МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

История возникновения интеграла

Доклад по курсу «Математика»

Институт/
Факультет – Институт природных ресурсов

Направление – Экология и природопользование
Кафедра – Геоэкологии и геохимии

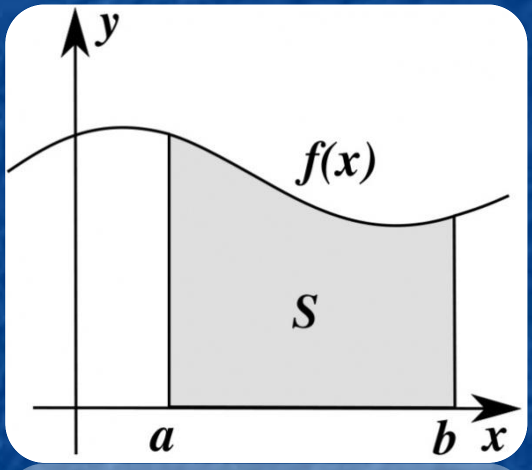
Выполнил студент гр. 2г21
А.А.Бондарчук

Проверила
Т.В.Тарбокова

Томск – 2013

Определение

Интеграл функции — аналог суммы последовательности. Неформально говоря, (определённый) интеграл является площадью части графика функции (в пределах интегрирования), то есть площадью криволинейной трапеции.



Процесс нахождения интеграла называется ***интегрированием***.

$$\int C*f(x)dx = C*\int f(x)dx$$

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad c \in (a, b)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+8} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+8} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+8} = \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{dx}{x^2+2x+8} + \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{dx}{x^2+2x+8} =$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{dx}{(x+1)^2+7} + \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{dx}{(x+1)^2+7} = \lim_{M\to-\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{7}} \right)\Big|_M^0 + \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{7}} \right)\Big|_0^N =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} - \lim_{M\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{M+1}{\sqrt{7}} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\lim_{N\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{N+1}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}.$$

$$\iint_D (2x+y)dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} (2x+y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (2x+y)dy =$$

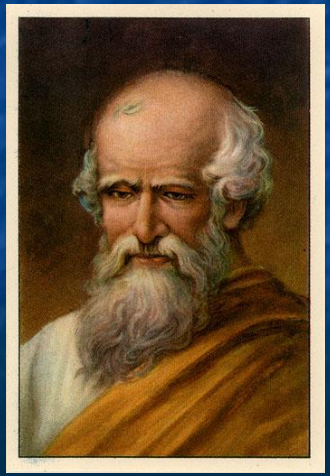
$$= \int_{-1}^{0} dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right)\Big|_{-x}^{1} + \int_{0}^{1} dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right)\Big|_{x^2}^{1} =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(2x + \frac{1}{2} + 2x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(2x + \frac{1}{2} - 2x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{9}{10}.$$

Символ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integero, которое переводится, как приводить в прежнее состояние, восстанавливать.

Интеграл в древности

Возникновение задач интегрального исчисления связано с нахождением площадей и объемов. Ряд задач такого рода был решен математиками древней Греции. Античная математика предвосхитила идеи интегрального исчисления в значительно большей степени, чем дифференциального исчисления. Большую роль при решении таких задач играл исчерпывающий метод, созданный Евдоксом Книдским (ок. 408 - ок. 355 до н. э.) и широко применявшийся Архимедом (ок. 287 - 212 до н. э.).



Интеграл в древности

Однако Архимед не выделил общего содержания интеграционных приемов и понятий об интеграле, а тем более не создал алгоритма интегрального исчисления. Ученые Среднего и Ближнего Востока в IX - XV веках изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов в интегральном исчислении они не получили.

Деятельность европейских ученых в это время была еще более скромной. Лишь в XVI и XVII веках развитие естественных наук поставило перед математикой Европы ряд новых задач, в частности задачи на нахождение квадратур (задачи на вычисление площадей фигур), кубатур (задачи на вычисление объемов тел) и определение центров тяжести .

История возникновения интеграла

Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание, и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов развития интегрального исчисления. Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. Но потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления.

Математики XVII столетия, получившие многие новые результаты, учились на трудах Архимеда. Активно применялся и другой метод - метод неделимых, который также зародился в Древней Греции.

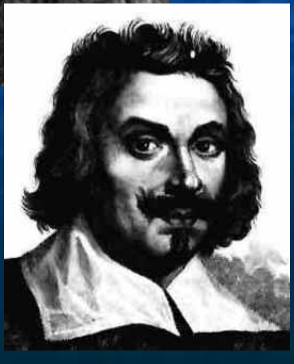
История возникновения интеграла

Например, криволинейную трапецию они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длиной f(x) , которым тем не менее приписывали площадь, равную бесконечно малой величине f(x)dx. В соответствии с таким пониманием искомая площадь считалась равной сумме S = бесконечно большого числа бесконечно малых площадей. Иногда даже подчеркивалось, что отдельные слагаемые в этой сумме - нули, но нули особого рода, которые сложенные в бесконечном числе, дают вполне определенную положительную сумму.

