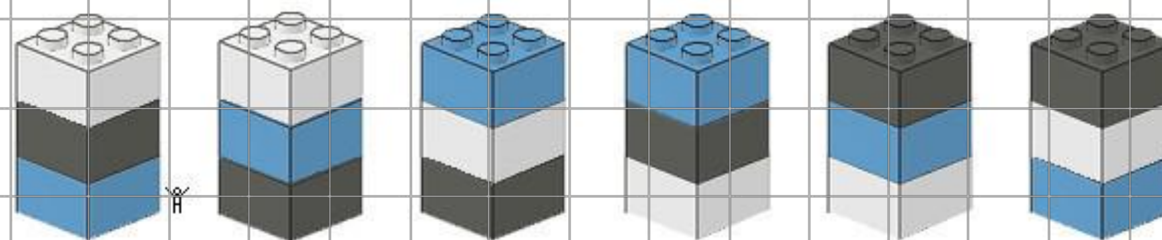
Введение в комбинаторику и теорию вероятностей.

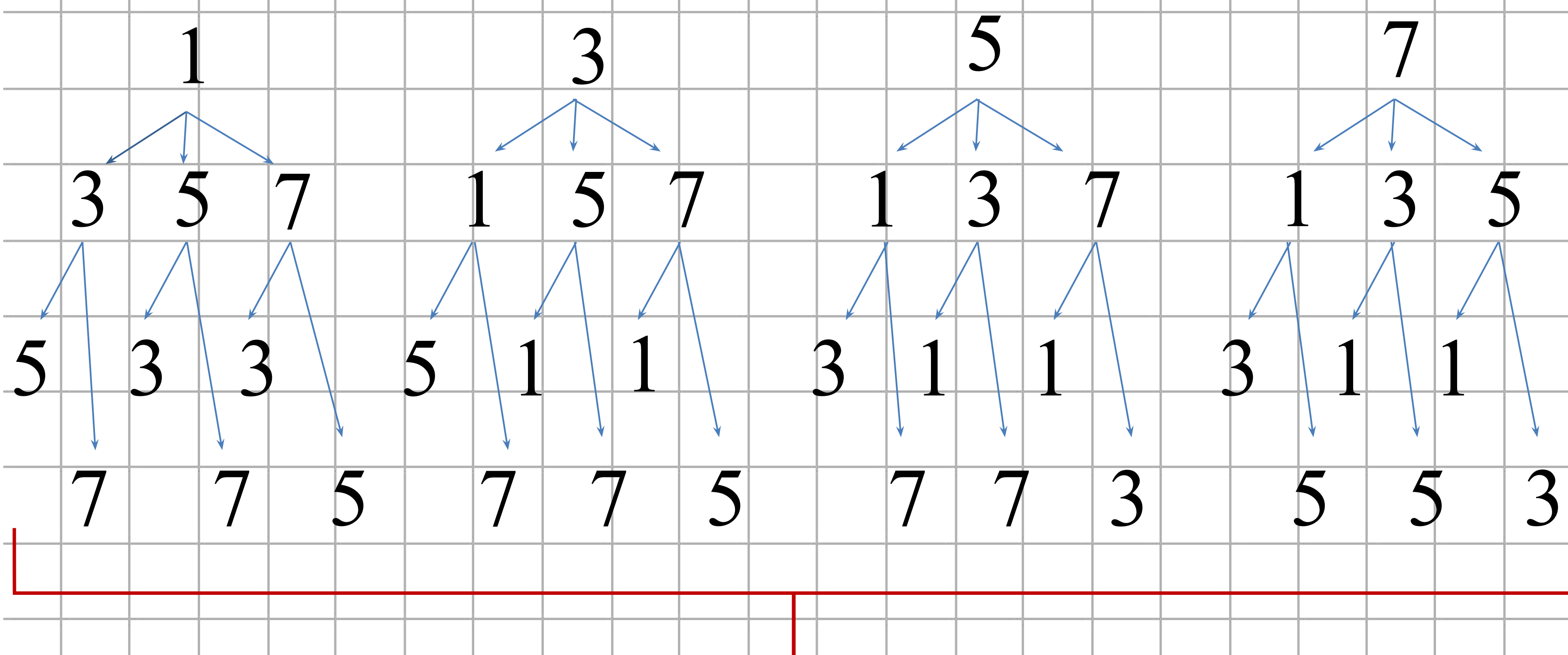


Комбинаторика.

«комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare* – «соединять, сочетать».

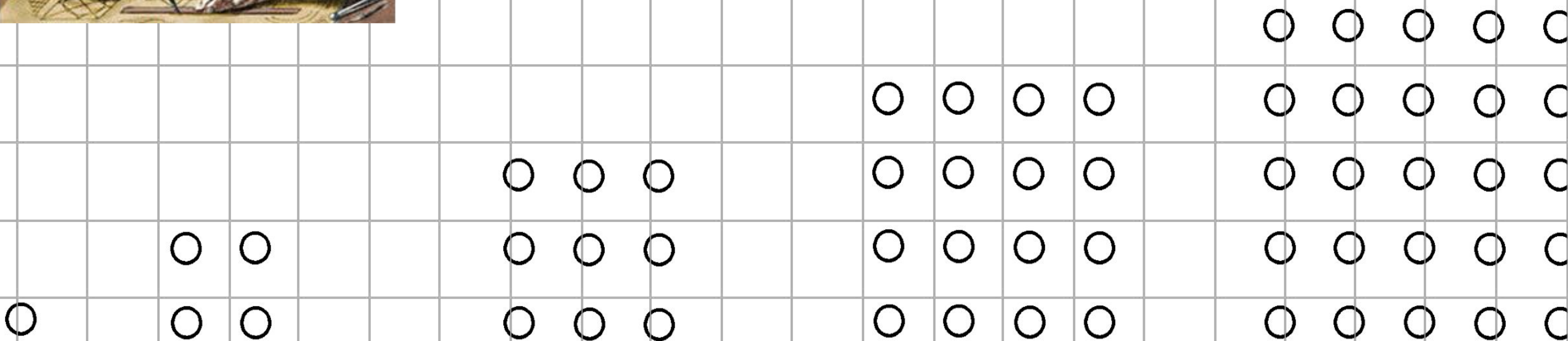
Определение. ***Комбинаторика*** – это раздел математики, посвящённый задачам выбора и расположения предметов из различных множеств.

<u>Пример 2</u>. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую цифру не более одного раза?

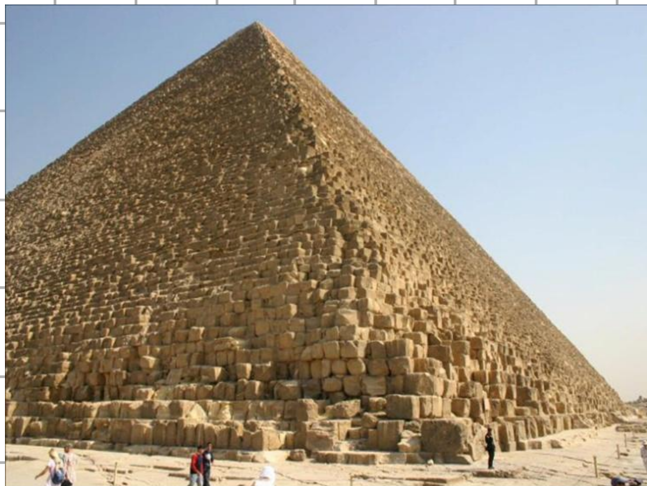


дерево вариантов

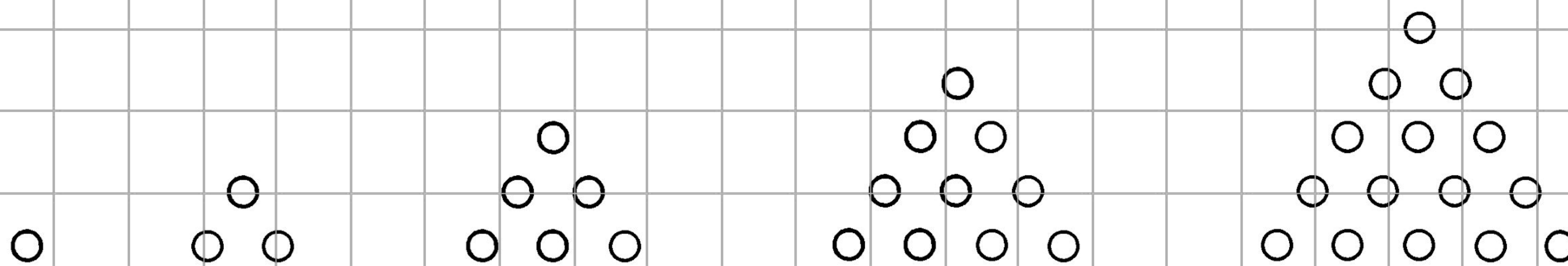
Квадратные числа



1 $\quad 2\cdot 2 = 2^2 = 4$ $\quad 3\cdot 3 = 3^2 = 9$ $\quad 4\cdot 4 = 4^2 = 16$ $\quad 5\cdot 5 = 5^2 = 25$

