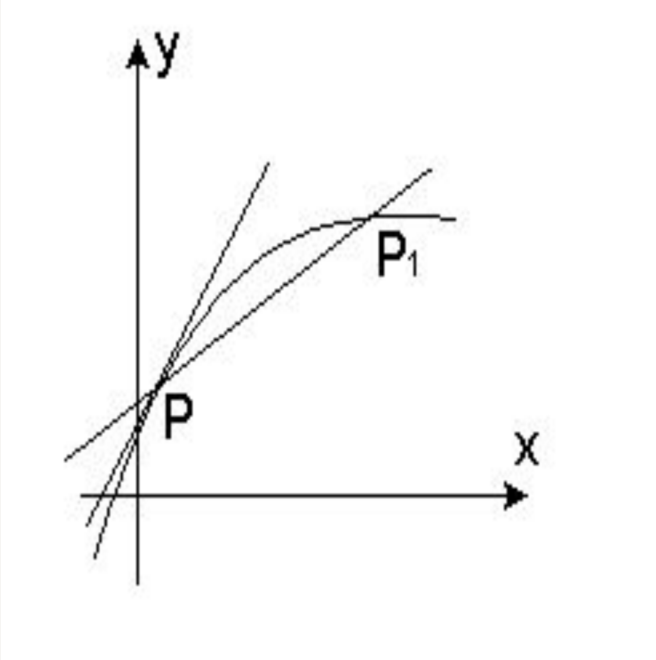
«Касательная к графику функции»

ВЫПОЛНИЛ: учитель математики высшей
категории МОУ «СОШ №1»
Города Магнитогорска
Пупкова Татьяна Владимировна

Содержание

1. Определение касательной к графику функции.
2. Уравнение касательной к графику функции в общем виде.
3. Алгоритм составления касательной к графику функции.
4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
5. Касательная проходит через точку, лежащую на данной прямой.
6. Касательная проходит через точку, не лежащую на данной прямой.
7. Касательная проходит под некоторым углом к данной прямой.
8. Касательная является общей для двух кривых.
9. Является ли данная прямая касательной к графику функции $y=f(x)$?

Определение касательной к графику функции y=f(x)



Пусть дана некоторая кривая и точка P на ней. Возьмем на этой кривой другую точку P1 и проведем прямую через точки P и P1. Эту прямую называют секущей. Будем приближать точку P1 к P. Положение секущей PP1 будет меняться (стремиться к точки P) предельное положение прямой PP1 и будет касательной к кривой в точке P.

Уравнение вида $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ является уравнением касательной к графику функции.

Алгоритм составления касательной к графику функции $y=f(x)$

1. Обозначить буквой а абсциссу точки касания.
2. Найти $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

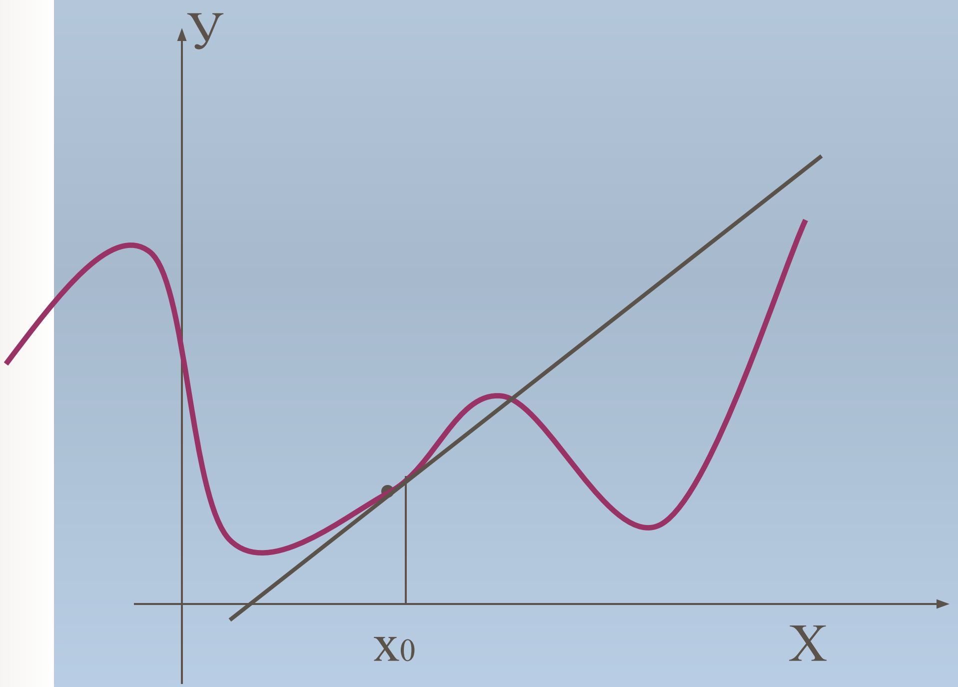
Пусть даны две прямые: $y_1=k_1x+b_1$ и $y_2=k_2x+b_2$.

