

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ**  
**УНИВЕРСИТЕТ**

## *История возникновения интеграла*

Доклад по курсу «Математика»

Институт/  
Факультет – Институт природных  
ресурсов

Направление – Экология и  
природопользование  
Кафедра – Геоэкологии и геохимии

Выполнил студент гр. 2Г21  
А.А.Бондарчук

Проверила  
Т.В.Тарбокова

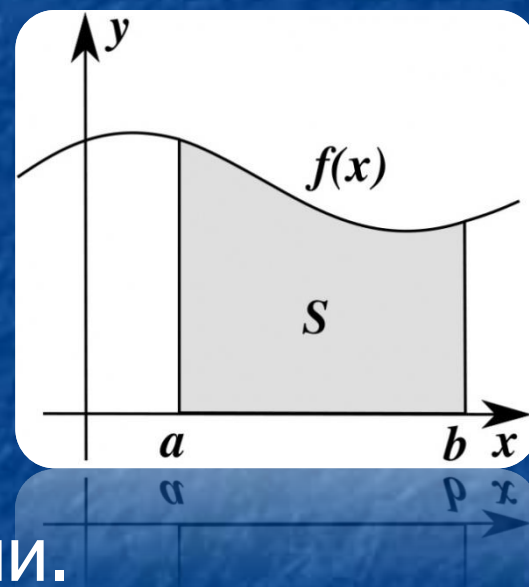
Томск – 2013

[900igr.net](http://900igr.net)

# Определение

**Интеграл функции** — аналог суммы последовательности. Неформально говоря, (определённый) интеграл является площадью части графика функции (в пределах интегрирования), то есть площадью криволинейной трапеции.

Процесс нахождения интеграла называется **интегрированием**.



$$\int C * f(x) dx = C * \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 8} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 8} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 8} = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 8} + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{dx}{x^2 + 2x + 8} =$$

$$= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 7} + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{dx}{(x+1)^2 + 7} = \lim_{M \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{7}} \right)_M^0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{7}} \right)_0^N =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} - \lim_{M \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{M+1}{\sqrt{7}} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{N+1}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$$

$$\iint_D (2x + y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 (2x + y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (2x + y) dy =$$

$$= \int_{-1}^0 dx \left( 2xy + \frac{y^2}{2} \right)_{-x}^1 + \int_0^1 dx \left( 2xy + \frac{y^2}{2} \right)_{x^2}^1 =$$

$$= \int_{-1}^0 \left( 2x + \frac{1}{2} + 2x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left( 2x + \frac{1}{2} - 2x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{9}{10}$$

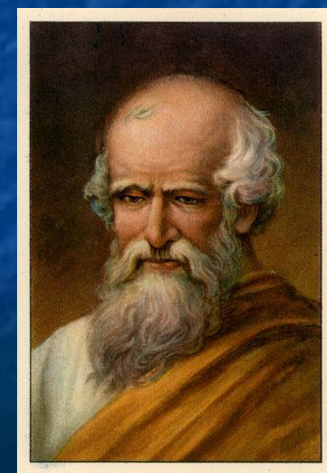
## Символ введен Лейбницем (1675 г.).

Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского *integero*, которое переводится, как приводить в прежнее состояние, восстанавливать.



# Интеграл в древности

Возникновение задач интегрального исчисления связано с нахождением площадей и объемов. Ряд задач такого рода был решен математиками древней Греции. Античная математика предвосхитила идеи интегрального исчисления в значительно большей степени, чем дифференциального исчисления. Большую роль при решении таких задач играл исчерпывающий метод, созданный Евдоксом Книдским (ок. 408 - ок. 355 до н. э.) и широко применявшийся Архимедом (ок. 287 - 212 до н. э.).



# Интеграл в древности

Однако Архимед не выделил общего содержания интеграционных приемов и понятий об интеграле, а тем более не создал алгоритма интегрального исчисления. Ученые Среднего и Ближнего Востока в IX - XV веках изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов в интегральном исчислении они не получили.

