

Комбинаторные задачи и
начальные сведения из теории
вероятностей в курсе алгебры
9 класса.

Примерное планирование

№ параграфа, пункта	Тема	Количество уроков
3	Элементы комбинаторики	8
3.1	Примеры комбинаторных задач	2
3.2	Перестановки	2
3.3	Размещения	2
3.4	Сочетания	2
4	Начальные сведения из теории вероятности	3
4.1	Вероятность случайного события	3
4.2 *	Сложение и умножение вероятностей	0
	Контрольная работа	1
Итого		12

Комбинаторные задачи

- В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число этих комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют комбинаторикой. Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и других областях знаний.

Способы решения комбинаторных задач:

- Перебор возможных вариантов
- Дерево возможных вариантов
- Комбинаторное правило умножения

Задача 9.2. У Ирины пять подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана, Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?

Решение:

Переберу возможные варианты:

Вера, Зоя	Вера, Марина	Вера, Полина	Вера, Светлана
Зоя, Марина	Зоя, Полина	Зоя, Светлана	
Марина, Полина	Марина, Светлана		
Полина, Светлана			

Таких вариантов 10.

Задача 9.7. Используя цифры 0; 2; 4; 6, составьте все возможные трёхзначные числа, в которых цифры не повторяются.

Решение:

1) Составлю дерево возможных вариантов:

Первая цифра	2						4						6					
вторая цифра	0		4		6		0		2		6		0		2		4	
третья цифра	4	6	0	6	0	4	2	6	0	6	0	2	2	4	0	4	0	2
Всего 18 вариантов																		

2) Посчитаю количество трёхзначных чисел по комбинаторному правилу умножения: Первую цифру я могу выбрать из имеющихся четырёх 3 способами, после чего вторую цифру я могу выбрать из оставшихся трёх 3 способами, после чего третью цифру я могу выбрать из оставшихся двух 2 способами, значит способов выбора у меня $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Определение: Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.

$$P_n = n!$$

Задача 9.23. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придётся перебрать, чтобы дозвониться подруге.

Решение:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ (вариантов дозвона)}$$

Задача 9.29. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Решение:

Сначала буду рассматривать уроки алгебры и геометрии как один урок, тогда надо составить расписание не для 6 уроков, а для 5, т.е. $P_5 = 5! = 120$ (способами). При этом возможны $2! = 2$ способа для расстановки уроков алгебры и геометрии относительно друг друга, значит по комбинаторному правилу умножения расписание на понедельник, соответствующее заданным требованиям, можно составить $120 \cdot 2 = 240$ (способами).

Определение: Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов. $A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-(k-1))$

Из определения следует, что два размещения из n элементов по k считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.

Задача 9.40. Сколькими способами может разместиться семья из трёх человек в четырёхместном купе, если других пассажиров в купе нет?

Решение:

*Буду распределять (размещать) 4 места по 3 пассажирам, это возможно $A_4^3 = 4*3*2 = 24$ способами.*

Задача 9.52. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля?

Решение:

*Имея 10 цифр, я могу составить $A_{10}^7 = 10*9*8*7*6*5*4$ семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны. Среди этих номеров имеются номера, начинающиеся с цифры 0, их число равно $A_9^6 = 9*8*7*6*5*4$. Значит всего таких телефонных номеров будет $A_{10}^7 - A_9^6 = 10*9*8*7*6*5*4 - 9*8*7*6*5*4 = 544320$.*

Определение: Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов. $C_n^k = n! / k!(n-k)!$

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Задача 9.57. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать двоих из них для участия в математической олимпиаде?

Решение: $C_7^2 = 7! / 2!5! = 7 \cdot 6 / 2 = 21$.

Задача 9.68. Для ремонта школы прибыла бригада, состоящая из 12 человек. Трёх из них надо отправить на четвёртый этаж, а четырёх из оставшихся – на пятый. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

На четвёртый этаж можно отправить рабочих $C_{12}^3 = 12! / 3!9! = 12 \cdot 11 \cdot 10 / 6 = 220$ способами, после чего на пятый этаж можно отправить четверых из оставшихся 9 рабочих $C_9^4 = 9! / 4!5! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 126$ способами, т.е. по комбинаторному правилу умножения всего таких способов $220 \cdot 126 = 27720$.

Начальные сведения из теории вероятности

Событие, которое может произойти, может не произойти, называют случайным событием. Изучением закономерностей случайных событий занимается теория вероятностей.

Как часто наступает то или иное событие в большой серии испытаний со случайными исходами, которые происходят в одинаковых условиях?

Определение: Относительной частотой случайного события в серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу испытаний.

Определение: Вероятностью события называется отношение числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов.

Задача 9.75. В партии из 1000 деталей отдел технического контроля обнаружил 12 нестандартных деталей. Какова относительная частота появления нестандартных деталей?

Решение: $12:1000 = 0,012$.

Задача 9.81. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

Решение: $120:1500 = 0,08 = 8\%$.

Задача 9.93. На полке стоят 12 книг, из которых 4 – это учебники. С полки снимают наугад 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

Решение:

Пусть А – событие, состоящее в том, 3 из 6 снятых с полки книг, окажутся учебниками, тогда количество равновозможных исходов «снять 6 книг из 12» равно C_{12}^6 при этом количество благоприятных исходов «снять 3 учебника из 4» равно C_4^3 , после чего количество благоприятных исходов «снять 3 неучебника из 8 неучебников» равно C_8^3 и по правилу комбинаторного умножения всего благоприятных исходов события А будет $C_4^3 C_8^3$.

Значит $P(A) = C_4^3 C_8^3 / C_{12}^6 = (4!/3!1!)(8!/3!5!)/(12!/6!6!) = 4!8!6!6!/(3!3!5!12!) = 8:33 = 24\%$.