



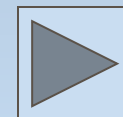
«Касательная к графику функции»

ВЫПОЛНИЛ: учитель математики высшей
категории МОУ «СОШ №1»
Города Магнитогорска
Пупкова Татьяна Владимировна

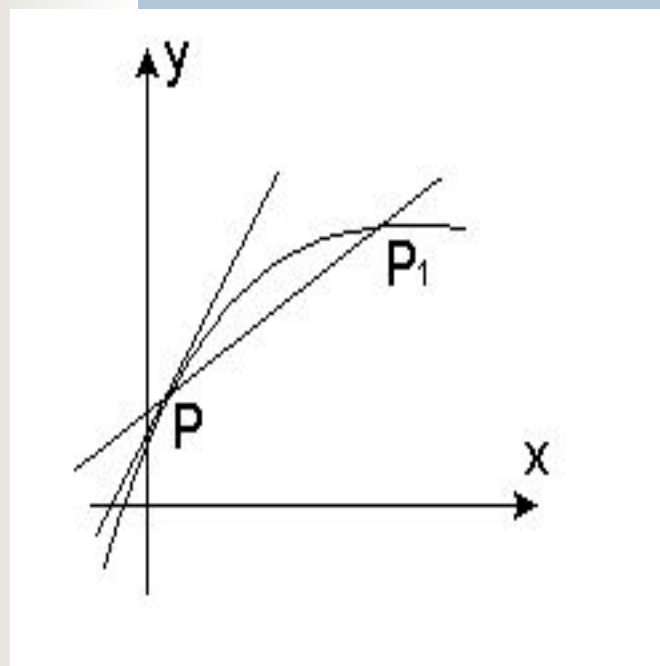


Содержание

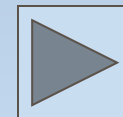
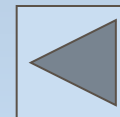
1. Определение касательной к графику функции.
2. Уравнение касательной к графику функции в общем виде.
3. Алгоритм составления касательной к графику функции.
4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
5. Касательная проходит через точку, лежащую на данной прямой.
6. Касательная проходит через точку, не лежащую на данной прямой.
7. Касательная проходит под некоторым углом к данной прямой.
8. Касательная является общей для двух кривых.
9. Является ли данная прямая касательной к графику функции $y=f(x)$?



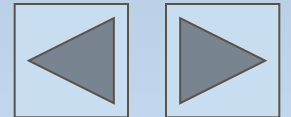
Определение касательной к графику функции $y=f(x)$



Пусть дана некоторая кривая и точка P на ней. Возьмем на этой кривой другую точку P_1 и проведем прямую через точки P и P_1 . Эту прямую называют секущей. Будем приближать точку P_1 к P . Положение секущей PP_1 будет меняться (стремиться к точке P) предельное положение прямой PP_1 и будет касательной к кривой в точке P .

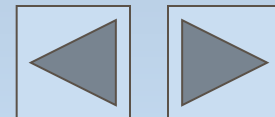


Уравнение вида $y=f(a)+f'(a)(x-a)$
является уравнением касательной
к графику функции.



Алгоритм составления касательной к графику функции $y=f(x)$

1. Обозначить буквой a абсциссу точки касания.
2. Найти $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a , $f(a)$, $f'(a)$ в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

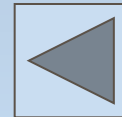


Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

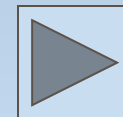
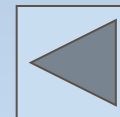
Пусть даны две прямые: $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$.

Если $k_1 = k_2$, то прямая y_1 параллельна y_2 .

