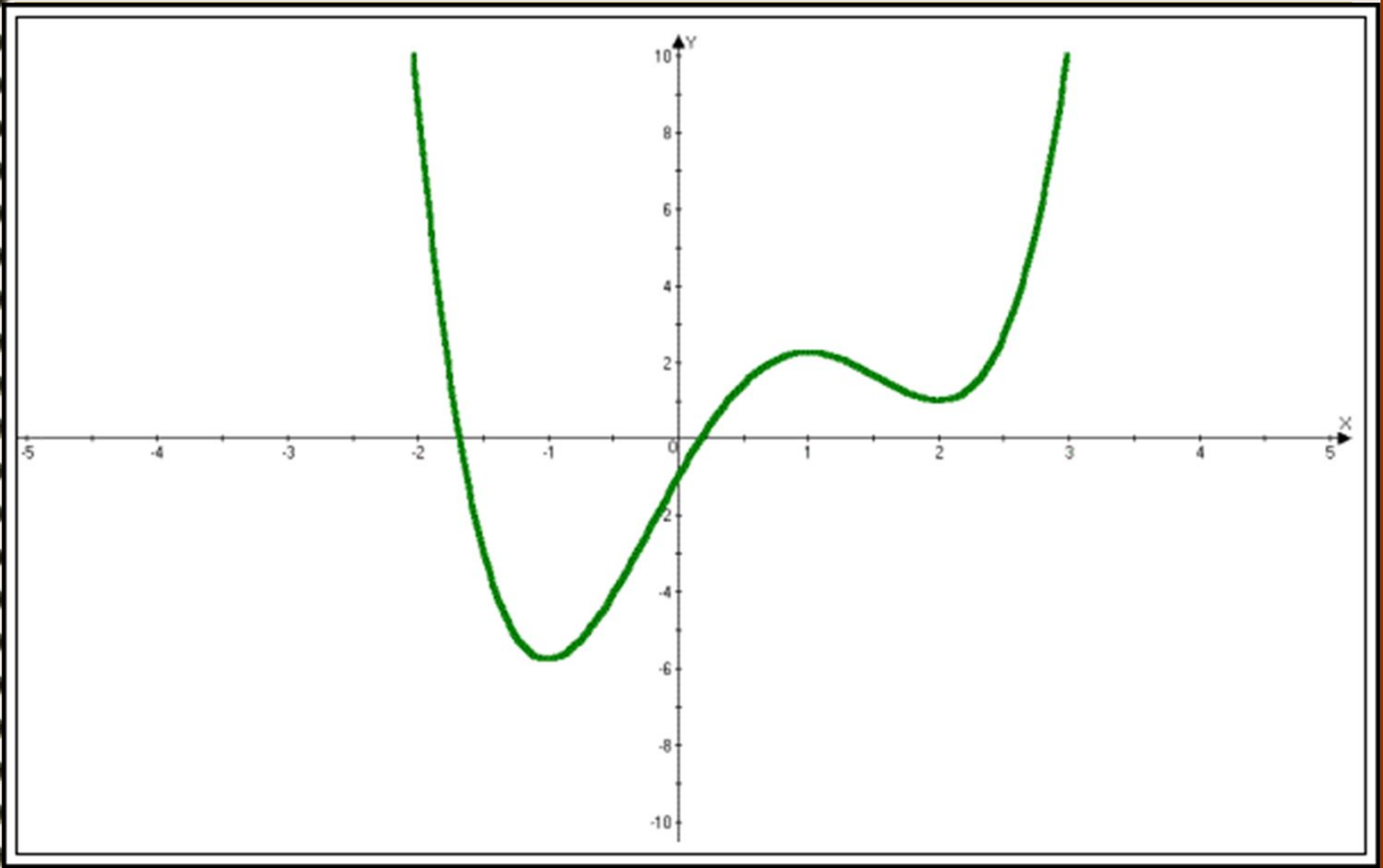


**№ 3.** По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум.





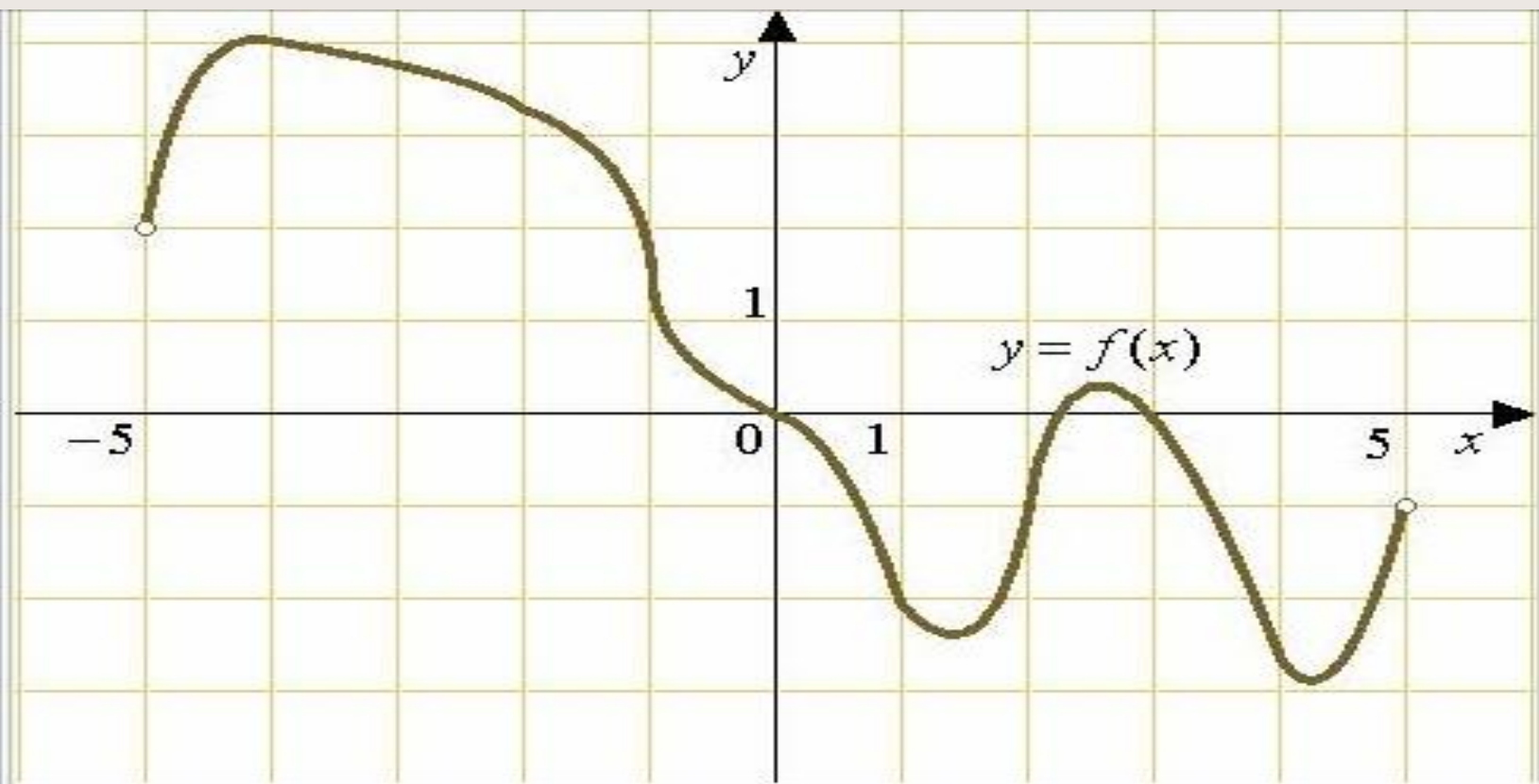
**№ 4.** На рисунке изображён график производной функции  $y=f(x)$ . Сколько точек максимума имеет эта функция? Назовите их.