Если $k_1= k_2$, то прямая y_1 параллельна y_2.

Если $k_1 \cdot k_2=-1$, то данные прямые взаимно перпендикулярны

Рассмотрим возможные типы задач на касательную

1. Касательная проходит через точку, лежащую на данной кривой



Даны дифференцируемая функция $y=f(x)$ и

1) абсцисса точки касания;
2) ордината точки касания;
3) абсцисса точки касания задана как пересечение двух графиков функций;
4) абсцисса точки касания задана как корень данного уравнения.

Решение таких задач сводится:

1) к последовательному отысканию f(a) и f'(a);
2) решая уравнение $f(a)=y_0$, находим a;
3) находим точки пересечения двух графиков; решая уравнение $f(x)=g(x)$;
4) находим корень данного уравнения.

Ключевая задача 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания а, тогда а=2.

2. Найдем f(a): $f(a)=2^2-2\cdot 2-3$, $f(a)=-3$.

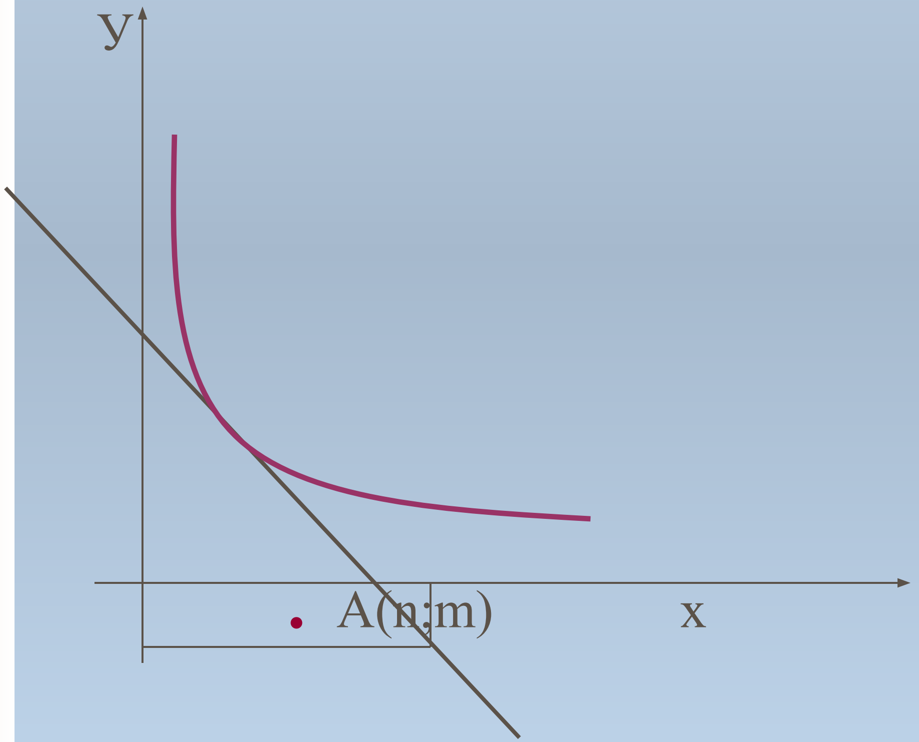
3. Найдем f' (x) и f'(a): $f'(x)=2x-2$, $f'(a)=2$.