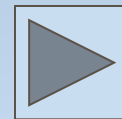
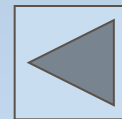
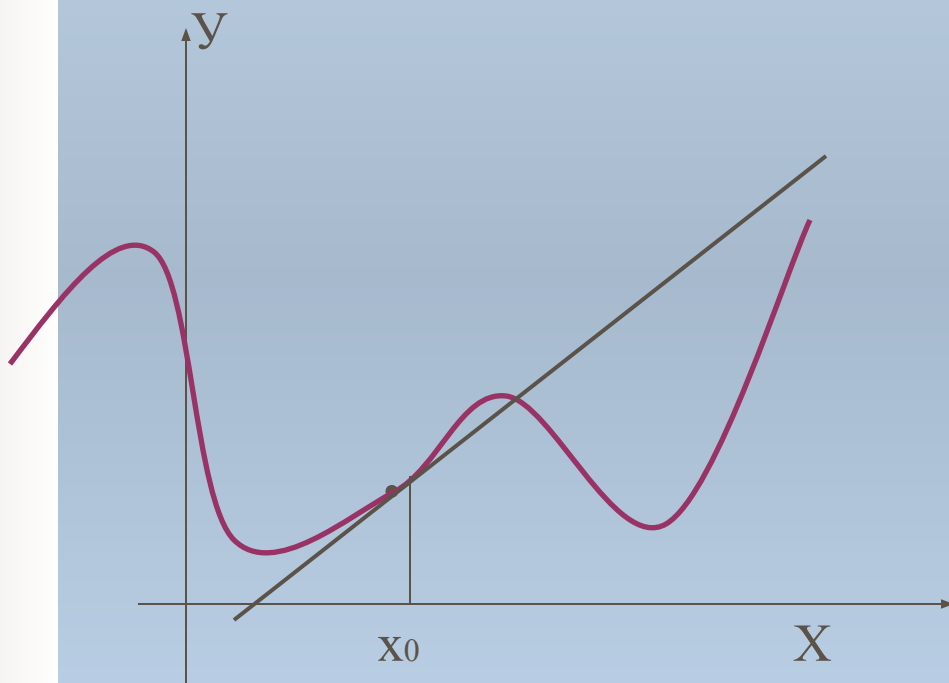
Если $k_1 \cdot k_2 = -1$, то данные прямые взаимно перпендикулярны



Рассмотрим возможные типы задач на касательную



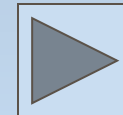
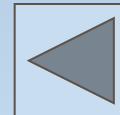
1. Касательная проходит через точку, лежащую на данной кривой





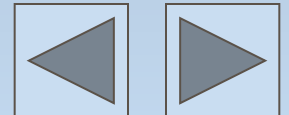
Даны дифференцируемая функция $y=f(x)$ и

- 1) абсцисса точки касания;
- 2) ордината точки касания;
- 3) абсцисса точки касания задана как пересечение двух графиков функций;
- 4) абсцисса точки касания задана как корень данного уравнения.



Решение таких задач сводится:

- 1) к последовательному отысканию $f(a)$ и $f'(a)$;
- 2) решая уравнение $f(a)=y_0$, находим a ;
- 3) находим точки пересечения двух графиков; решая уравнение $f(x)=g(x)$;
- 4) находим корень данного уравнения.



Ключевая задача 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

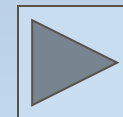
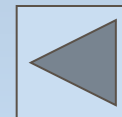
Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания a , тогда $a=2$.

2. Найдем $f(a)$: $f(a)=2^2-2\cdot 2-3$, $f(a)=-3$.

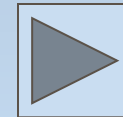
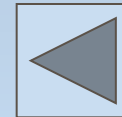
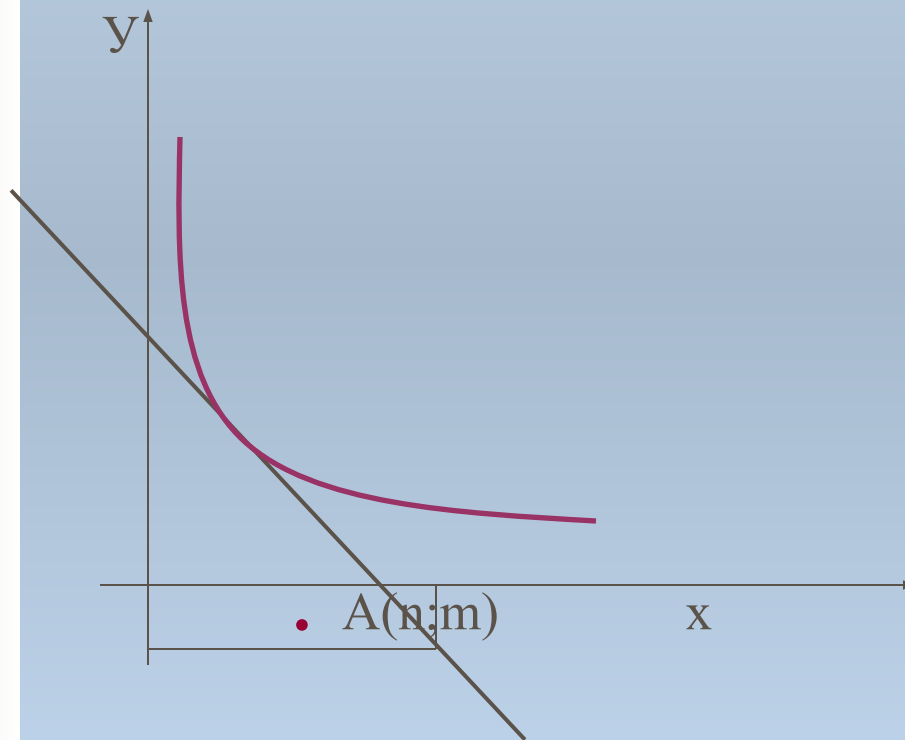
3. Найдем $f'(x)$ и $f'(a)$: $f'(x)=2x-2$, $f'(a)=2$.