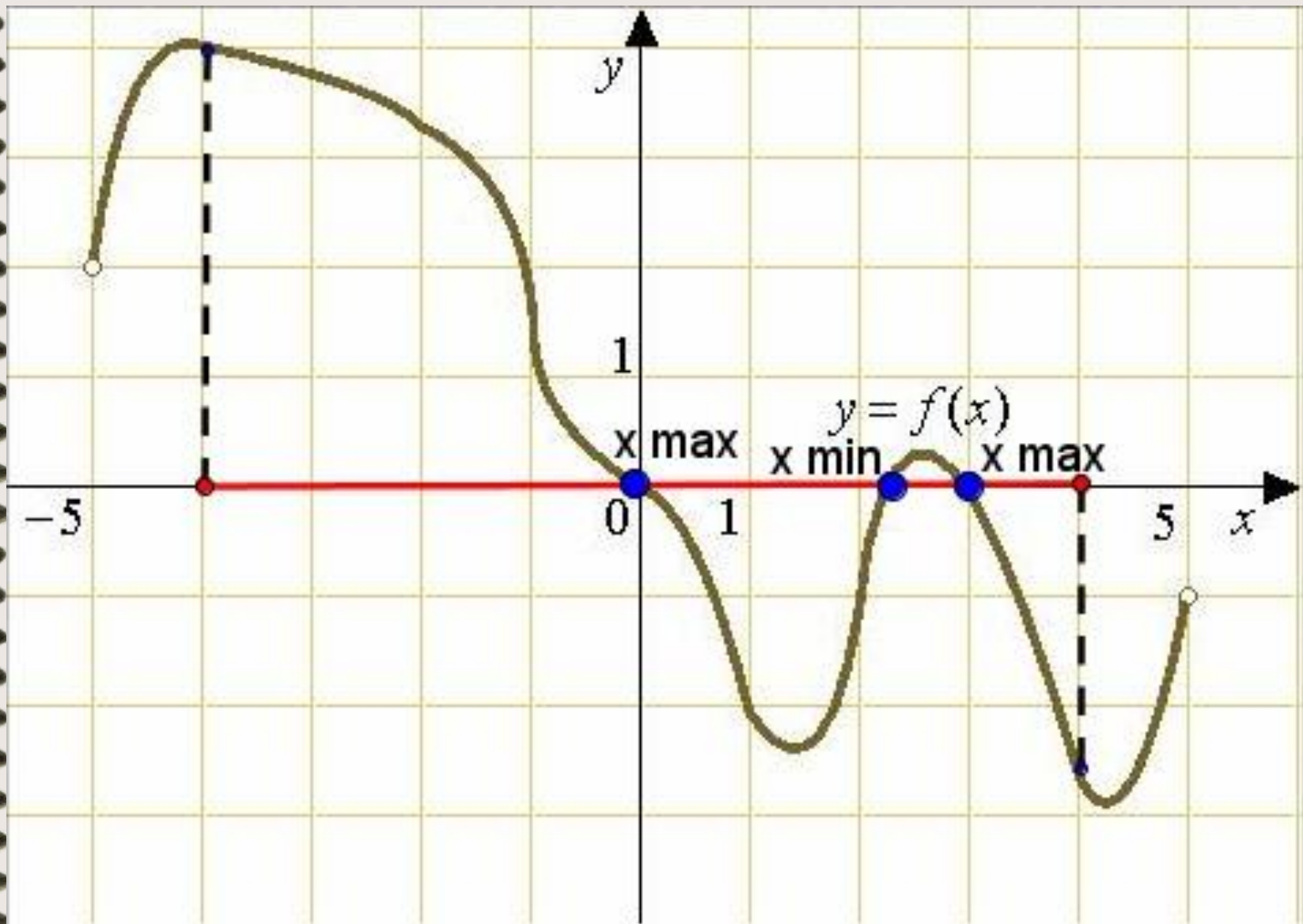
**№ 5.** По графику функции определить:

а) сколько точек экстремума имеет функция?