4. Подставим найденные числа a, f(a), в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=-3+2(x-2)$,

$y=-3+2x-4$, $y=2x-7$ – уравнение касательной.

Ответ: $y=2x-7$.

2. Касательная проходит через точку, не лежащую на данной кривой



Даны дифференцируемая функция y=f(x) и

1) точка A(n;m) через которую проходит касательная;
2) точка A(n;m) задана как пересечение двух графиков функций;
3) точка A(n;m) задана как корень системы уравнений.

Решение таких задач основывается на том, что координаты точки A(n;m) должны удовлетворять искомому уравнению касательной:

1) решая уравнение m=f(a)+f'(a)(m-a) найдем a и, таким образом, приходим к задаче первого типа;
2) находим точки пересечения двух графиков, решая уравнения f(x)=g(x) и y=g(x) или y=f(x);
3) находим корень данной системы уравнений.

Ключевая задача 2. Напишите уравнение всех касательных к графику функции $y = x^2 + 4x + 6$ проходящих через точку М(-3;-1).

Решение. 1. Точка М(-3;-1) не является точкой касания, так как $f(-3)=3$.

2. a – абсцисса точки касания.

3. Найдем $f(a)$: $f(a) = a^2+4a+6$.

4. Найдем $f'(x)$ и $f'(a)$: $f'(x)=2x+4$, $f'(a)=2a+4$.

5. Подставим числа a, $f(a)$, в общее уравнение касательной

$y= f(a)+ f'(a)(x–a)$: $y=a^2+4a+6+(2a+4)(x–a)$ – уравнение касательной.

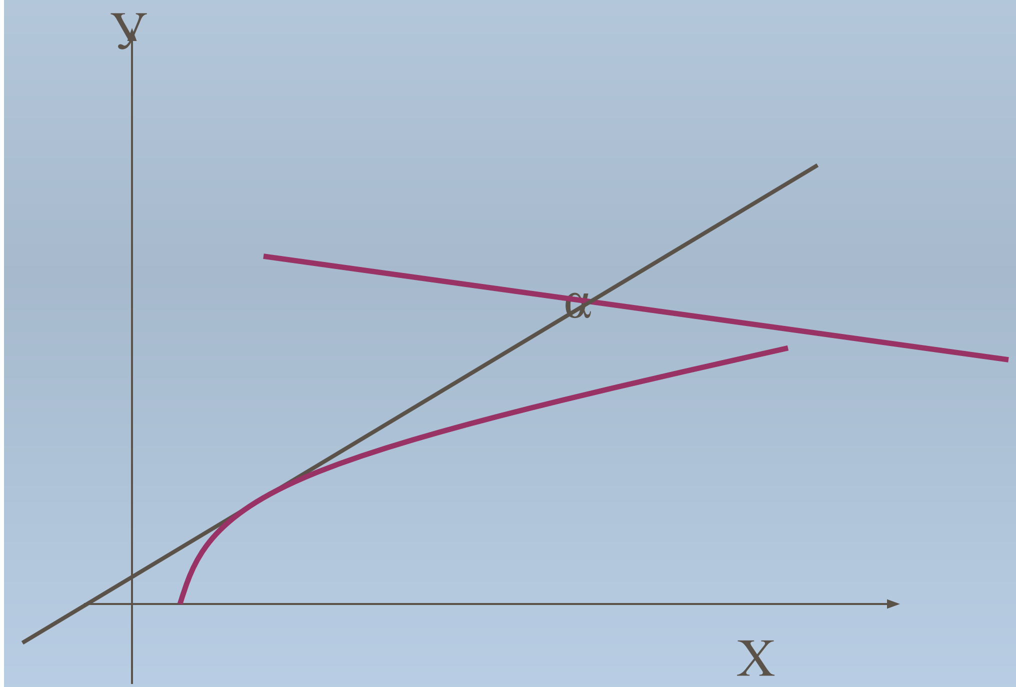
Так как касательная проходит через точку М(-3;-1), то $-1=a^2+4a+6+(2a+4)(-3–a)$, $a^2+6a+5=0$, $a=-5$ или $a=-1$.