4. Подставим найденные числа a , $f(a)$, в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=-3+2(x-2)$,
 $y=-3+2x-4$, $y=2x-7$ – уравнение касательной.

Ответ: $y=2x-7$.

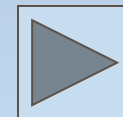
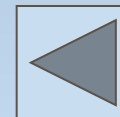


2. Касательная проходит через точку, не лежащую на данной кривой



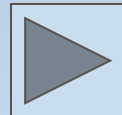
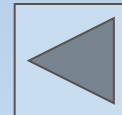
Даны дифференцируемая функция $y=f(x)$ и

- 1) точка $A(n;m)$ через которую проходит касательная;
- 2) точка $A(n;m)$ задана как пересечение двух графиков функций;
- 3) точка $A(n;m)$ задана как корень системы уравнений.



Решение таких задач основывается на том, что координаты точки $A(n;m)$ должны удовлетворять искомому уравнению касательной:

- 1) решая уравнение $m=f(a)+f'(a)(m-a)$ найдем a и, таким образом, приходим к задаче первого типа;
- 2) находим точки пересечения двух графиков, решая уравнения $f(x)=g(x)$ и $y=g(x)$ или $y=f(x)$;
- 3) находим корень данной системы уравнений.



Ключевая задача 2. Напишите уравнение всех касательных к графику функции $y = x^2 + 4x + 6$ проходящих через точку $M(-3; -1)$.

Решение. 1. Точка $M(-3; -1)$ не является точкой касания, так как $f(-3) = 3$.

2. a – абсцисса точки касания.

3. Найдем $f(a)$: $f(a) = a^2 + 4a + 6$.

4. Найдем $f'(x)$ и $f'(a)$: $f'(x) = 2x + 4$, $f'(a) = 2a + 4$.

5. Подставим числа a , $f(a)$, в общее уравнение касательной

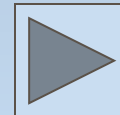
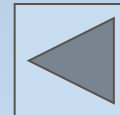
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$: $y = a^2 + 4a + 6 + (2a + 4)(x - a)$ – уравнение касательной.

Так как касательная проходит через точку $M(-3; -1)$, то $-1 = a^2 + 4a + 6 + (2a + 4)(-3 - a)$,
 $a^2 + 6a + 5 = 0$, $a = -5$ или $a = -1$.

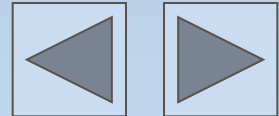
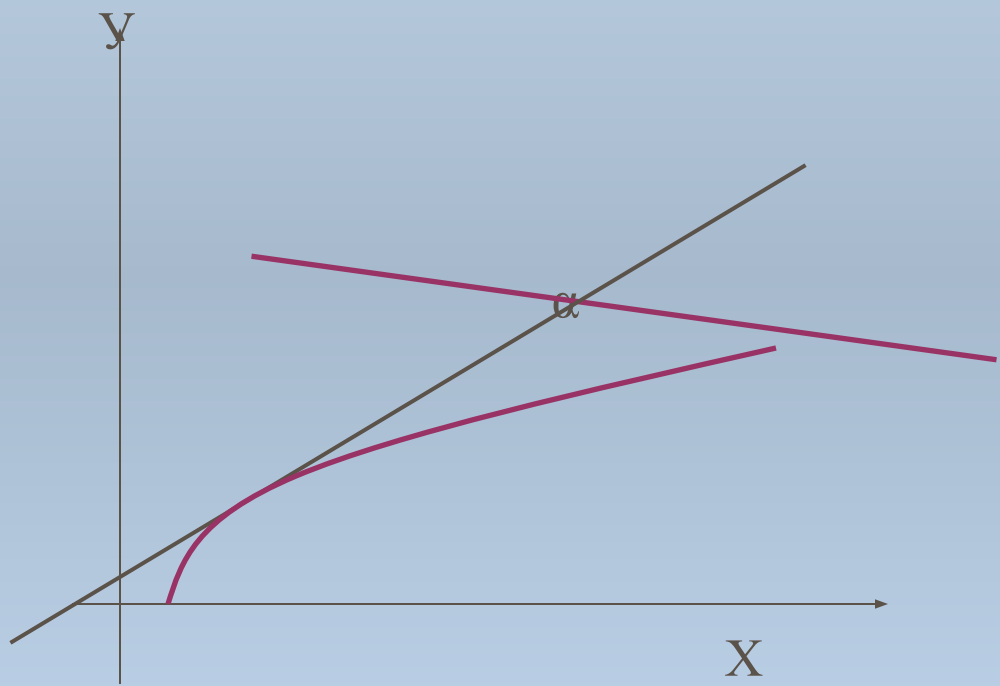
Если $a = -5$, то $y = -6x - 19$ – уравнение касательной.