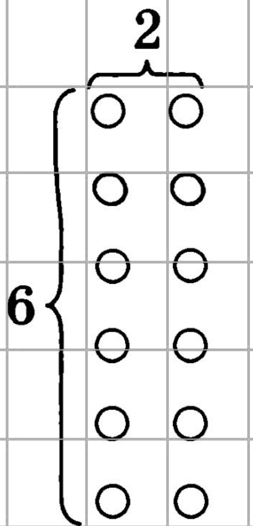


Треугольные числа

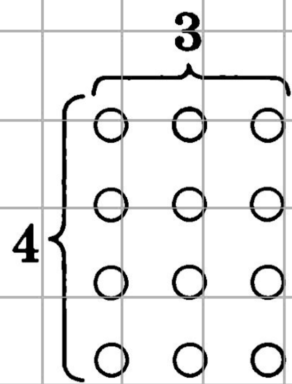


1   1+2=3   1+2+3=6   1+2+3+4=10   1+2+3+4+5=15

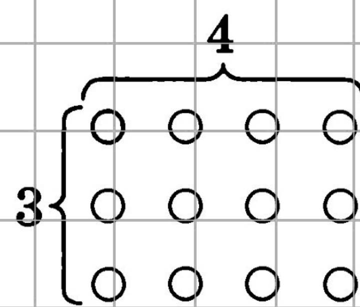
Прямоугольные и непрямоугольные числа.



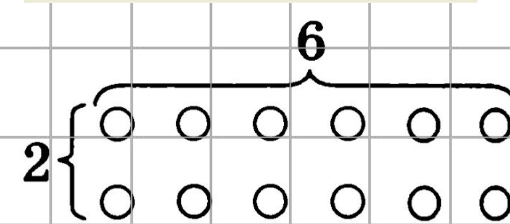
$12 = 6 \cdot 2$



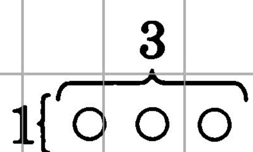
$12 = 4 \cdot 3$



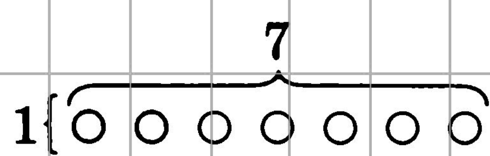
$12 = 3 \cdot 4$



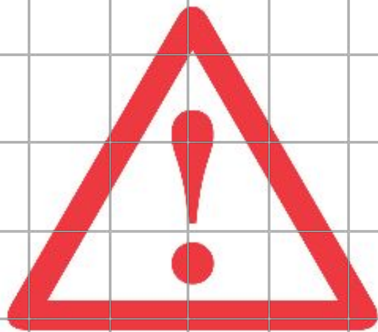
$12 = 2 \cdot 6$



$3 = 1 \cdot 3$



$7 = 1 \cdot 7$



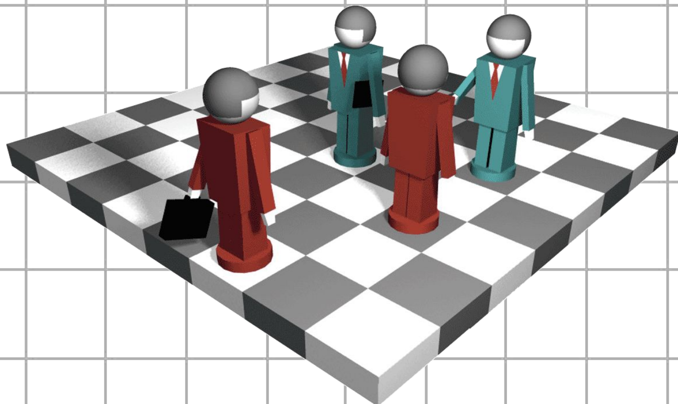
Факториал.