Деятельность европейских ученых в это время была еще более скромной. Лишь в XVI и XVII веках развитие естественных наук поставило перед математикой Европы ряд новых задач, в частности задачи на нахождение квадратур (задачи на вычисление площадей фигур), кубатур (задачи на вычисление объемов тел) и определение центров тяжести .



# История возникновения интеграла

Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание, и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов развития интегрального исчисления. Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. Но потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления.

Математики XVII столетия, получившие многие новые результаты, учились на трудах Архимеда. Активно применялся и другой метод - метод неделимых, который также зародился в Древней Греции.

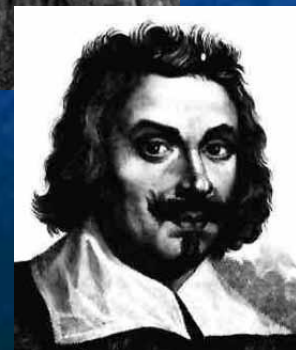
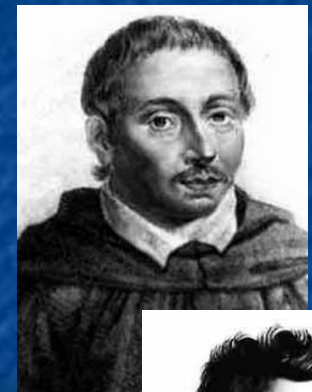
# История возникновения интеграла

Например, криволинейную трапецию они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длиной  $f(x)$ , которым тем не менее приписывали площадь, равную бесконечно малой величине  $f(x)dx$ . В соответствии с таким пониманием искомая площадь считалась равной сумме  $S =$  бесконечно большого числа бесконечно малых площадей. Иногда даже подчеркивалось, что отдельные слагаемые в этой сумме - нули, но нули особого рода, которые сложенные в бесконечном числе, дают вполне определенную положительную сумму.

# История возникновения интеграла

На такой кажущейся теперь по меньшей мере сомнительной основе И. Кеплер (1571 - 1630 гг.) в своих сочинениях "Новая астрономия" (1609 г.) и "Стереометрия винных бочек" (1615 г.) правильно вычислил ряд площадей (например площадь фигуры, ограниченной эллипсом) и объемов (тело резалось на бесконечно тонкие пластинки).

Эти исследования были продолжены итальянскими математиками Б. Кавальери (1598 - 1647 годы) и Э. Торричелли (1608 - 1647 годы).





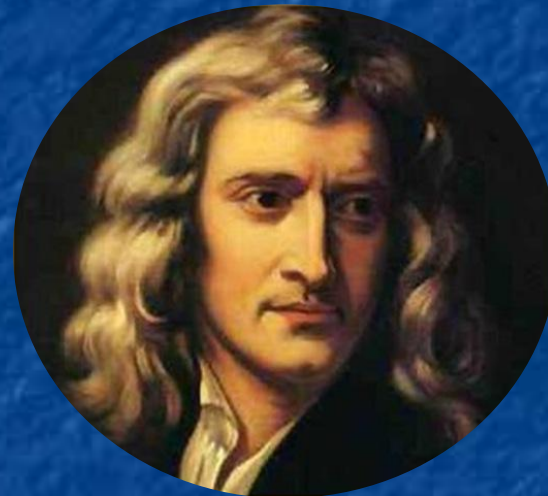
# История возникновения интеграла

В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению.

Однако при всей значимости результатов, полученных математиками XVII столетия, исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования, дающую достаточно точный алгоритм.

# История возникновения интеграла

Это сделали  
Ньютон и Лейбниц,  
открывшие  
независимо друг от  
друга факт,  
известный вам под  
названием формулы  
Ньютона - Лейбница.  
Тем самым  
окончательно  
оформился общий  
метод.