Если $a = -1$, $y = 2x + 5$ – уравнение касательной.

Ответ: $y = -6x - 19$, $y = 2x + 5$.



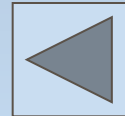
3. Касательная проходит под некоторым углом к данной прямой



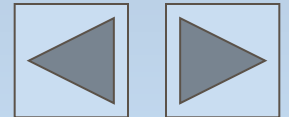


Даны дифференцируемая функция $y=f(x)$ и

- 1) значение производной в точке касания $f'(a)$;
- 2) указан угловой коэффициент касательной;
- 3) задан угол, между касательной к графику функции и данной прямой.



Решая уравнение $f'(a)=k$ или $f'(a)=\operatorname{tg}\alpha$
(если задан угол α) находим
ВОЗМОЖНЫЕ значения a .



Ключевая задача 3. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y=x^2-2x-8$, параллельных прямой $y=-4x-4$.

Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания a .

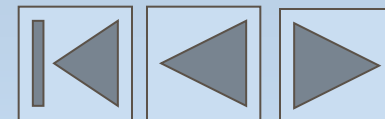
2. Найдем $f(a)$: $f(a)=a^2-2a-8$.

3. Найдем $f'(x)$ и $f'(a)$: $f'(x)=2x-2$, $f'(a)=2a-2$.

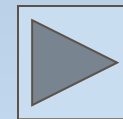
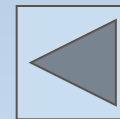
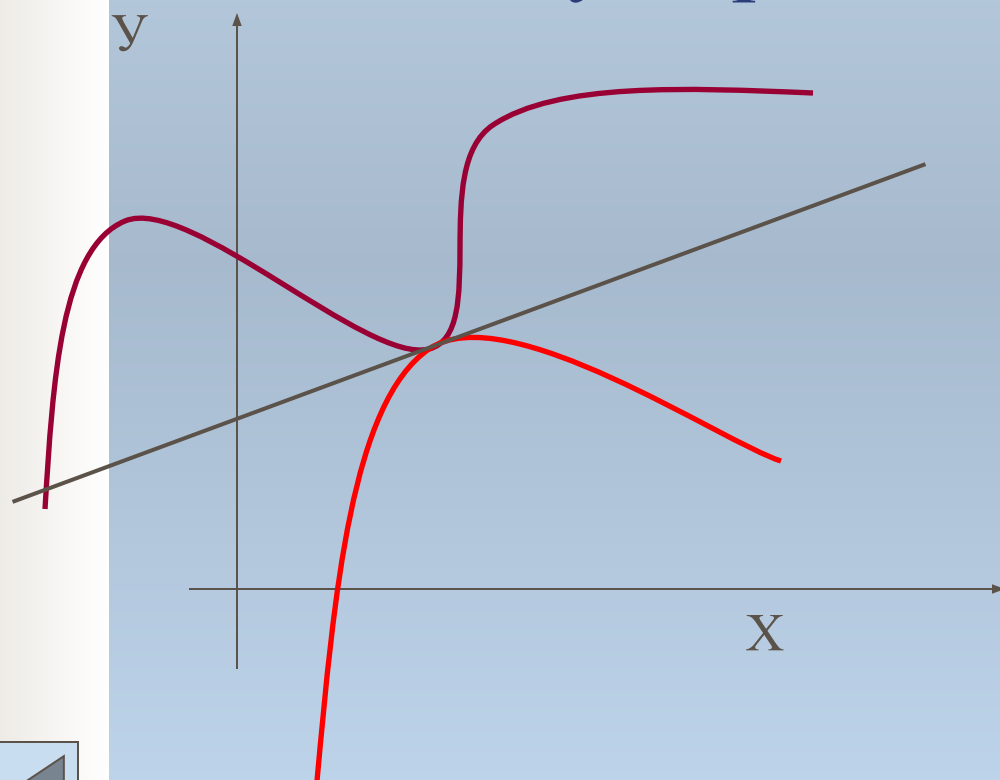
Но, с другой стороны, $f'(a)=-4$ (условие параллельности). Решив уравнение $2a-2=-4$, получим $a=-1$, $f(a)=-5$.