Если $a=-5$, то $y=-6x–19$ – уравнение касательной.

Если $a=-1$, $y=2x+5$ – уравнение касательной.

Ответ: $y=-6x–19$, $y=2x+5$.

3. Касательная проходит под некоторым углом к данной прямой



Даны дифференцируемая функция $y=f(x)$ и

1) значение производной в точке касания $f'(a)$;
2) указан угловой коэффициент касательной;
3) задан угол, между касательной к графику функции и данной прямой.

Решая уравнение $f'(a)=k$ или $f'(a)=\text{tg}\,\alpha$ (если задан угол α) находим возможные значения a.

Ключевая задача 3. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y=x^2–2x–8$, параллельных прямой $y=-4x–4$.

Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания а.

2. Найдем f(a): $f(a)=a^2–2a–8$.

3. Найдем f'(x) и f'(a): $f'(x)=2x–2$, $f'(a)=2a–2$.

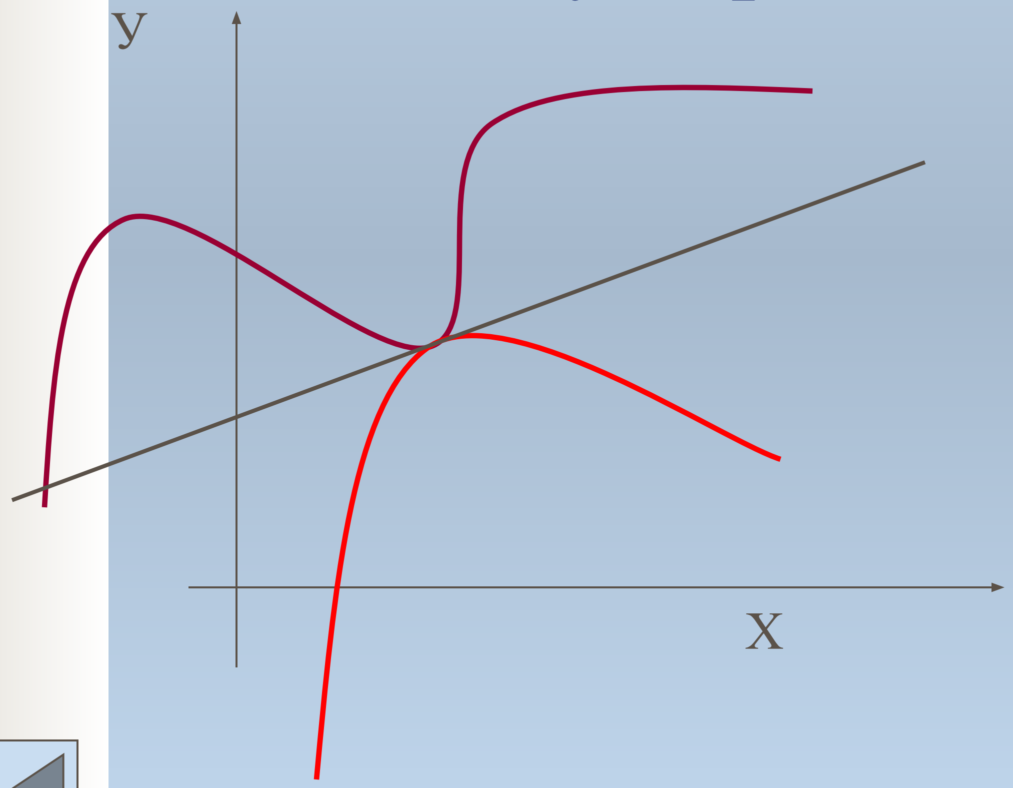
Но, с другой стороны, $f'(a)= - 4$ (условие параллельности). Решив уравнение $2a–2= - 4$, получим $a= - 1$, $f(a)= - 5$.