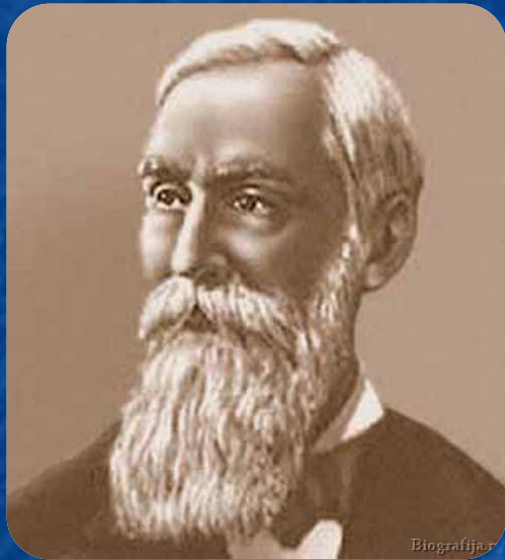
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

# История возникновения интеграла

Предстояло еще научиться находить первообразные многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисление создано.



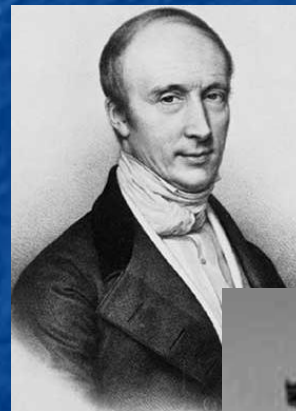
# История возникновения интеграла



Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии (в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801 - 1862 гг.), В. Я. Буняковский (1804 - 1889 гг.), П. Л. Чебышев (1821 - 1894 гг.). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции.

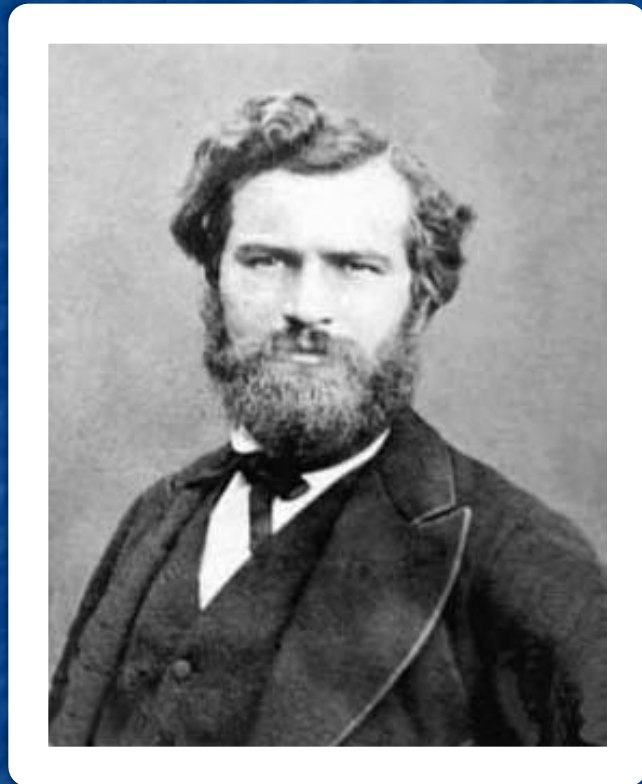
# История возникновения интеграла

Строгое изложение теории интеграла появилось только в прошлом веке, Решение этой задачи связано с именами О. Коши, одного из крупнейших математиков немецкого ученого Б. Римана (1826 - 1866 г.), французского математика Г. Дарбу (1842 - 1917).



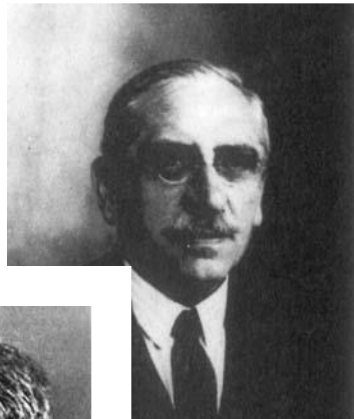
# История возникновения интеграла

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом (1826 - 1922 гг.) теории меры.





# История возникновения интеграла



Различные обобщения понятия интеграла уже в начале нашего столетия были предложены французскими математиками А. Лебегом (1875 - 1941 гг.) и А. Данжуа (1884 - 1974) советским математиком А. Я. Хинчиным (1894 - 1959 гг.)

Спасибо за внимание 😊