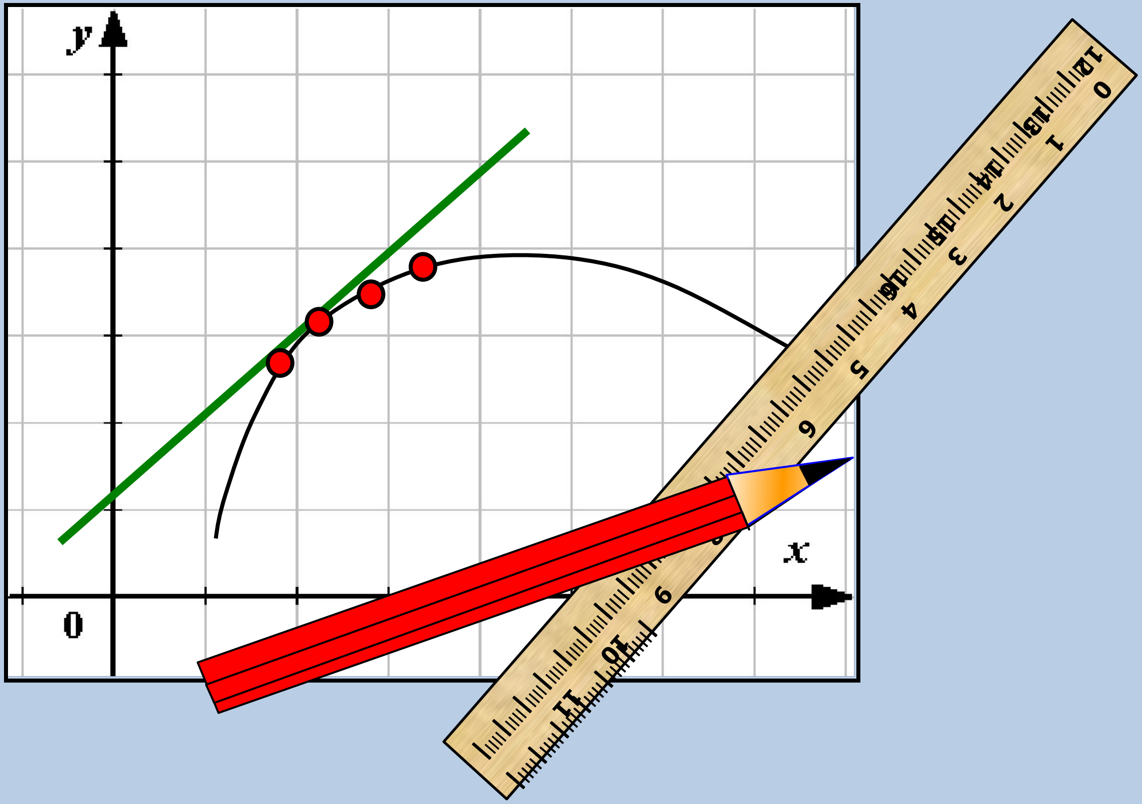
Задачи типа В12 в ЕГЭ
Исследование функций.



900igr.net

Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных.

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной.

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

3. Производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

4. Производная частного

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Основные формулы дифференцирования

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
с	0	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^{α}	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Два типа задач:

1. Нахождение точки максимума или минимума функции (на отрезке)
2. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

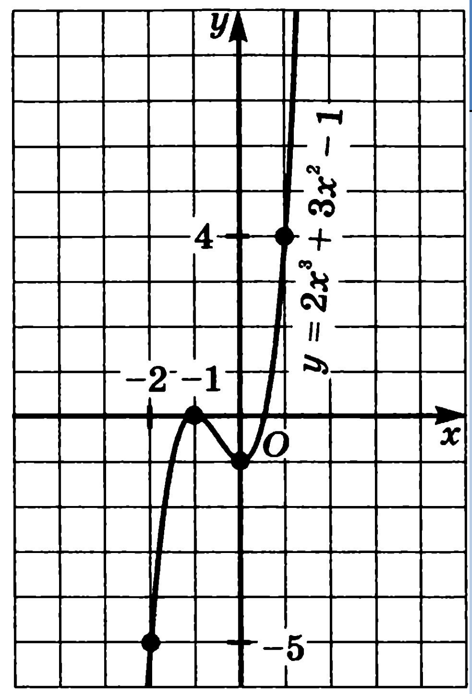
Основные определения и теоремы.

