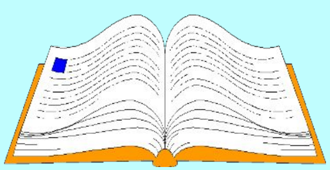
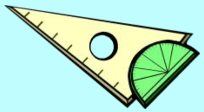
РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

$$a\sin^2 x + c \cdot \sin x\cos x + b\cos^2 x = 0$$





Содержание.

ЦЕЛЬ:

 Повторить решение тригонометрических уравнений.

- 1. Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.
- 2. Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений.
- 3. Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.

 Выделение основных проблем при решении этих уравнений:

- Потеря корней.
- Посторонние корни.
- Отбор корней.

Устная работа.

- Решите уравнения
- А) $3x - 5 = 7$
- Б) $x^2 - 8x + 15 = 0$
- В) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- Г) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- Д) $3x^2 - 12 = 0$

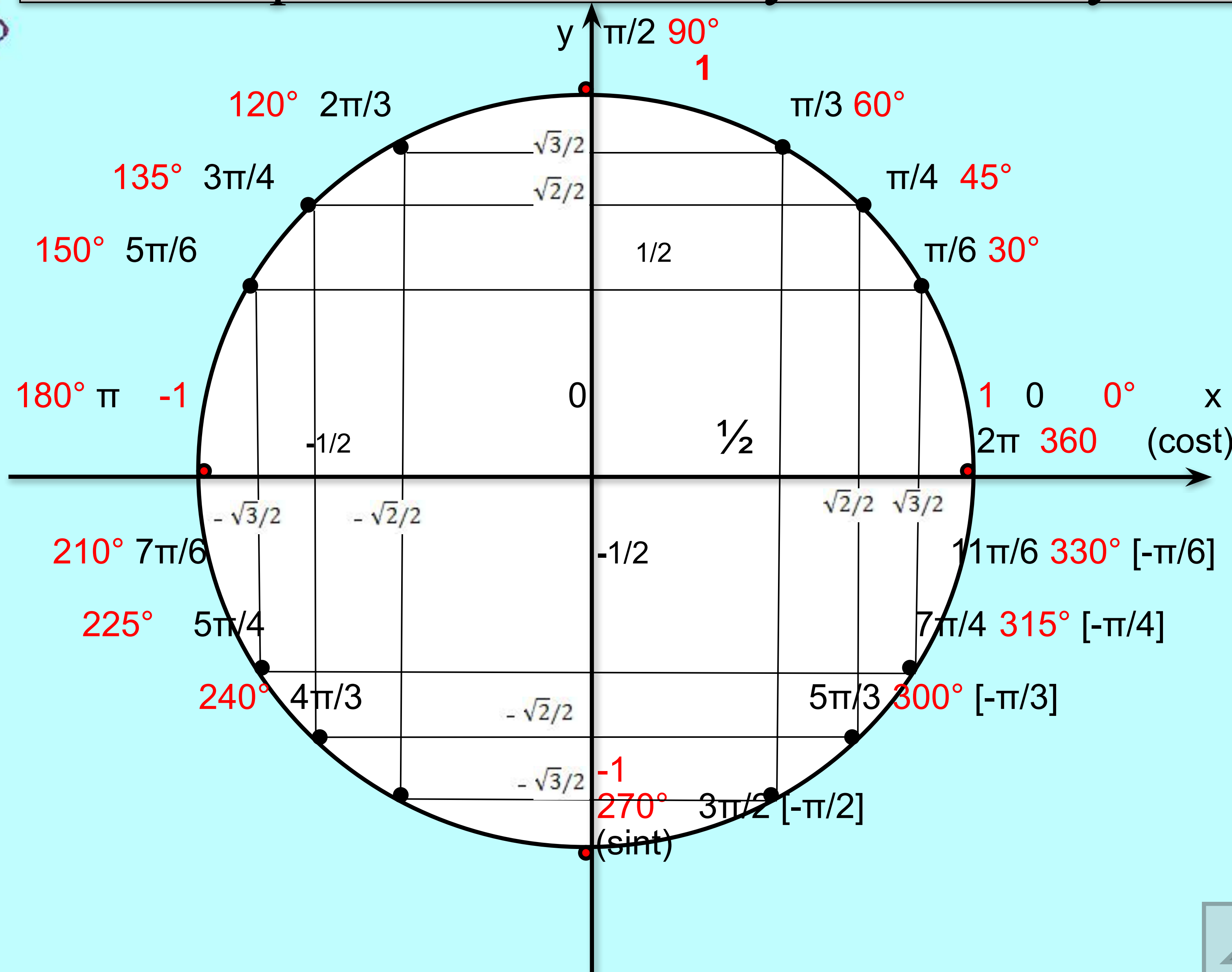
- Ответы
- 4
- 3; 5
- 0,5
- -2; -1; 1; 2
- -2; 2