Определение. ***Факториалом*** натурального числа *n* называется произведение всех натуральных чисел от 1 до *n*. Обозначение *n!*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Таблица факториалов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800



Перестановки.

<u>Определение.</u> ***Перестановкой*** называется конечное множество, в котором установлен порядок элементов.

Число всевозможных перестановок из *n* элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Пример 1.

Сколькими способами могут быть расставлены восемь участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

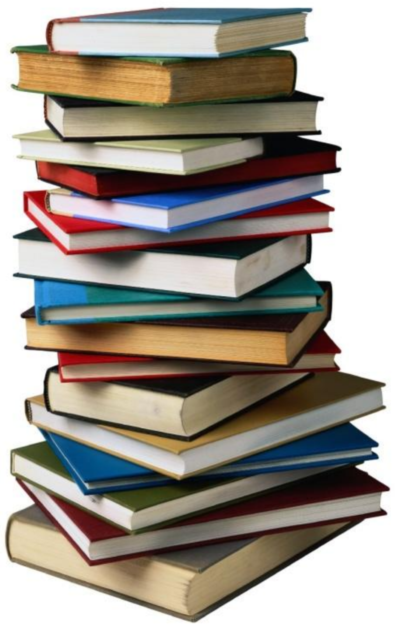
Решение: $P_8 = 8! = 40\,320$

Пример 2.
Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, причём в каждом числе цифры должны быть разные?

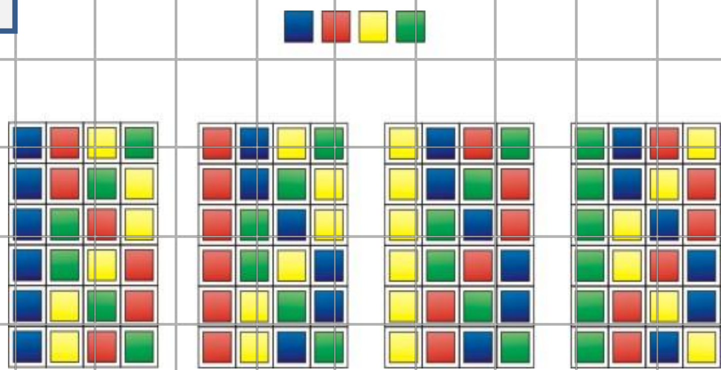
Решение: $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18.$

Пример 3.

Имеется 10 различных книг, среди которых есть трёхтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, если книги трёхтомника должны находиться вместе, но в любом прядке?



Решение: $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 241\,920$



Размещения.

<u>Определение.</u> ***Размещением*** A_n^k из n элементов конечного множества по k, где $k \le n$, называют упорядоченное множество, состоящее из k элементов.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример 1.

Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$A_{12}^{4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 11\,880$$

Пример 2.

Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?

Решение:

$$A_{10}^{7} - A_{9}^{6} = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9! \cdot 9}{3!} = 544\ 320$$

Пример 3.
Сколько существует трёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений), которые НЕ кратны 3?

Решение:

$$A_6^3 - 8 \cdot P_3 = \frac{6!}{3!} - 8 \cdot 3! = 120 - 48 = 72$$

Сочетания.

Определение. Подмножества, составленные из *n* элементов данного множества и содержащие *k* элементов в каждом подмножестве, называют ***сочетаниями*** из *n* элементов по *k*. (Сочетания различаются только элементами, порядок их не важен: *ab* и *ba* – это одно и тоже сочетание).

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

…

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

…

Треугольник Паскаля

столбцы строки	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…	…							

Треугольник Паскаля

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

$$\ldots$$

Пример 1.

Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из класса, в котором 20 человек?

Решение:

$$C_{20}^{3}=\frac{20!}{3!\cdot 17!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{6}=1\,140$$

Пример 2.

Из вазы с цветами, в которой стоят 10 красных гвоздик и 5 белых, выбирают 2 красные гвоздики и одну белую. Сколькими способами можно сделать такой выбор букета?

Решение:

$$C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{1} = \frac{10! \cdot 5!}{2! \cdot 8! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5}{2} = 225$$

ер 3.

огурцов и три помидора

ь в два пакета так, чтобы

те был хотя бы один помидор и

чтобы овощей в пакетах было поровну.