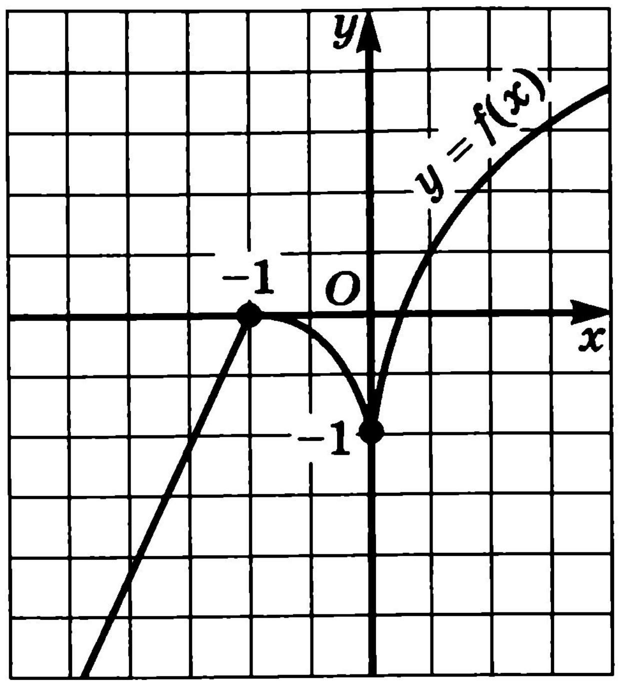
Теорема 1: Если во всех точках открытого промежутка Х выполняется равенство $f'(x) > 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве), то функция возрастат на промежутке Х

Теорема 2: Если во всех точках открытого промежутка Х выполняется равенство $f'(x) < 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве), то функция возрастат на промежутке Х

Основные определения и теоремы.

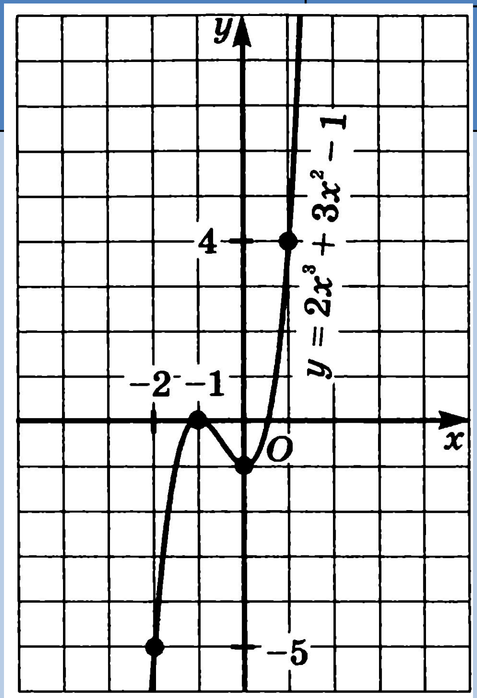
Опр. 1 Точку $x = x_0$ называют *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если у этой функции существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$

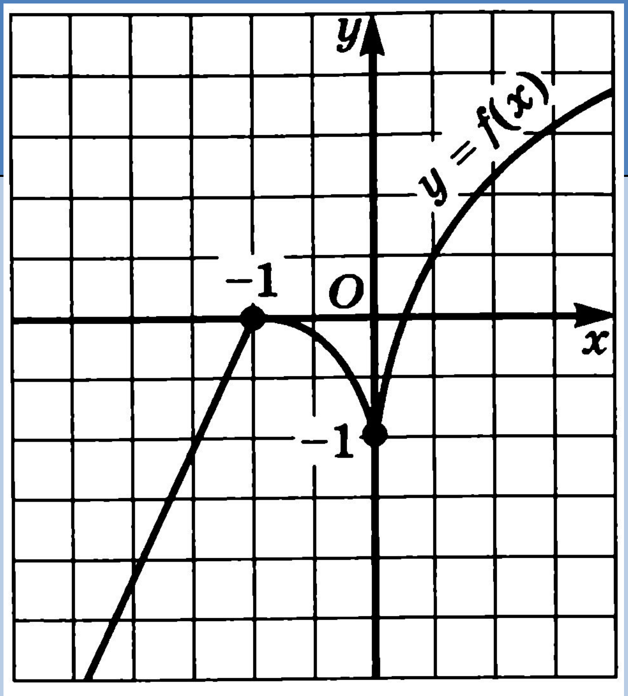




Основные определения и теоремы.

Опр. 2 Точку $x = x_0$ называют *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если у этой функции существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$





Основные определения и теоремы.

Точки минимума $x = x_{\min}$ и максимума $x = x_{\max}$ - ***точки экстремума.***

Теорема 3: Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует

Основные определения и теоремы.

***Теорема 4** (Достаточные условие экстремума):*

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

a) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется равенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции

b) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется равенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции

a) Если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет

Алгоритм нахождения точек экстремума (максимума или минимума) функции.

1. Найти производную $y = f'(x)$
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$)и критические ($f'(x)$ не существуют) точки функции $y = f(x)$
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем и определений сделать вывод о ее точках экстремума

Задачи на нахождение точек экстремума (максимума или минимума) функции.