Устная работа

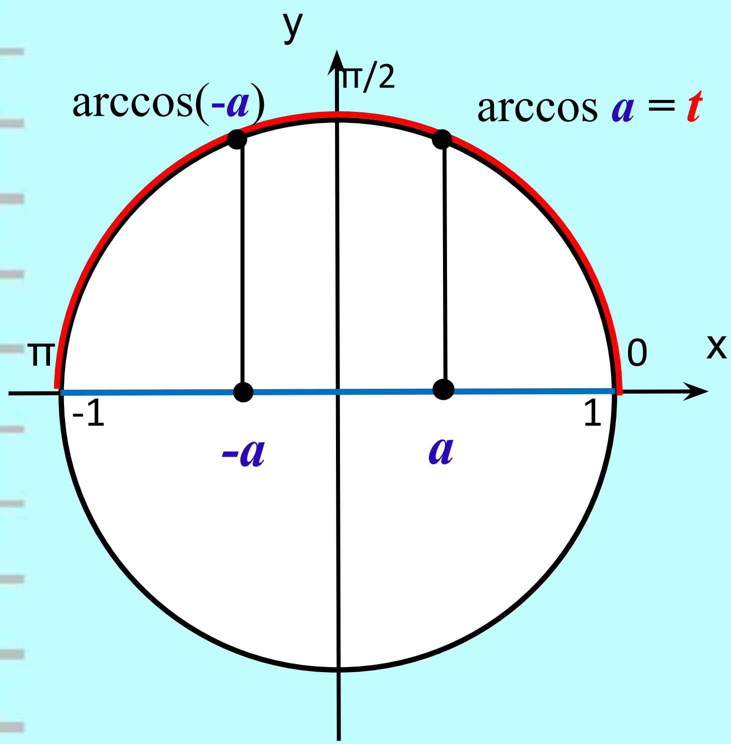
- Упростите выражения
- А) (sin a – 1) (sin a + 1)
- Б) $\sin^2 a - 1 + \cos^2 a$
- В) $\sin^2 a + tg\ a\ ctg\ a + \cos^2 a$
- Г) $\sqrt{1 - 2tgx + tg^2x}$

- Ответы
- $- \cos^2 a$
- 0
- 2
- $|1 - tg\ x|$

Повторим значения синуса и косинуса



Арккосинус



Арккосинусом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из [0;π], что **cos *t* = *a*.**

Причём, | ***a*** |≤ **1**.

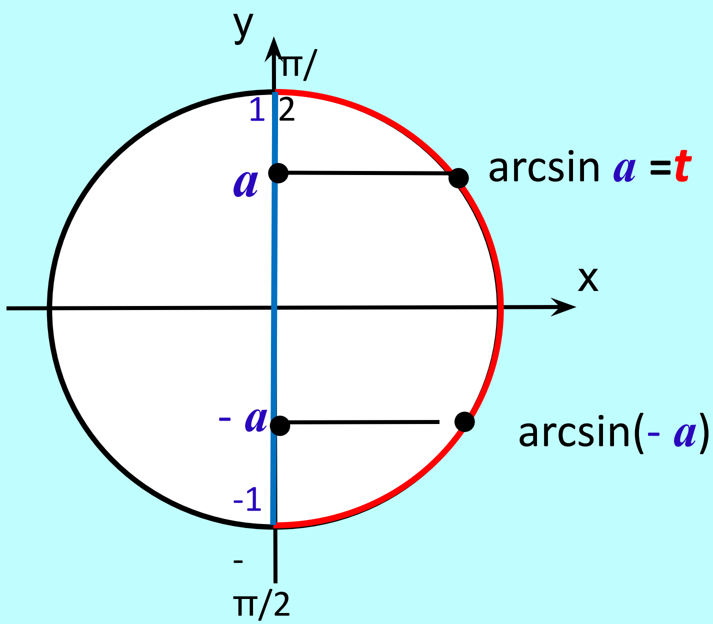
arccos(- ***a***) = π- arccos ***a***

Примеры:

1)arccos(-1) **= π**

2)arccos($\frac{\sqrt{3}}{2}$) $= \frac{\pi}{6}$

Арксинус



Арксинусом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из **[-π/2;π/2]**, что ***sin t = a.***
Причём, | ***a*** |≤ **1**.

arcsin(- *a*)= - arcsin *a*

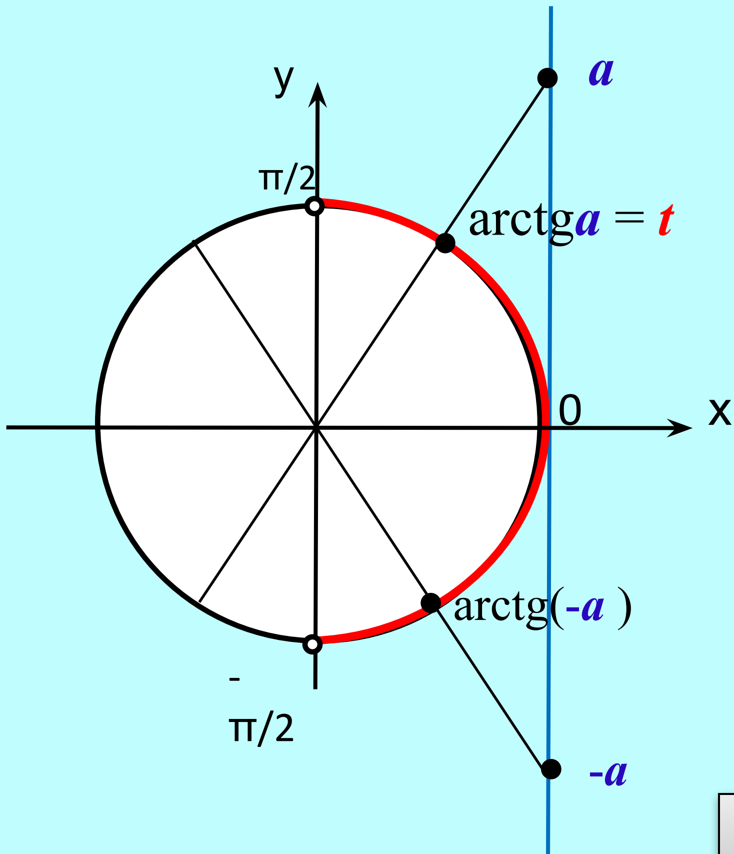
Примеры:

$$1)\ arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3)arcsin0 = 0$$

$$2)arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Арктангенс



Арктангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из (-π/2;π/2), что ***tg t* = *a* .**
Причём, ***a*** **Є R.**

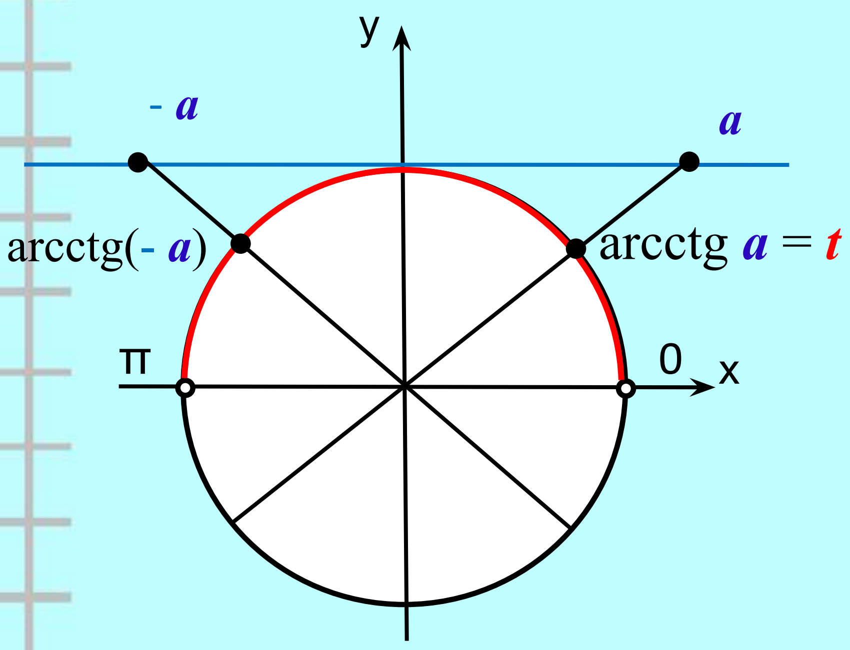
arctg(-***a***) = - arctg ***a***

Примеры:

1) arctg√3/3 = | π/6

2) arctg(-1) = | -π/4

Арккотангенс



Арккотангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из (0;π), что c***tg t*** = ***a*.**
Причём, ***a*** ЄR .

arcctg(- ***a***) = π – arcctg ***a***

Примеры:

1) arcctg(-1) = 3π/4

2) arcctg√3 = π/6

Повторение

1 вариант

- $\sin(-\pi/3)$
- $\cos 2\pi/3$
- $\mathrm{tg}\ \pi/6$
- $\mathrm{ctg}\ \pi/4$
- $\cos(-\pi/6)$
- $\sin 3\pi/4$
- $\arcsin \sqrt{2}/2$
- $\arccos 1$
- $\arcsin(-1/2)$
- $\arccos(-\sqrt{3}/2)$
- $\mathrm{arctg} \sqrt{3}$

2 вариант

- $\cos(-\pi/4)$
- $\sin \pi/3$
- $\mathrm{ctg}\ \pi/6$
- $\mathrm{tg}\ \pi/4$
- $\sin(-\pi/6)$
- $\cos 5\pi/6$
- $\arccos \sqrt{2}/2$
- $\arcsin 1$
- $\arccos(-1/2)$
- $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$
- $\mathrm{arctg} \sqrt{3}/3$

Повторение

Ответы 1 вариант

- $-\sqrt{3}/2$
- $-1/2$
- $\sqrt{3}/3$
- 1
- $\sqrt{3}/2$
- $\sqrt{2}/2$
- $\pi/4$
- 0
- $-\pi/6$
- $5\pi/6$
- $\pi/3$

Ответы 2 вариант

- $\sqrt{2}/2$
- $\sqrt{3}/2$
- $\sqrt{3}$
- 1
- $-1/2$
- $-\sqrt{3}/2$
- $\pi/4$
- $\pi/2$
- $2\pi/3$
- $-\pi/3$
- $\pi/6$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

1. $\cos t = a$, где $|a| \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = \pm\arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) <u>cost=0</u>
$t = \pi/2+\pi k,\ k \in Z$

2) <u>cost=1</u>
$t = 2\pi k,\ k \in Z$

3) <u>cost = -1</u>
$t = \pi+2\pi k,\ k \in Z$

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

2. sint = *a*, *где* | *a* |≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin \boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) <u>sint=0</u>

   t = πk, kЄZ

2) <u>sint=1</u>

   t = π/2+2πk, kЄZ

3) <u>sint = - 1</u>

   t = - π/2+2πk, kЄZ

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

3. $\mathrm{tg}\, t = a, \; a \in R$

$t = \mathrm{arctg}\, a + \pi k, \; k \in Z$

4. $\mathrm{ctg}\, t = a, \; a \in R$

$t = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k, \; k \in Z$

При каких значениях X имеет смысл выражение:

1.$\arcsin(2x+1)$

1) $-1 \le \mathbf{2x+1} \le 1$

$-2 \le \mathbf{2x} \le 0$

$-1 \le \mathbf{x} \le 0$

Ответ: $[-1;0]$

2.$\arccos(5-2x)$

2) $-1 \le \mathbf{5-2x} \le 1$

$-6 \le \mathbf{-2x} \le -4$

$2 \le \mathbf{x} \le 3$

Ответ: $[2;3]$

3.$\arccos(x^2-1)$

$-1 \le \mathbf{x^2-1} \le 1$

$0 \le \mathbf{x^2} \le 2$

Ответ:

$\boxed{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]}$

4.$\arcsin(4x^2-3x)$

$-1 \le 4x^2-3x \le 1$

$\begin{cases} 4x^2-3x \ge -1 \\ 4x^2-3x \le 1 \end{cases}$

$4x^2-3x-1 \le 0$

Ответ:

$\boxed{\left[-\frac{1}{4};1\right]}$

Примеры
:

1) $\cos t = -\frac{1}{2}$;

$t = \pm\arccos(-1/2) + 2\pi k,\ k \in Z$

$t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

2) $\sin t = 0$;

Частный случай:
$t = \pi k,\ k \in Z$

3) $\operatorname{tg} t = 1$;

$t = \operatorname{arctg} 1 + \pi k,\ k \in Z$

$t = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

4) $\operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$

$t = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in Z$

$t = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Решение простейших уравнений

1) $tg2x = -1$

$2x = arctg\,(-1) + \pi k,\ k \in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$.