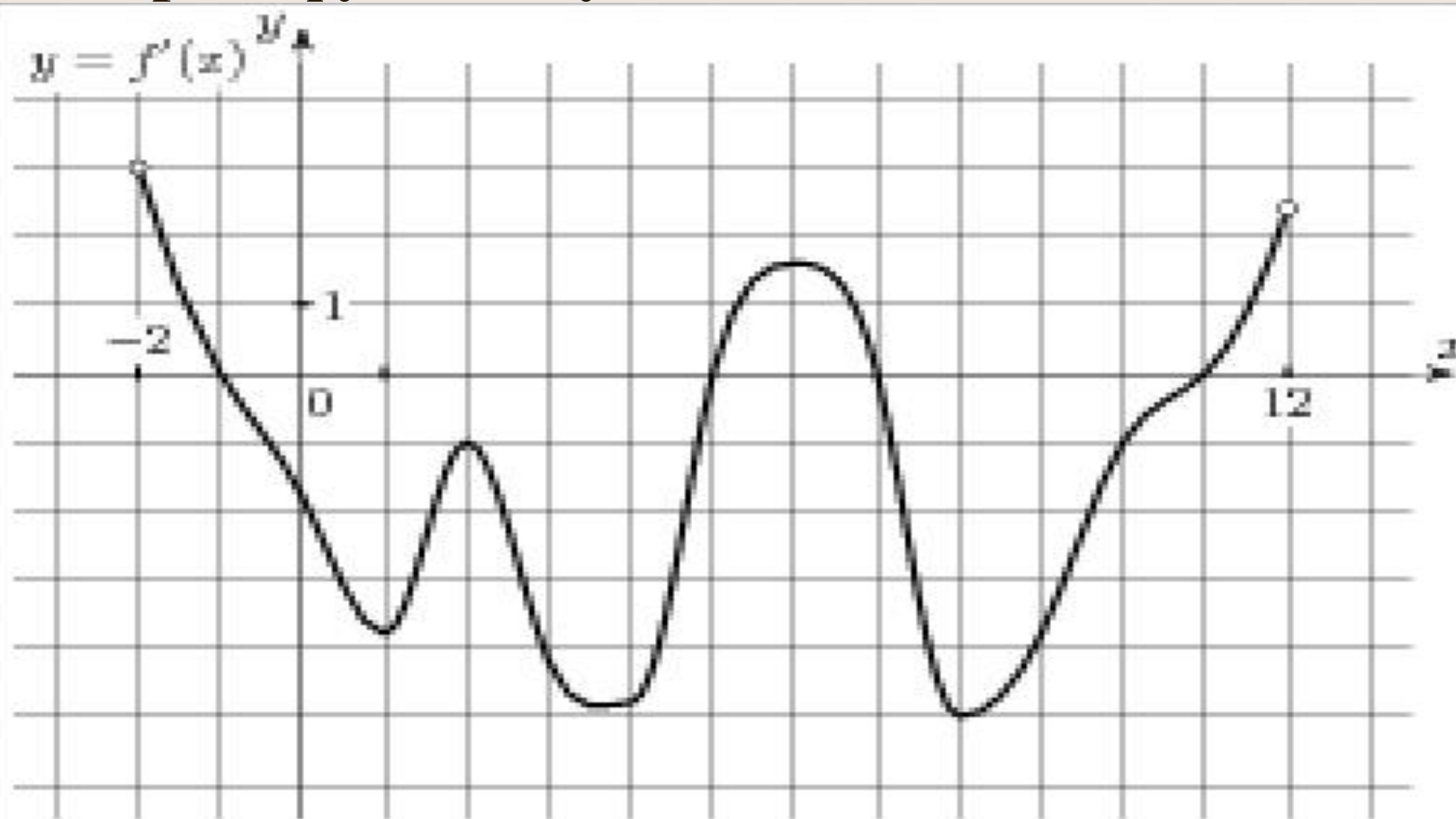
б) при каких  $x$  принадлежащих  $[-4; 4]$  функция достигает наименьшего и наибольшего значения?