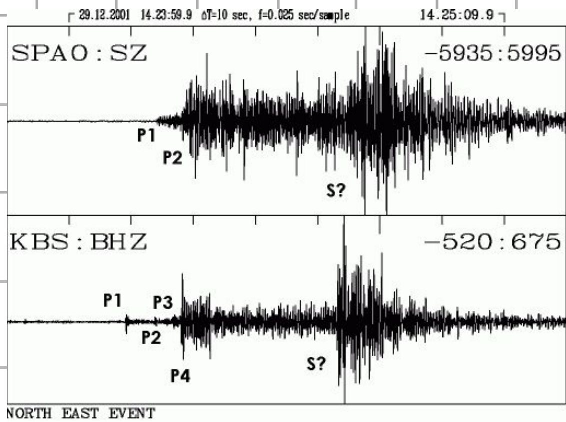
Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_3^1 \cdot C_7^4 = \frac{3! \cdot 7!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105$$

$$C_3^2 \cdot C_7^3 = \frac{3! \cdot 7!}{2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105$$

Частота и вероятность.



еление. ***Частотой***

бытия в серии испытаний

отношение числа

в которых это событие наступило (благоприятные испытания), к числу всех испытаний.

$$Частота = \frac{m}{n}$$, где m – число испытаний с благоприятным исходом,

n – число всех испытаний.

Нахождение частоты предполагает, чтобы испытание было проведено фактически.

Частота и вероятность.

еление. ***Вероятностью***
ывается отношение
благоприятных для A
числу всех равновозможных
ов.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Нахождение вероятности не требует, чтобы испытание проводилось в действительности.

Пример 1. В урне 10 одинаковых шаров разного цвета: 2 красных, 3 синих, 5 жёлтых. Шары тщательно перемешаны. Наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным; б) синим; в) жёлтым?

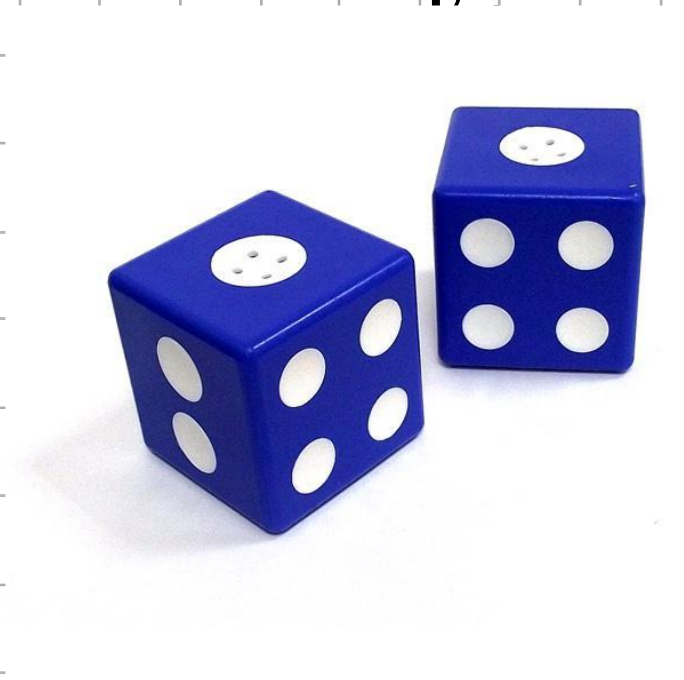
Решение:

а) $P(К)=\dfrac{2}{10}=0{,}2;$

б) $P(С)=\dfrac{3}{10}=0{,}3;$

в) $P(Ж)=\dfrac{5}{10}=0{,}5.$

Пример 2.



К... Миша бросают два
... Они
... если ... при
... в ... сумме выпадет
... выигрывает Коля, а если в
...выпадет 7 очков, то
...а. Справедлива ли эта игра?

Решение:

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	[redacted]
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	[redacted]	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	[redacted]	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	[redacted]	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	[redacted]	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

$$P(B)=\frac{6}{36}$$

Пример 3.