2) **$\cos(x+\pi/3) = ½$**

$x+\pi/3 = \pm\arccos 1/2 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

3) **$\sin(\pi - x/3) = 0$**

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

частный случай

$x/3 = \pi k,\ k \in Z$

$x = 3\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $3\pi k,\ k \in Z$.

Виды тригонометрических уравнений

1.Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

$$a\cdot\sin^2x + b\cdot\sin x + c=0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \le 1$, тогда $a\cdot p^2 + b\cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6) - 3\sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6) - 3\cos(x+\pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6) = 1$, 2). $\cos(x+\pi/6) = 1/2$,

$x+\pi/6 = 2\pi k$, $x+\pi/6 = \pm\arccos(1/2) + 2\pi n$,

$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k$; $x_2 = \pm\pi/3 - \pi/6 + 2\pi n$.

Виды тригонометрических уравнений

1)Первой степени:

Решаются делением на cos x (или sinx) и методом введения новой переменной.

$$\mathbf{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0}$$

Т.к. sinx и cosx одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на cosx (или на sinx). Получим: простое уравнение

$$a \cdot tgx + b = 0 \text{ или } tgx = m$$

Пример. Решите уравнение sinx + 2cosx = 0.

Решение: Разделим обе части уравнения на cosx.

Получим $\frac{\sin x}{\cos x} + 2\frac{\cos x}{\cos x} = 0$

$$tgx + 2 = 0$$

$$tgx = -2$$

$$x = -arctg2 + \pi k,\ k \in Z$$

Ответ: $-arctg2 + \pi k,\ k \in Z$

Виды тригонометрических уравнений

2) Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$\mathbf{a\cdot\sin^2x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2x = 0}$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a\cdot tg^2x + b\cdot tgx + c = 0.$$

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$tg^2 x + 4\, tg\, x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

1) $tg\, x = -1$, 2) $tg\, x = -3$,

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -arctg3 + \pi n,\ n \in Z$

Виды тригонометрических уравнений

3. Уравнение вида:

$A\sin x + B\cos x = C$. $A, B, C \neq 0$

$1.\ \sin 2x = \sin x$

$2\sin x\cos x - \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi k, k \in Z.$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$

$2.\ 3\sin x = 2\cos^2 x$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\sin x = t$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ t = -2

$\sin x = \frac{1}{2}$ sinx = -2

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$ Нет решения.

$\sin x + \cos x = 1$.

Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:

$\sin x + \cos x - 1 = 0$,

$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0$,

$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0$,

$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0$,

1). $\sin(x/2) = 0$,   2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0$,

$x/2 = \pi k$, $\tan(x/2) = 1$,

$x_1 = 2\pi k$; $x/2 = \arctan 1 + \pi n$,

$x/2 = \pi/4 + \pi n$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

Виды тригонометрических уравнений

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки

A sinx + B cosx = C

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$$

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6tg\frac{x}{2}+4-4tg^2\frac{x}{2}-5-5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2}-6tg\frac{x}{2}+1=0 \\ 1+tg^2\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уровнения.

$$\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

Проверка

Если $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$,

$$3\sin(\pi+2\pi n)+4\cos(\pi+2\pi n) = 5, x \in Z$$

$0+4(-1)=5$ - не верно, значит

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ не является корнями исходного уравнения

Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$;
Проверка обязательна!

Понижение степени.

$\cos^2 x$ *= (1 + cos2x) : 2*

$\sin^2 x$ *= (1 – cos 2x) : 2*

Метод вспомогательного аргумента.

a cosx +b sinx заменим на C sin(x+ϕ), где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$;

sinϕ = $\frac{a}{C}$; cosϕ = $\frac{b}{C}$; ϕ - вспомогательный аргумент.

Правил а.

- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.

Потеря корней, лишние корни.

1.Потеря корней:

- делим на g(x).
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на g(x) (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Решение тригонометрических уравнений по известным алгоритмам

Вариант 1.

На «3»

- $3 \sin x + 5 \cos x = 0$
- $5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$

На «4»

- $3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$
- $5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$

На «5»

- $2 \sin x - 5 \cos x = 3$
- $1 - 4 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 0$

Вариант 2.

На «3»

- $\cos x + 3 \sin x = 0$
- $6 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

На «4»

- $2 \sin^2 x – \sin x \cos x = 0$
- $4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x – 4 \cos^2 x = 1$

На «5»

- $2 \sin x - 3 \cos x = 4$
- $2 \sin^2 x - 2 \sin 2x + 1 = 0$

Спасибо
За
внимание!