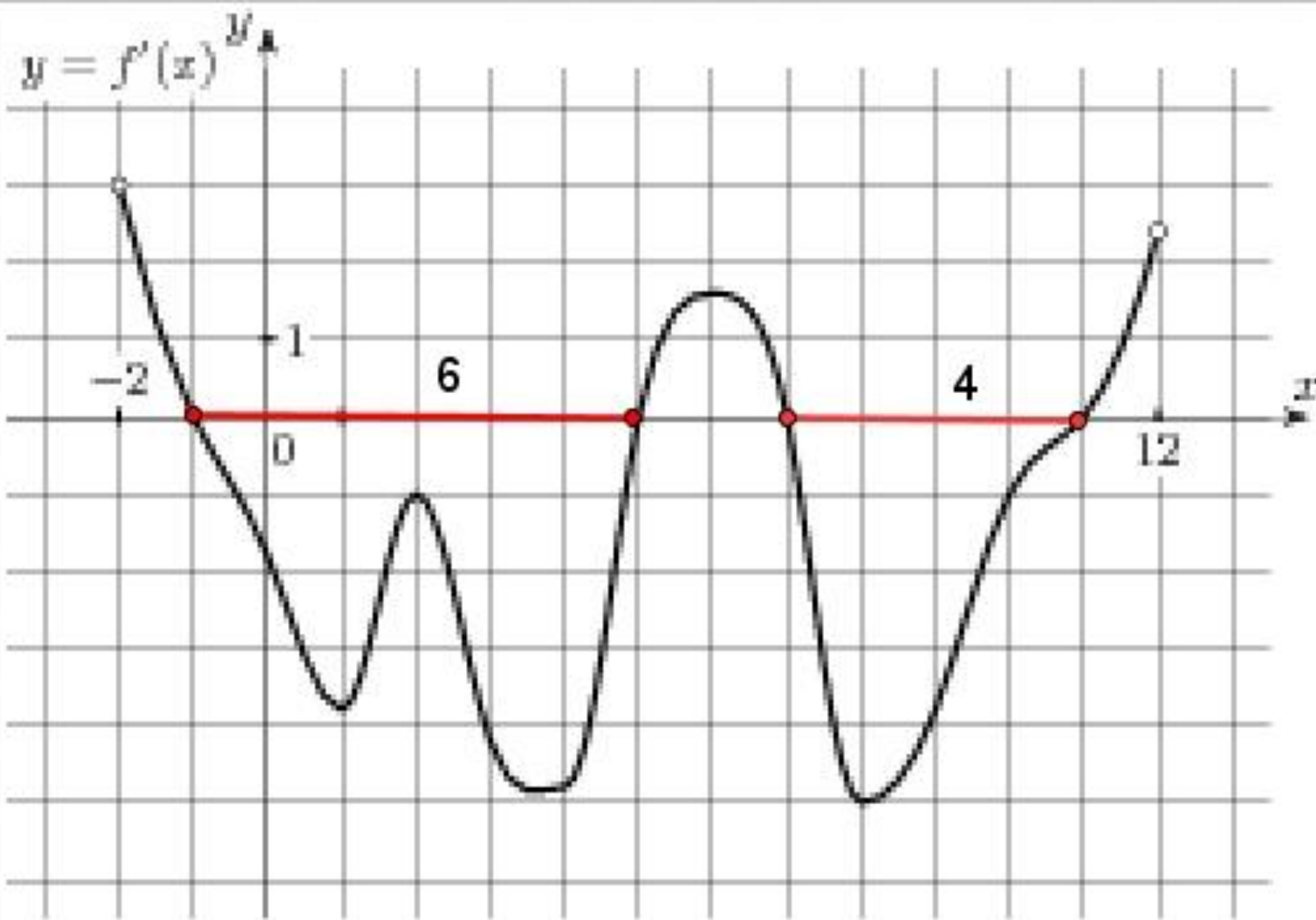
# Ответ

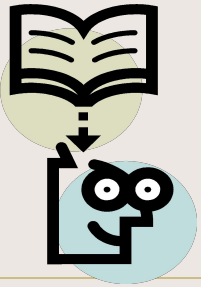


**№ 6.** Дан график производной некоторой функции. Определить промежутки, на которых функция убывает?



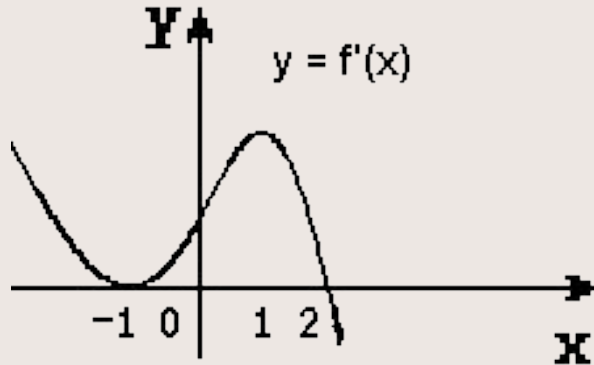
# Ответ





# Верно или не верно №1

1. График производной. Точки  $x=-1$ ,  $x=1$ ,  $x=2$  являются точками максимума?