Подставим найденные числа a, f(a), в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=-5–4(x+1)$,

$y= - 4x–9$ – уравнение касательной.

Ответ: $y= - 4x–9$.

4. Касательная является общей для двух кривых



Даны дифференцируемые функция $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Нужно найти уравнения общих касательных к графику этих функций.

1 способ.

Такие задачи можно решать с помощью необходимого и достаточного признака того, что прямая $y=kx+b$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Тогда задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} f(m)=km+b, \\ g(n)=kn+b, \\ f'(m)=k, \\ g'(n)=k, \end{cases}$$

где $(m;f(m))$ и $(n;g(n))$ – точки касания искомой прямой с графиками функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ соответственно. Решив систему, получим возможные значения k и b и запишем уравнения общих касательных в виде $y=kx+b$.

2 способ.

1) Находим уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой а.
2) Находим уравнение касательной к графику функции $y=g(x)$ в точке с абсциссой а.
3) Полученные прямые должны совпадать, т. е. решаем систему:

$$\begin{cases} k_1=k_2, \\ b_1=b_2. \end{cases}$$

Ключевая задача 4. Напишите уравнения всех общих касательных к графикам функций $y=x^2+x+1$ и. $y=0,5(x^2+3)$.

Решение. I 1. a – абсцисса точки касания графика функции $y=x^2+x+1$

2. Найдем f(a): $f(a)=a^2+a+1$.

3. Найдем f'(x) и f'(a): $f'(x)=2x+1$, $f'(a)=2a+1$.

4. Подставим a, f(a), в общее уравнение касательной

$y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=a^2+a+1+(2a+1)\cdot(x-a)$, $y=(2a+1)x-a^2+1$ – уравнение касательной.

II. 1. c – абсцисса точки касания графика функции $y=0,5(x^2+3)$.

2. Найдем f(c): $f(c)=0,5c^2+1,5$.

3. Найдем f'(x) и f'(c): $f'(x)=x$, $f'(c)=c$.

4. Подставим a, f(a), в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$:

$y=0,5c^2+1,5+c(x-c)$, $y=cx-0,5c^2+1,5$ – уравнение касательной.

Так как касательная общая, то $\begin{cases} 2a+1=c, \\ -a^2+1=-0,5c^2+1,5 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=1, \\ a=0; \end{cases} \text{ или } \\ \begin{cases} c=-3 \\ a=-2 \end{cases} \end{array}\right.$

Итак, $y=x+1$ и $y=-3x-3$ общие касательные.

Ответ: $y=x+1$ и $y=-3x-3$.

Является ли данная прямая касательной к графику функции y=f(x)?

Даны дифференцируемая функция $y=f(x)$ и уравнение прямой $y=kx+b$. Выясните, является ли данная прямая касательной к графику функции $y=f(x)$.

1 способ.