ранных 10

ко 7 не имеют

вероятность

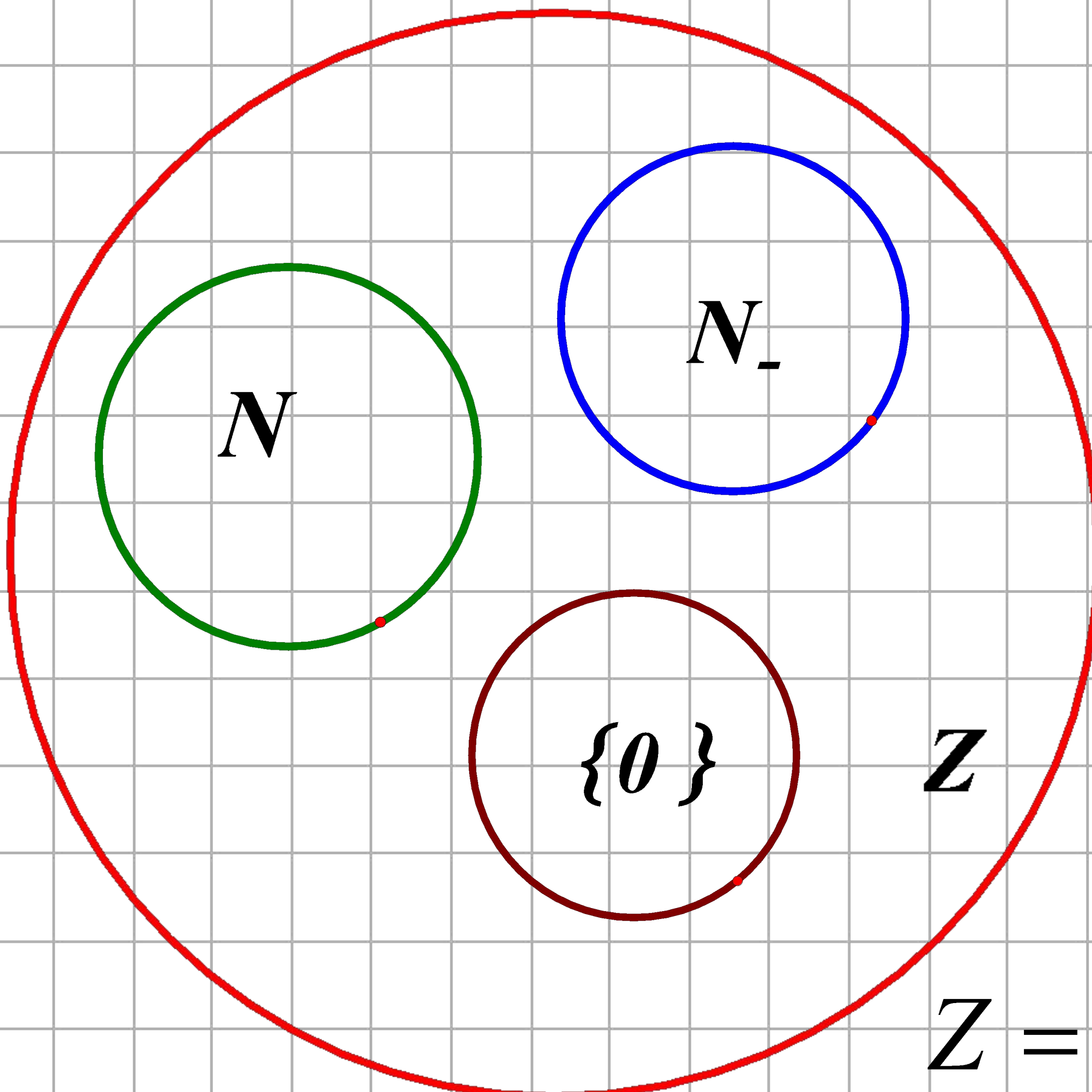
выбранных

велосипеда из этих 10 окажутся без дефекта?