Подставим найденные числа a , $f(a)$, в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=-5-4(x+1)$,
 $y=-4x-9$ – уравнение касательной.

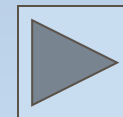
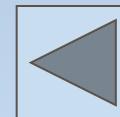
Ответ: $y=-4x-9$.



4. Касательная является общей для двух кривых



Даны дифференцируемые функция $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Нужно найти уравнения общих касательных к графику этих функций.

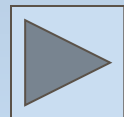
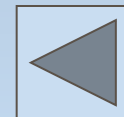


1 способ.

Такие задачи можно решать с помощью необходимого и достаточного признака того, что прямая $y=kx+b$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Тогда задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} f(m)=km+b, \\ g(n)=kn+b, \\ f'(m)=k, \\ g'(n)=k, \end{cases}$$

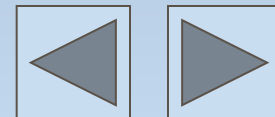
где $(m;f(m))$ и $(n;g(n))$ – точки касания искомой прямой с графиками функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ соответственно. Решив систему, получим возможные значения k и b и запишем уравнения общих касательных в виде $y=kx+b$.



2 способ.

- 1) Находим уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой a .
- 2) Находим уравнение касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой a .
- 3) Полученные прямые должны совпадать, т. е. решаем систему:

$$\begin{cases} k_1=k_2, \\ b_1=b_2. \end{cases}$$



Ключевая задача 4. Напишите уравнения всех общих касательных к графикам функций $y=x^2+x+1$ и $y=0,5(x^2+3)$.

Решение. I 1. a – абсцисса точки касания графика функции $y=x^2+x+1$

2. Найдем $f(a)$: $f(a)=a^2+a+1$.

3. Найдем $f'(x)$ и $f'(a)$: $f'(x)=2x+1$, $f'(a)=2a+1$.

4. Подставим a , $f(a)$, в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=a^2+a+1+(2a+1)(x-a)$, $y=(2a+1)x-a^2+1$ – уравнение касательной.

II. 1. c – абсцисса точки касания графика функции $y=0,5(x^2+3)$.

2. Найдем $f(c)$: $f(c)=0,5c^2+1,5$.

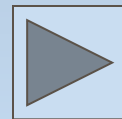
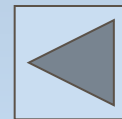
3. Найдем $f'(x)$ и $f'(c)$: $f'(x)=x$, $f'(c)=c$.


4. Подставим a , $f(a)$, в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=0,5c^2+1,5+c(x-c)$, $y=cx-0,5c^2+1,5$ – уравнение касательной.

Так как касательная общая, то
$$\begin{cases} 2a+1=c, \\ -a^2+1=-0,5c^2+1,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=1, \\ a=0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c=-3 \\ a=-2 \end{cases}$$

Итак, $y=x+1$ и $y=-3x-3$ общие касательные.

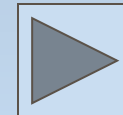
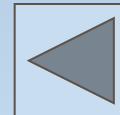
Ответ: $y=x+1$ и $y=-3x-3$.





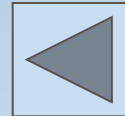
Является ли данная прямая
касательной к графику функции
 $y=f(x)$?

Даны дифференцируемая функция $y=f(x)$ и уравнение
прямой $y=kx+b$. Выясните, является ли данная прямая
касательной к графику функции $y=f(x)$.



1 способ.

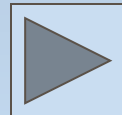
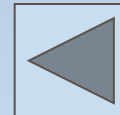
Если $y=kx+b$ – уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой a , то $f'(a)=k$. Решив это уравнение, находим a и задача сводится к решению первого типа задач на касательную. Полученное уравнение сравнивается с данным уравнением прямой.



2 способ.

Прямая $y=kx+b$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ в том и только том случае, если существует такое значение a , при котором совпадают значения данных функций и значения их производных, т. е. Совместна система

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a)=ka+b, \\ f'(a)=k. \end{array} \right.$$



Представим разработанную систему
задач в виде схемы.