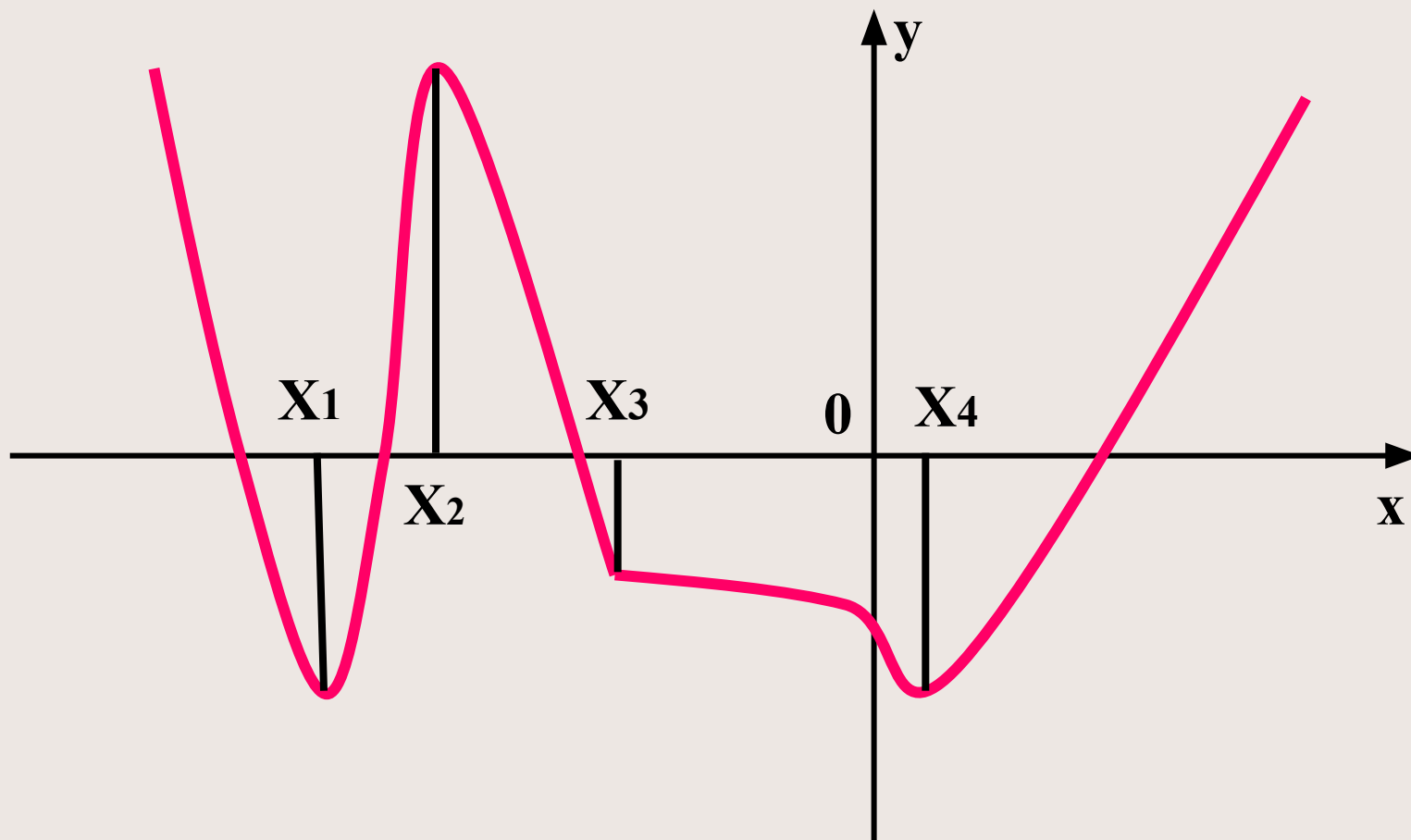
2. Производная функции в точке  $x_0$  равна 0, значит  $x_0$  - критическая точка. Верно ли?
3. Производная функции не существует в точке  $x_0$ , значит  $x_0$  - критическая точка. Верно ли?

**4. Критическая точка является точкой экстремума. Верно ли?**

**5. Точка экстремума является критической точкой. Верно ли?**

**6. Функция  $y(x)$  непрерывна в точке  $x=4$ , причем  $y'(x) > 0$  на  $(1;4)$  и  $y'(x) < 0$  на  $(4;7)$ . Точка  $x=4$  является точкой минимума?**

**№ 2.** По данному графику функции определить верно или нет высказывание





Да

1) Точка  $x_1$  – точка минимума.

Да

2) Точка  $x_1$  – точка перегиба.

Нет

3) В точках  $x_2$  и  $x_4$  касательная параллельна оси абсцисс

Да

4) В точке  $x_3$  производной не существует.

Да

5) Точка  $x_4$  – точка экстремума

6) Точка  $x_4$  – точка минимума

Да

7) Точка  $x_4$  – стационарная точка

Да

8) Точка  $x_3$  – точка экстремума

Да

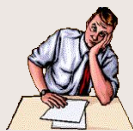
9) Точка  $x_2$  – точка максимума

Нет

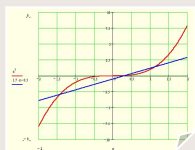
Да

# Используемые ресурсы

- Учебник А.Г.Мордковича «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс,- М., Мнемозина, 2012
- Задачник А.Г.Мордковича «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс,- М., Мнемозина, 2012
- Л.И. Мартышова «Открытые уроки алгебры и начала анализа» 9-11 классы, - М., ВАКО, 2012



<http://www.gifpark.su/PEO.htm>



Автор и источник заимствования неизвестен



Автор и источник заимствования неизвестен