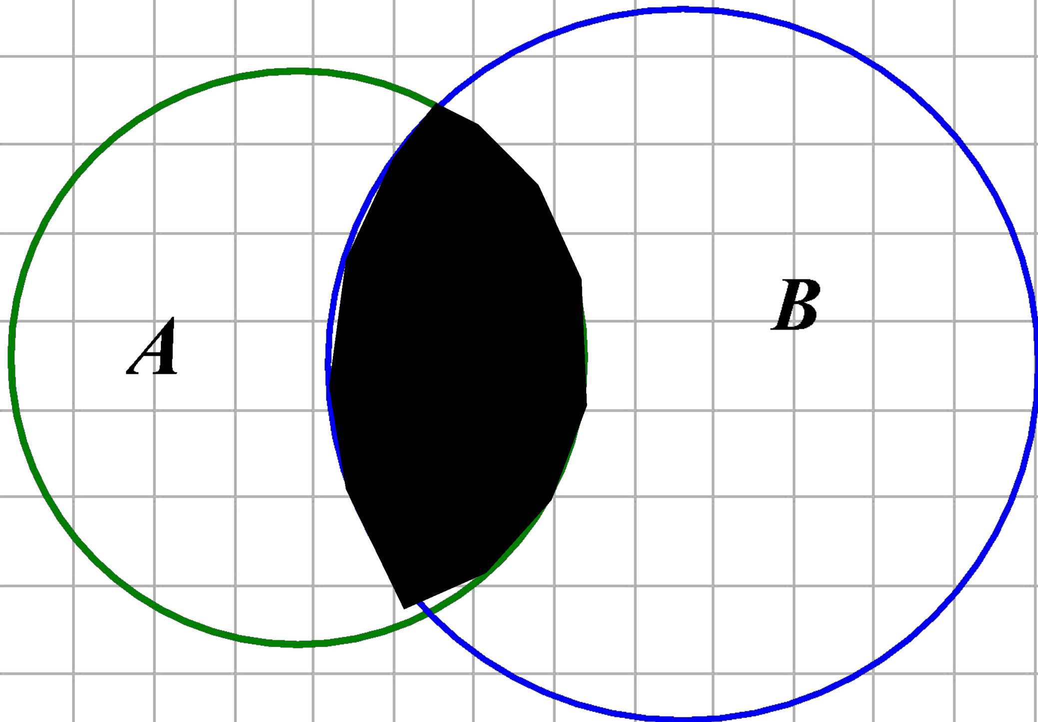
Решение:

$$P(A)=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}:\frac{10!}{4!\cdot 6!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{6}$$

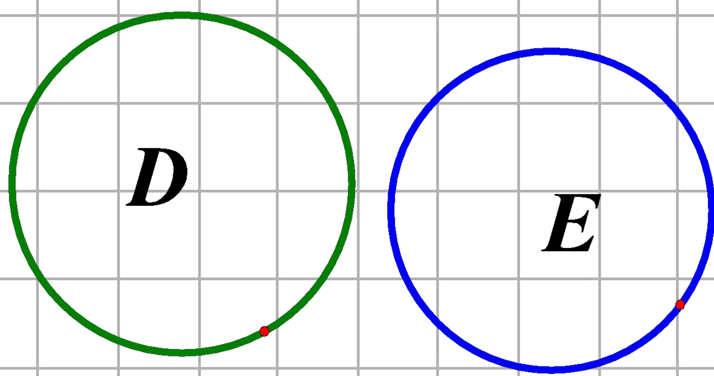
Сложение вероятностей.



$$Z = N \cup N_- \cup \{0\}$$



$$C = A \cap B$$



$$D \cap E = \varnothing$$

D и E называются ***несовместными событиями***.

Сложение вероятностей.

Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Пример 1.

В урне находятся 30 шаров 10 белых, 15 красных и 5 синих. Найдите вероятность появления цветного шара.

Решение:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Пример 2.

В контейнере 10 деталей, из низ 2 нестандартные. Найдите вероятность того, что из 6 наугад отобранных деталей окажется не более одной нестандартной.

Решение:

$$C_{10}^{6}=\frac{10!}{6!\cdot 4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}=210$$ - всего событий

Событие ***A*** – все 6 отобранных деталей стандартные,

событие ***B*** – среди 6 отобранных деталей одна нестандартная.

$$C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$ - благоприятные события для A

$$C_2^1 \cdot C_8^5 = 2 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 112$$ - благоприятные события для B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{28}{210} + \frac{112}{210} = \frac{140}{210} = \frac{2}{3}$$

Умножение вероятностей.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Пример 1.</u>

Монету бросают 3 раза подряд. Какова вероятность, что решка выпадет все три раза.

Решение:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Пример 2.

ь попадания в

первого

а при стрельбе из

ция равна 0,7.

роятность

хотя бы одного попадания в цель, если каждое орудие сделало по одному выстрелу.

Решение:

событие A – попадание в цель 1-го орудия;

событие B – попадание в цель 2-го орудия.

событие $\overline{A}$ - промах 1-го орудия

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

событие $\overline{B}$ - промах 2-го орудия

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимые

$$P(\overline{A} \square \overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$$

события A и $\overline{A} \square \overline{B}$ противоположные

$$P(A) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$$