Комбинаторные задачи и начальные сведения из теории вероятностей в курсе алгебры 9 класса.

Парамонова

Татьяна Павловна

Примерное планирование

№ параграфа, пункта	Тема	Количество уроков
3	**Элементы комбинаторики**	**8**
3.1	Примеры комбинаторных задач	2
3.2	Перестановки	2
3.3	Размещения	2
3.4	Сочетания	2
4	**Начальные сведения из теории вероятности**	**3**
4.1	Вероятность случайного события	3
4.2 *	Сложение и умножение вероятностей	0
	Контрольная работа	1
Итого	12	

Комбинаторные задачи

- В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число этих комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют комбинаторикой. Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и других областях знаний.

Способы решения комбинаторных задач:

- Перебор возможных вариантов
- Дерево возможных вариантов
- Комбинаторное правило умножения

Задача 9.2. **У Ирины пять подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана, Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?**

Решение:
Переберу возможные варианты:

Вера, Зоя	Вера, Марина	Вера, Полина	Вера, Светлана
Зоя, Марина	Зоя, Полина	Зоя, Светлана	
Марина, Полина	Марина, Светлана		
Полина, Светлана			

Таких вариантов 10.

Задача 9.7. **Используя цифры 0; 2; 4; 6, составьте все возможные трёхзначные числа, в которых цифры не повторяются.**
Решение:

1) **Составлю дерево возможных вариантов:**

<table>
<tr><td>Первая цифра</td><td colspan="6">2</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">6</td></tr>
<tr><td>вторая цифра</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>третья цифра</td><td>4</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="19">Всего 18 вариантов</td></tr>
</table>

2) Посчитаю количество трёхзначных чисел по комбинаторному правилу умножения: Первую цифру я могу выбрать из имеющихся четырёх 3 способами, после чего вторую цифру я могу выбрать из оставшихся трёх 3 способами, после чего третью цифру я могу выбрать из оставшихся двух 2 способами, значит способов выбора у меня 3*3*2=18.

Определение: Перестановкой из *n* элементов называется каждое расположение этих элементов в определённом порядке.
$P_n = n!$

Задача 9.23. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придётся перебрать, чтобы дозвониться подруге.
Решение:
$P_3 = 3! = 1*2*3 = 6$ (вариантов дозвона)

Задача 9.29. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?
Решение:
Сначала буду рассматривать уроки алгебры и геометрии как один урок, тогда надо составить расписание не для 6 уроков, а для 5, т.е. $P_5 = 5! = 120$ (способами). При этом возможны $2! = 2$ способа для расстановки уроков алгебры и геометрии относительно друг друга, значит по комбинаторному правилу умножения расписание на понедельник, соответствующее заданным требованиям, можно составить $120*2 = 240$ (способами).

Определение: Размещением из n элементов по $к$ ($к \le n$) называется любое множество, состоящее из любых $к$ элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов. $A_n^к = n(n-1)(n-2)(n-3)....(n-(к-1))$

Из определения следует, что два размещения из n элементов по $к$ считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.

Задача 9.40. Сколькими способами может разместиться семья из трёх человек в четырёхместном купе, если других пассажиров в купе нет?

Решение:

Буду распределять (размещать) 4 места по 3 пассажирам, это возможно $A_4^3 = 4*3*2 = 24$ *способами.*

Задача 9.52. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля?

Решение:

Имея 10 цифр, я могу составить $A_{10}^7 = 10*9*8*7*6*5*4$ *семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны. Среди этих номеров имеются номера, начинающиеся с цифры 0, их число равно* $A_9^6 = 9*8*7*6*5*4$. *Значит всего таких телефонных номеров будет* $A_{10}^7 - A_9^6 = 10*9*8*7*6*5*4 - 9*8*7*6*5*4 = 544320.$

Определение: Сочетанием из *n* элементов по *к* называется любое множество, составленное из *к* элементов, выбранных из данных *n* элементов. $C_n^к = n!/к!(n-к)!$

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из *n* элементов по *к* отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Задача 9.57. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать двоих из них для участия в математической олимпиаде?

Решение: $C_7^2 = 7!/2!5! = 7*6:2 = 21$.

Задача 9. 68. Для ремонта школы прибыла бригада, состоящая из 12 человек. Трёх из них надо отправить на четвёртый этаж, а четырёх из оставшихся – на пятый. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

На четвёртый этаж можно отправить рабочих $C_{12}^3 = 12!/ 3!9! = 12*11*10/ 6 = 220$ способами, после чего на пятый этаж можно отправить четверых из оставшихся 9 рабочих $C_9^4 = 9!/4!5! = 9*8*7*6/(1*2*3*4) =126$ способами, т.е. по комбинаторному правилу умножения всего таких способов $220*126 =27720$.

Начальные сведения из теории вероятности

Событие, которое может произойти, может не произойти, называют случайным событием.
Изучением закономерностей случайных событий занимается теория вероятностей.

Как часто наступает то или иное событие в большой серии испытаний со случайными исходами, которые происходят в одинаковых условиях?

Определение: Относительной частотой случайного события в серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу испытаний.
Определение: Вероятностью события называется отношение числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов.
Задача 9.75. В партии из 1000 деталей отдел технического контроля обнаружил 12 нестандартных деталей. Какова относительная частота появления нестандартных деталей?
Решение: 12:100 = 0,012.

Задача 9.81. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?
Решение: 120:1500 = 0,08 = 8%.

Задача 9.93. На полке стоят 12 книг, из которых 4 – это учебники. С полки снимают наугад 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

Решение:

Пусть А – событие, состоящее в том, 3 из 6 снятых с полки книг, окажутся учебниками, тогда количество равновозможных исходов «снять 6 книг из 12» равно C_{12}^{6} при этом количество благоприятных исходов «снять 3 учебника из 4» равно C_4^3, после чего количество благоприятных исходов «снять 3 неучебника из 8 неучебников» равно C_8^3 и по правилу комбинаторного умножения всего благоприятных исходов события А будет $C_4^3C_8^3$.

Значит $P(A) = C_4^3C_8^3/C_{12}^6 = (4!/3!1!)(8!/3!5!)/(12!/6!6!) = 4!8!6!6!/(3!3!5!12!) = 8:33 =24\%$.