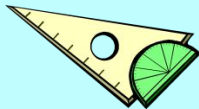




# РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a \sin^2 x + c \cdot \sin x \cos x + b \cos^2 x = 0$$





# Содержание.

1. Вводная часть, повторение теоретического материала.
2. Решение тригонометрических уравнений.
3. Проблемы, возникающие при решении тригонометрических уравнений.



## ЦЕЛЬ:

- Повторить решение тригонометрических уравнений.
  - 1. Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.
  - 2. Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений.
  - 3. Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.
  
- Выделение основных проблем при решении этих уравнений:
  - Потеря корней.
  - Посторонние корни.
  - Отбор корней.





# Устная работа.

- Решите уравнения
  - А)  $3x - 5 = 7$
  - Б)  $x^2 - 8x + 15 = 0$
  - В)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$
  - Г)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
  - Д)  $3x^2 - 12 = 0$
- Ответы
  - 4
  - 3; 5
  - 0,5
  - -2; -1; 1; 2
  - -2; 2





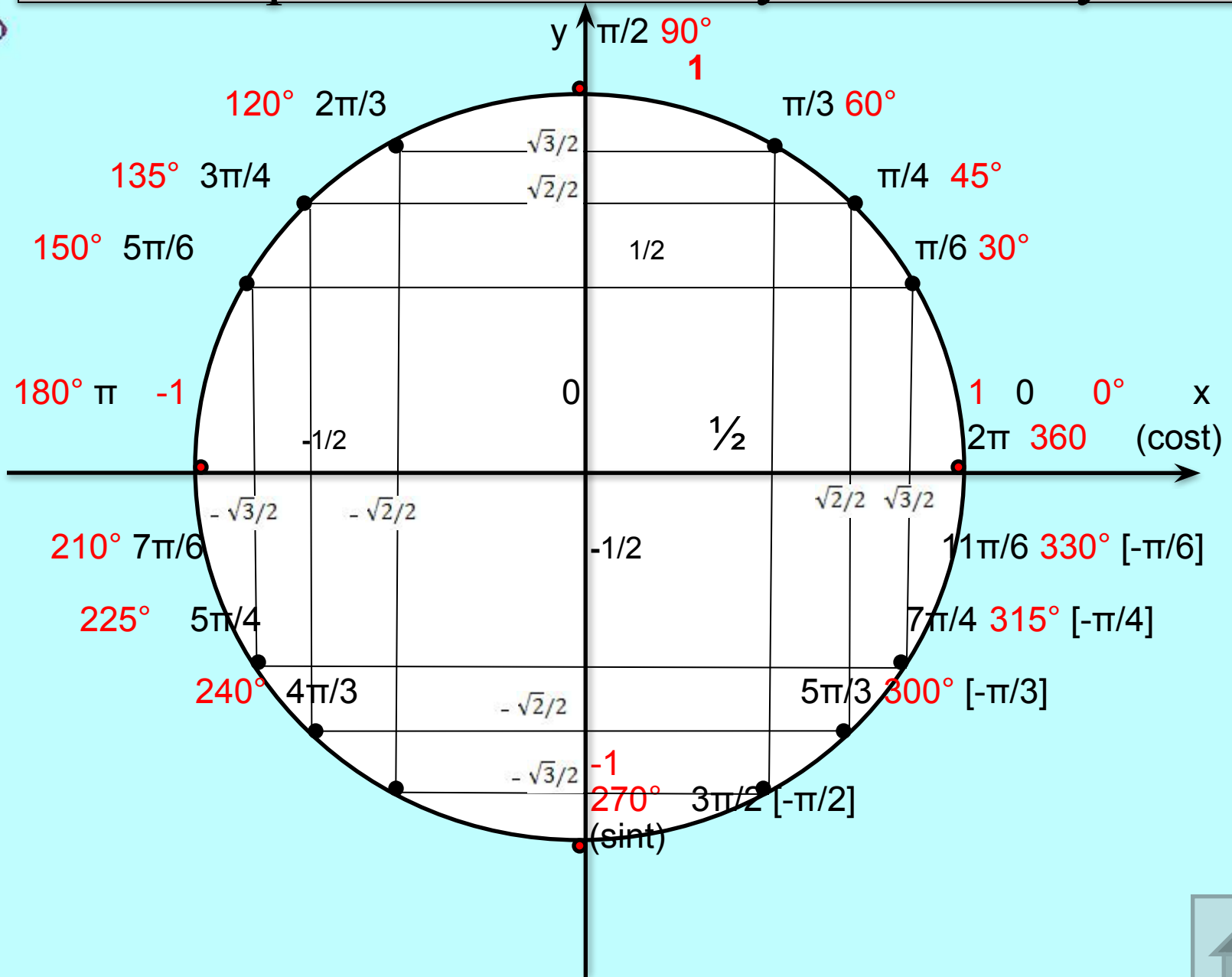
# Устная работа

- Упростите выражения
  - А)  $(\sin a - 1)(\sin a + 1)$
  - Б)  $\sin^2 a - 1 + \cos^2 a$
  - В)  $\sin^2 a + \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} a + \cos^2 a$
  - Г)  $\sqrt{1 - 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}$
- Ответы
  - $-\cos^2 a$
  - 0
  - 2
  - $|1 - \operatorname{tg} x|$



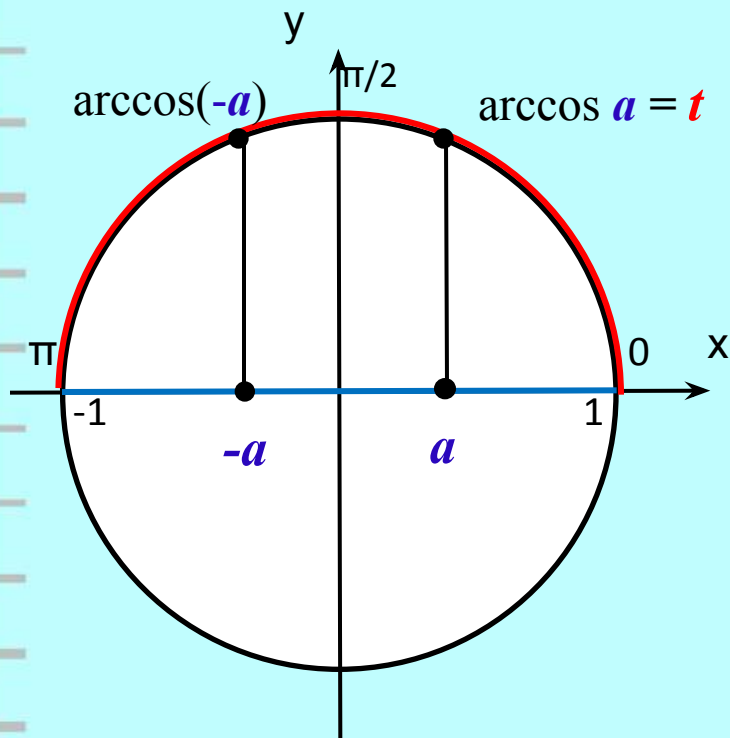


# Повторим значения синуса и косинуса





# Арккосинус



Арккосинусом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $[0; \pi]$ , что  $\cos t = a$ .  
Причём,  $|a| \leq 1$ .

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Примеры:

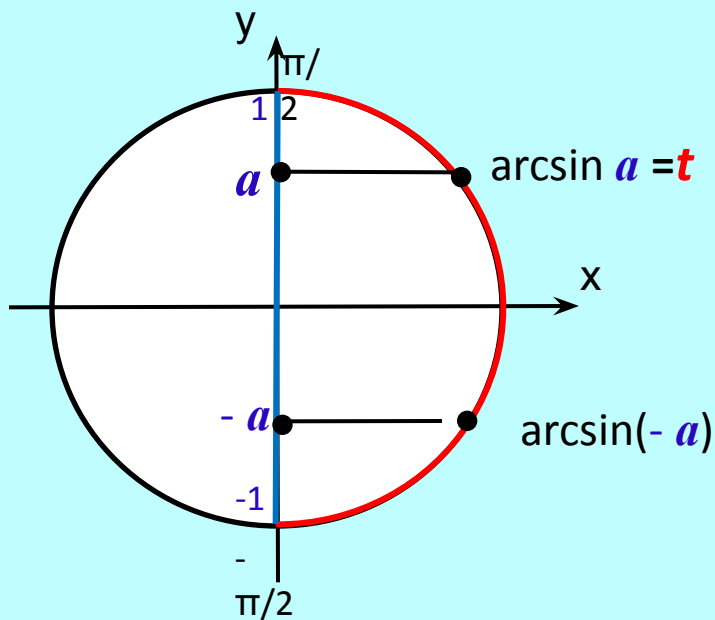
$$1) \arccos(-1) = \pi$$

$$2) \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$





# Арксинус



Арксинусом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $[-\pi/2; \pi/2]$ , что  $\sin t = a$ .  
Причём,  $|a| \leq 1$ .