История возникновения интеграла

На такой кажущейся теперь по меньшей мере сомнительной основе И. Кеплер (1571 - 1630 гг.) в своих сочинениях "Новая астрономия" (1609 г.) и "Стереометрия винных бочек" (1615 г.) правильно вычислил ряд площадей (например площадь фигуры, ограниченной эллипсом) и объемов (тело резалось на бесконечно тонкие пластинки).

Эти исследования были продолжены итальянскими математиками Б. Кавальери (1598 - 1647 годы) и Э. Торричелли (1608 -1647 годы).



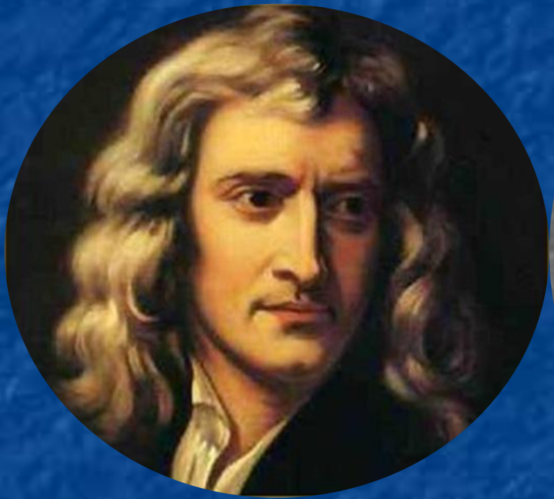
История возникновения интеграла

В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению.

Однако при всей значимости результатов, полученных математиками XVII столетия, исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования, дающую достаточно точный алгоритм.

История возникновения интеграла

Это сделали Ньютон и Лейбниц, открывшие независимо друг от друга факт, известный вам под названием формулы Ньютона - Лейбница. Тем самым окончательно оформился общий метод.



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

История возникновения интеграла

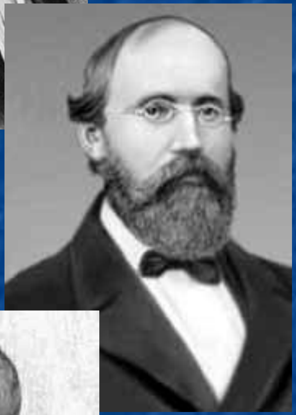
Предстояло еще научиться находить первообразные многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисление создано.

История возникновения интеграла

Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии (в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801 - 1862 гг.), В. Я. Буняковский (1804 - 1889 гг.), П. Л. Чебышев (1821 - 1894 гг.). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции.

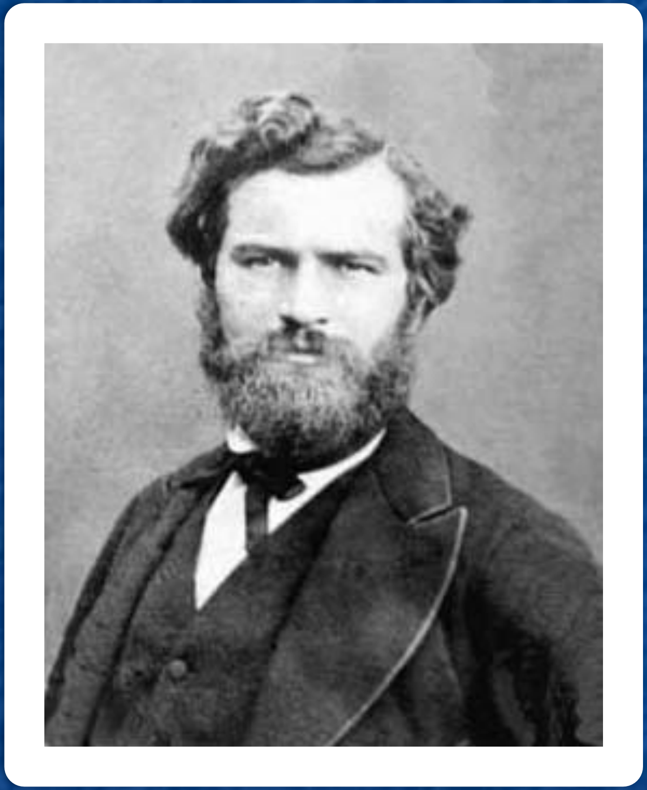
История возникновения интеграла

Строгое изложение теории интеграла появилось только в прошлом веке, Решение этой задачи связано с именами О. Коши, одного из крупнейших математиков немецкого ученого Б. Римана (1826 - 1866 гг.), французского математика Г. Дарбу (1842 - 1917).



История возникновения интеграла

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом (1826 - 1922 гг.) теории меры.



История возникновения интеграла

Различные обобщения понятия интеграла уже в начале нашего столетия были предложены французскими математиками А. Лебегом (1875 - 1941 гг.) и А. Данжуа (1884 - 1974) советским математиком А. Я. Хинчиным (1894 -1959 гг.)

Спасибо за внимание ☺️