№1 Найдите точку максимума функции

$$\boxed{y = x^3 - 48x + 17}$$

Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2 $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \qquad 3(x^2 - 16) = 0 \;\big|:3 \qquad (x^2 - 16) = 0$

$(x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow (x-4) = 0$ *или* $(x+4) = 0 \Rightarrow x = 4$ *или* $x = -4$

3.

$y'(x)$	$+$	max	$-$	min	$+$	
$y(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	4	$\nearrow$	x

4. $x_{\max} = -4$

Задачи на нахождение точек экстремума (максимума или минимума) функции.

№1 Найдите точку максимума функции

$$\boxed{y = x^3 - 48x + 17}$$

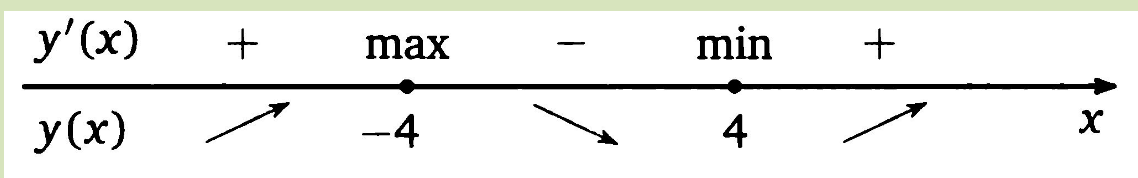
Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2 $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \qquad 3(x^2 - 16) = 0 \;\Big|:3 \qquad (x^2 - 16) = 0$

$(x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow (x-4) = 0$ *или* $(x+4) = 0 \Rightarrow x = 4$ *или* $x = -4$

3.



4. $x_{\max} = -4$

Задачи для самостоятельного решения на нахождение экстремума функции.

Группа А	Группа В
Найдите точку минимума функции $$y = 7 + 12x - x^3$$	*Найдите точку максимума функции* $$y = \frac{16}{x} + x + 3$$
Группа С	**Группа D**
Найдите точку минимума функции $$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$$	*Найдите точку максимума функции* $$y = (2x-3)\cos x - 2\sin x + 5$$ $$x \in (0; \frac{\Pi}{2})$$

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывноq функции *y= f (x)* на отрезке [a;b]

1. Найти производную $y = f'(x)$
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка [*a;b*]
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках *a* и *b;* выбрать среди этих значений наименьшее и наибольшее

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

№1 Найдите наименьшее значение функции $\boxed{y = x^3 - 48x + 17}$ на отрезке [-5;5]

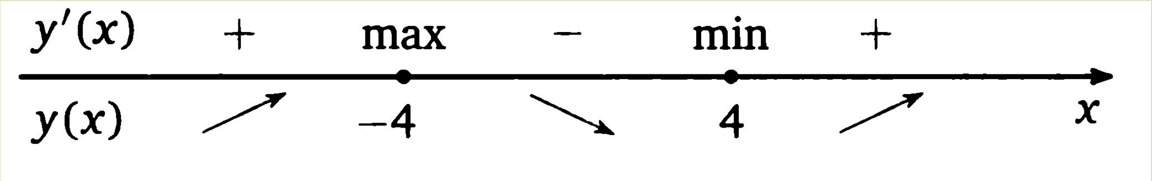
Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2 $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \qquad 3(x^2 - 16) = 0 \;|:3 \qquad (x^2 - 16) = 0$

$(x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow (x-4) = 0 \;\; \text{или} \;\; (x+4) = 0 \Rightarrow \;\; x = 4 \;\; \text{или} \; x = -4$

3.



$f(4) = 4^3 - 48 \cdot 4 + 17 = -111 \quad f(-4) = (-4)^3 - 48 \cdot (-4) + 17 = 145$

Задачи для самостоятельного решения на нахождение наибольшего или наименьшего значения

Группа А *Найдите наибольшее значение функции* $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2;0]$	**Группа В** *Найдите наименьшее значение функции* $y = x + \frac{36}{x}$ на отрезке $[1;9]$
Группа С *Найдите наибольшее значение функции* $y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0;4]$	**Группа D** *Найдите наименьшее значение функции* $y = 6\sin x - 9x + 5$ на отрезке $[-\frac{3\Pi}{2};0]$

Домашняя работа

- **№1954,1977,2041** *ЕГЭ 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В. А.Л. Семенов, И.В.Ященко и др. – 3-е издание, - М.:Изд-во «Экзамен», 2012. - 543*

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
2. Алгебра и начала математического анализа: Задачник, Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
3. ЕГЭ 2012. Математика. Задача В12. Рабочая тетрадь / Под редакцией А.Л. Семенова и И.В.Ященко – М.: Издательство МЦНМО, 2012