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

Примеры:

$$1) \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3) \arcsin 0 = 0$$

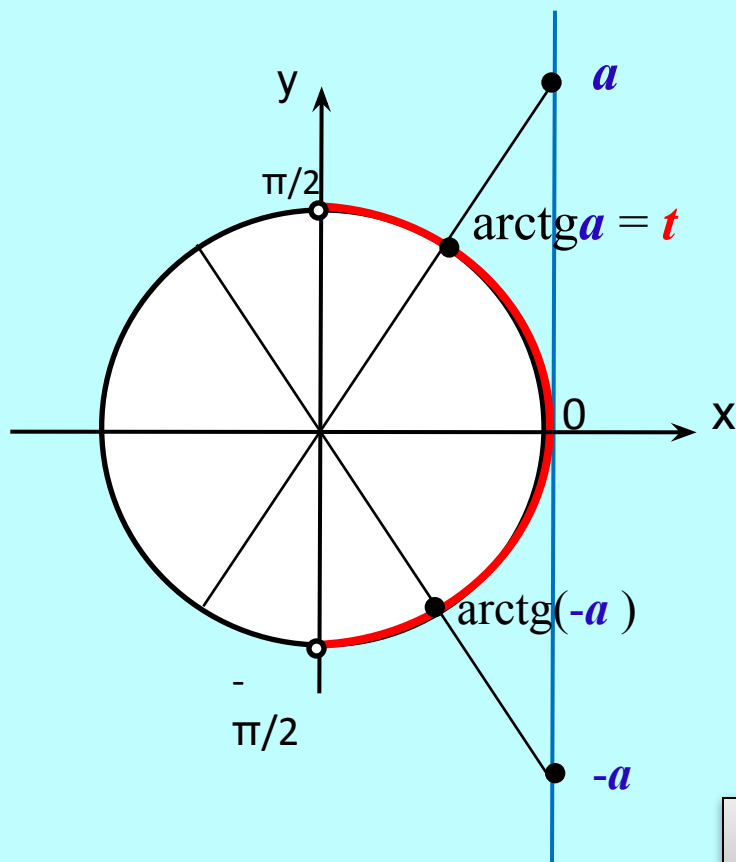
$$2) \arcsin \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$$







# Арктангенс



Примеры:

Арктангенсом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $(-\pi/2; \pi/2)$ , что  $tg t = a$ .  
Причём,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\arctg(-a) = -\arctg a$$

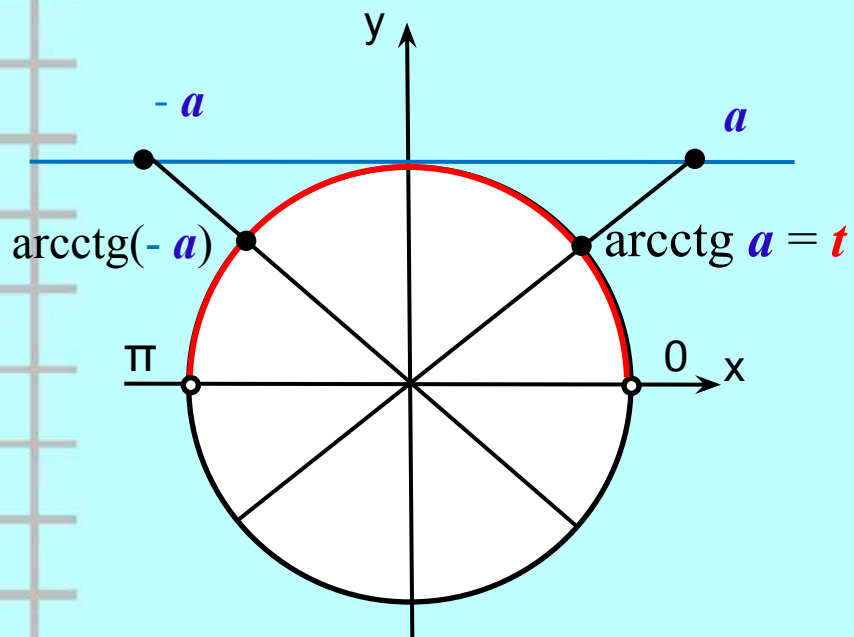
$$1) \arctg \sqrt{3}/3 = \pi/6$$

$$2) \arctg(-1) = -\pi/4$$





# Арккотангенс



Арккотангенсом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $(0; \pi)$ , что  $\text{ctg } t = a$ .  
Причём,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\text{arccctg}(-a) = \pi - \text{arccctg } a$$