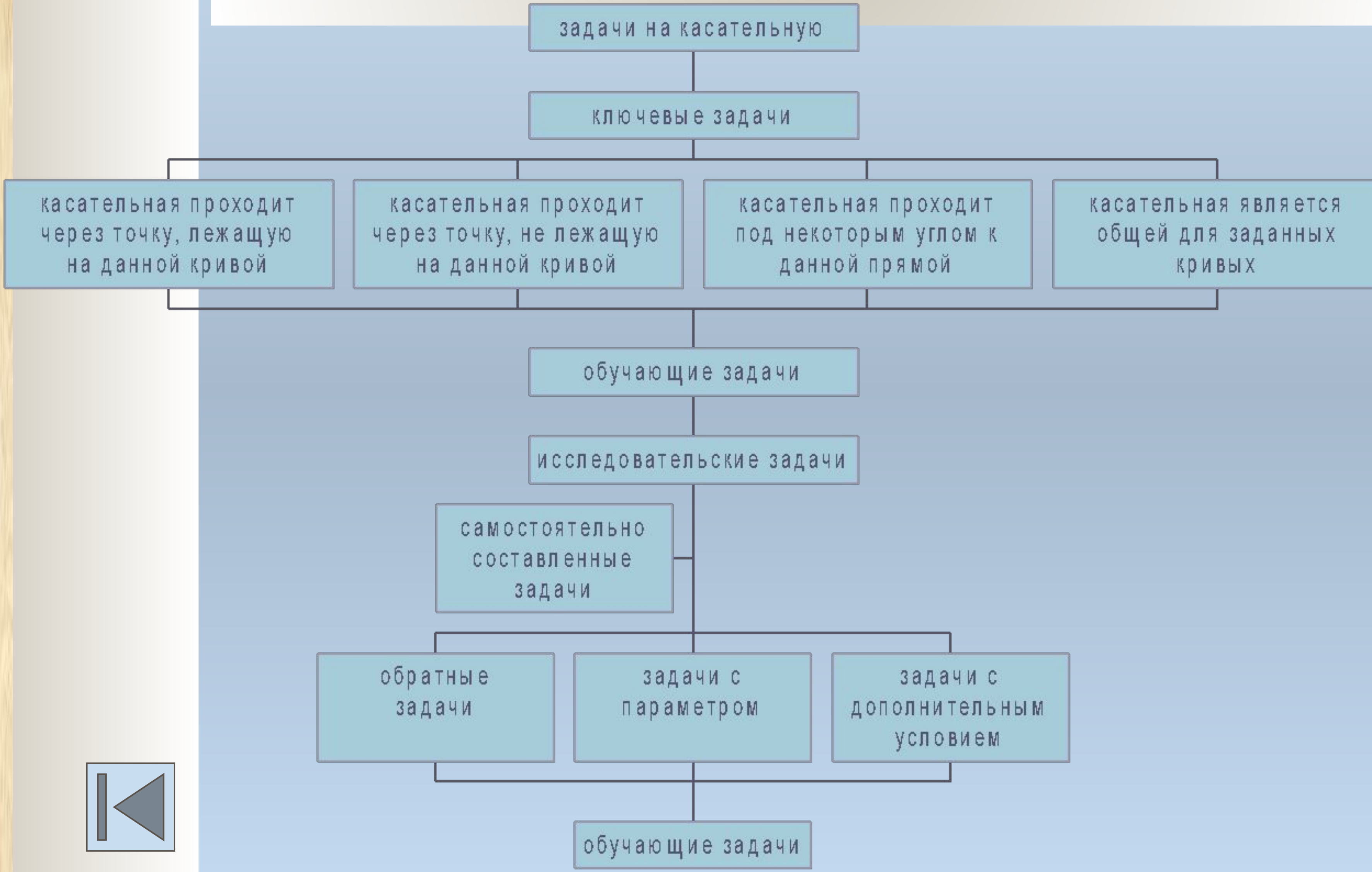
Если $y=kx+b$ – уравнение к графику функции в точке с абсциссой a, то $f'(a)=k$. Решив это уравнение, находим a и задача сводится к решению первого типа задач на касательную. Полученное уравнение сравнивается с данным уравнением прямой.

2 способ.

Прямая $y=kx+b$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ в том и только том случае, если существует такое значение a, при котором совпадают значения данных функций и значения их производных, т. е. Совместна система

$$\begin{cases} f(a)=ka+b, \\ f'(a)=k. \end{cases}$$

Представим разработанную систему задач в виде схемы.


задачи на касательную
ключевые задачи
касательная проходит через точку, лежащую на данной кривой
касательная проходит через точку, не лежащую на данной кривой
касательная проходит под некоторым углом к данной прямой
касательная является общей для заданных кривых
обучающие задачи
исследовательские задачи
самостоятельно составленные задачи
обратные задачи
задачи с параметром
задачи с дополнительным условием
обучающие задачи