Примеры:

$$1) \text{arccctg}(-1) = 3\pi/4$$

$$2) \text{arccctg}\sqrt{3} = \pi/6$$





# Повторение

1 вариант

- $\sin (-\pi/3)$
- $\cos 2\pi/3$
- $\operatorname{tg} \pi/6$
- $\operatorname{ctg} \pi/4$
- $\cos (-\pi/6)$
- $\sin 3\pi/4$
- $\arcsin \sqrt{2}/2$
- $\arccos 1$
- $\arcsin (-1/2)$
- $\arccos (-\sqrt{3}/2)$
- $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$

2 вариант

- $\cos (-\pi/4)$
- $\sin \pi/3$
- $\operatorname{ctg} \pi/6$
- $\operatorname{tg} \pi/4$
- $\sin (-\pi/6)$
- $\cos 5\pi/6$
- $\arccos \sqrt{2}/2$
- $\arcsin 1$
- $\arccos (-1/2)$
- $\arcsin (-\sqrt{3}/2)$
- $\operatorname{arctg} \sqrt{3}/3$



# Повторение

Ответы 1 вариант

- -  $\sqrt{3}/2$
- -  $1/2$
- $\sqrt{3}/3$
- 1
- $\sqrt{3}/2$
- $\sqrt{2}/2$
- $\pi/4$
- 0
- -  $\pi/6$
- $5\pi/6$
- $\pi/3$



Ответы 2 вариант

- $\sqrt{2}/2$
- $\sqrt{3}/2$
- $\sqrt{3}$
- 1
- -  $1/2$
- -  $\sqrt{3}/2$
- $\pi/4$
- $\pi/2$
- $2\pi/3$
- -  $\pi/3$
- $\pi/6$



# Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$1. \cos t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

1)  $\cos t = 0$   
 $t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2)  $\cos t = 1$   
 $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3)  $\cos t = -1$   
 $t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$





# Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

## 2. $\sin t = a$ , где $|a| \leq 1$

$$t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ИЛИ

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

**Частные случаи**

1)  $\sin t = 0$

$$t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2)  $\sin t = 1$

$$t = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3)  $\sin t = -1$

$$t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$





## Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$3. \operatorname{tg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4. \operatorname{ctg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



# При каких значениях $X$ имеет смысл выражение:

## 1. $\arcsin(2x+1)$

$$\begin{aligned} 1) \quad & -1 \leq 2x+1 \leq 1 \\ & -2 \leq 2x \leq 0 \\ & -1 \leq x \leq 0 \\ \text{Ответ: } & [-1; 0] \end{aligned}$$

## 2. $\arccos(5-2x)$

$$\begin{aligned} 2) \quad & -1 \leq 5-2x \leq 1 \\ & -6 \leq -2x \leq -4 \\ & 2 \leq x \leq 3 \\ \text{Ответ: } & [2; 3] \end{aligned}$$

## 3. $\arccos(x^2-1)$

$$\begin{aligned} -1 \leq x^2-1 \leq 1 \\ 0 \leq x^2 \leq 2 \\ \text{Ответ:} \end{aligned}$$

$$\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

## 4. $\arcsin(4x^2-3x)$

$$\begin{aligned} -1 \leq 4x^2-3x \leq 1 \\ \begin{cases} 4x^2-3x \geq -1 \\ 4x^2-3x \leq 1 \end{cases} \\ 4x^2-3x-1 \leq 0 \\ \text{Ответ:} \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$$







## Примеры

:

$$1) \cos t = -\frac{1}{2};$$

$$t = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \operatorname{tg} t = 1;$$

$$t = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin t = 0;$$

Частный случай:  
 $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$4) \operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$$

$$t = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$





# Решение простейших уравнений

1)  $\text{tg}2x = -1$

$$2x = \text{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $-\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\cos(x+\pi/3) = 1/2$

$$x+\pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+\pi/3 = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3)  $\sin(\pi - x/3) = 0$

упростим по формулам

приведения

$$\sin(x/3) = 0$$

частный случай

$$x/3 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $3\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .





# Виды тригонометрических уравнений

## 1.Сводимые к квадратным

*Решаются методом введения новой переменной*

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть  $\sin x = p$ , где  $|p| \leq 1$ , тогда  $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

**Пример.** Решить уравнение:  $2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$ .

**Решение.** Используя формулы приведения, имеем:

$$2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \cos(x + \pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену:  $\cos(x + \pi/6) = y$ , тогда  $2y^2 - 3y + 1 = 0$ ,

находим корни:  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 1/2$ , откуда следуют два случая:

$$1). \cos(x + \pi/6) = 1, \quad 2). \cos(x + \pi/6) = 1/2,$$

$$x + \pi/6 = 2\pi k,$$

$$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k;$$

$$x + \pi/6 = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n,$$

$$x_2 = \pm \pi/3 - \pi/6 + 2\pi n.$$



# Виды тригонометрических уравнений

1) Первой степени:

*Решаются делением на  $\cos x$  (или  $\sin x$ ) и методом введения новой переменной.*

$$\mathbf{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0}$$

Т.к.  $\sin x$  и  $\cos x$  одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на  $\cos x$  (или на  $\sin x$ ). Получим: простое уравнение

$$\mathbf{a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m}$$

Пример. Решите уравнение  $\sin x + 2\cos x = 0$ .

Решение: Разделим обе части уравнения на  $\cos x$ .

$$\text{Получим } \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -2$$

$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$



# Виды тригонометрических уравнений

## 2) Однородные уравнения второй степени:

*Решаются делением на  $\cos^2 x$  (или  $\sin^2 x$ ) и методом введения новой переменной.*

$$\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$$

Разделим обе части на  $\cos^2 x$ . Получим квадратное уравнение:

$$\mathbf{a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.}$$

**П р и м е р .** Решить уравнение:  $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$ .

**Р е ш е н и е .**  $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$ ,

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ отсюда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения:  $y_1 = -1, y_2 = -3$ , отсюда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad 2) \operatorname{tg} x = -3,$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



# Виды тригонометрических уравнений

## 3. Уравнение вида:

$$A \sin x + B \cos x = C, \quad A, B, C \neq 0$$

$$1. \sin 2x = \sin x$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi k, k \in Z. \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

$$2. 3 \sin x = 2 \cos^2 x$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = t$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \quad t = -2$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \sin x = -2$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \quad \text{Нет решения.}$$

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Решение. Перенесём все члены уравнения

влево:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0,$$

$$\sin x - 2 \sin^2(x/2) = 0,$$

$$2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) - 2 \sin^2(x/2) = 0,$$

$$2 \sin(x/2) \cdot [\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

$$1). \sin(x/2) = 0, \quad 2). \cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$$

$$x/2 = \pi k,$$

$$\tan(x/2) = 1,$$

$$x_1 = 2\pi k;$$

$$x/2 = \arctan 1 + \pi n,$$

$$x/2 = \pi/4 + \pi n,$$

$$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$$



# Виды тригонометрических уравнений

## 4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$A \sin x + B \cos x = C$$

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5, x \in \mathbb{Z}$$

$$3 \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 4 \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 - 4\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 5 - 5\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уравнения.

Проверка

Если  $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,

$$3 \sin(\pi + 2\pi n) + 4 \cos(\pi + 2\pi n) = 5, x \in \mathbb{Z}$$

$$0 + 4(-1) = 5 \text{ - не верно, значит}$$

$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  не является корнями исходного уравнения

Ответ:  $x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



# Формулы.

## Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$ ;  
Проверка  
обязательна!

## Понижение степени.

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= (1 + \cos 2x) : 2 \\ \sin^2 x &= (1 - \cos 2x) : 2 \end{aligned}$$

## Метод вспомогательного аргумента.

$a \cos x + b \sin x$  заменим на  $C \sin(x + \phi)$ , где

$$C = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\sin \phi = \frac{a}{C}; \quad \cos \phi = \frac{b}{C}; \quad \phi - \text{вспомогательный аргумент.}$$





# Правил

а.

- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.





## Потеря корней, лишние корни.

### 1. Потеря корней:

- делим на  $g(x)$ .
- опасные формулы (универсальная подстановка).

*Этими операциями мы сужаем область определения.*

### 2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на  $g(x)$  (избавляемся от знаменателя).

*Этими операциями мы расширяем область определения.*





# Решение тригонометрических уравнений по известным алгоритмам

Вариант 1.

На «3»

- $3 \sin x + 5 \cos x = 0$
- $5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$

На «4»

- $3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$
- $5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$

На «5»

- $2 \sin x - 5 \cos x = 3$
- $1 - 4 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 0$

Вариант 2.

На «3»

- $\cos x + 3 \sin x = 0$
- $6 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

На «4»

- $2 \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$
- $4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 1$

На «5»

- $2 \sin x - 3 \cos x = 4$
- $2 \sin^2 x - 2 \sin 2x + 1 = 0$



Спасибо

За

внимание!